Proceedings of the 37th Summer Seminar on Lie Algebras and Related Topics

University of Fukui
August 27–28, 2022

第 37 回 リー代数サマーセミナー報告集

福井大学

2022 年 8 月 27 日（土曜日）– 2022 年 8 月 28 日（日曜日）

2023 年 4 月

福井大学

目次

巻頭言

2022 年 8 月 27 日から 28 日に福井大学で開催しました「第 37 回リー代数サマーセミナー」の報告集です.

サマーセミナーの開催を最初にご案内した 2022 年の 4 月の段階では, コロナウィルス (COVID-19) の世界的流行が始まってから約 2 年を経過しており, 今後は感染者も減少して, 様々な制約も緩和されていくだろうと考えておりました. そのため, 本研究会も対面で実施することとしましたが, 7 月ごろから感染者数が増え始め, 「第 7 波」の中での開催となってしまいました. そのような中, ご講演頂いた講演者と参加者の皆様には, 心より感謝申し上げます.

研究会では, 大学院生の講演者の方を中心に, 8 件の講演がありました. 報告集には, 非専門家にも興味深い解説なども多く含まれています. 今回ご参加いただけなかった皆様も含め, 今後の参考となれば大変幸いです.

本報告集の作成には, 前回世話人の岡山理科大学の柴田さんが準備された報告集用フォーマットを利用しました. また, 科研費 21K03177（研究代表者：古閑義之）からの支援を受けております.

2023 年 4 月　世話人: 松本拓也, 古閑義之（福井大学）

研究会プログラム

第37回リー代数サマーセミナー

2022 年度のリー代数サマーセミナーをご案内します.

日時: 2022 年 8 月 27 日 (土), 8 月 28 日 (日)

会場: 福井大学文京キャンパス総合研究棟 I (11F) 1111 物理小講義室

8 月 27 日 (土)

13:30 – 14:00　神谷 徳昭　(会津大学)

A construction of quandles associated with quadratic algebras and its applications

14:10 – 14:40　河本 直紀　(海上保安大学校)

書評　井ノ口順一著、リッカチのひ・み・つ、日本評論社、2010,2018

14:50 – 15:20　松本 拓也　(福井大学)

Towards BGG resolutions for the affine Lie superalgebra $\mathfrak{sl}(2|2)$

15:20 – 15:40　休憩

15:40 – 16:10　大江 拓哉　(筑波大学)

超対称性と Picard-Vessiot 理論

16:20 – 16:50　若尾 亮太　(岡山理科大学)

10 次元以下の pointed ホップ・スーパー代数の分類

8 月 28 日 (日)

10:00 – 10:30　清水 健一　(芝浦工業大学)

Frobenius extensions finite-dimensional coideal subalgebras

10:40 – 11:10　杉谷 礼　(芝浦工業大学)

低次元ホップ代数の余イデアル部分代数の分類について

11:20 – 11:50　柴田 大樹　(岡山理科大学)

スーパー代数群のフロベニウス核の構造について

2022 年度世話人　古閑義之, 松本拓也 (福井大学)

集合写真

2022 年 8 月 27 日

2022 年 8 月 28 日

.

A Construction of Quandles associated with Quadratic Algebras and Its Applications (非結合的代数系からのカンドルのある構成)

by Noriaki Kamiya（神谷徳昭）
University of Aizu, Japan （福島県公立大学法人会津大学）

Abstract This note is a study of quadratic algebras, in particular, it is to give exmaples of quandle (or rack) in knot theory, and to deal with related topics associated with the quandles. That is, the contents are described about composition algebras and an announce of triality groups on nonassociative algebras and its results are a new concept.

§Introduction（はじめに）

非結合的代数を研究している筆者が最近考えた quandle の実例を与えることが，この小論の目的です．浅学の為にもしかしたらこの方面の knot theory においては，知られた事実かも知れませんが，少し関連する事柄を含め，対合 (involution) をもつ代数系の立場から新しい idea として述べさせていただきます．数学史的に言えば数理代数学の黎明としてとらえられると思います（大風呂敷をお許しください).

非結合的代数系については大久保進氏（仁科賞とウィグナー賞受賞）との共同研究 [K-O] の文献が 2 次代数，合成代数の一般化について述べてあり，$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$, $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ 等の内積 $<\ ,\ >$ （又は $\parallel x \parallel$, ノルム）を考える上で役に立つかも知れません，しかし直接，それらの結果を使うわけではないですが，合成代数に興味がある人の為に挙げさせていただきます．特に quandle の応用を研究するのに興味ある人々には，積が standard なものではないので，共役元（一般に involution をもつ積）で考えるこの小論が役に立つと思われます．つまり，この小論では quandles の例と，そこでの簡単な自己同型写像を考察します．内容は以下の通りです.

§1.Preliminary. §2.Results. §3.Examples. §4.Generalizations.

§5.Applications. §6.Conclusions and References. §7.Appendix.

§1. Preliminary（準備と定義）

集合 $\mathbf{M}$ とそこでの bijective なる乗法 $\circ$ が与えられたとき，次の条件１）と 2) を満たす $(\mathbf{M}, \circ)$ を quandle（カンドル）と言います．

1) $x \circ x = x$

2) $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$ for any $x, y, z \in \mathbf{M}$.

2) の条件は rack の条件です．これらは knot theory の用語です．正確には，$R_x y = y \circ x$ の右乗法 R_x が bijective です．

ここで $x * y = y \circ x$ と new product を定義すると，

3) $x * x = x$

4) $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$

と書き直すことができます．そして 更に $S_x y = x * y$ と表すと．

⊙ $S_x x = x$

⊙ $S_x S_y = S_{S_x y} S_x$

となり，(M, S_x) は s-mainifold とも関連します．この条件をもつ $\{S_x\}$ を s-map, $\mathbf{M}$ を s-set と呼ぶことにします（すなわちこれは generalized symmetric space の代数的概念とも一脈通じます）．勿論，S_x の多様体としての条件等を付け加えての議論です．ここでは詳しい議論には進みません．微分幾何学的な事柄とも関連すると思いますが，別の機会にさせていただきます.（例えば対称空間については O.Loos の本等を 参照して下さい）．

一方 homogeneous presystem $\eta(x, y, z)$ の概念で $\eta(x, x, y) = S_x y = x * y$ とすると，$\eta(a, b, \eta(x, y, z)) = \eta(\eta(a, b, x), \eta(a, b, y), \eta(a, b, z))$ が自己同型写像の概念となり，homogeneous presystem と S_x の理論とが関係します．これらについて詳しくは [K-S.1], [K-S.2] を参照して下さい（$\eta(x, x, \eta(y, y, z)) = S_x S_y z$ に留意して下さい）．

この小論では 1) と 2) は 3) と 4) と同値ですので，3) と 4) を満たす乗法 $*$ をもつ代数系で考察します．つまり，乗法をもつある集合の中で，$\lambda * \lambda = \lambda$ の元 λ を見つけることです．以上の事から 3) と 4) を満たす S_x を s-map，M を s-set と呼ぶことの理由です.

§2. Results（主要な定理）

$1 < q < r < p$, p を素数，q, r を自然数，$qr \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ かつ q と r のいずれも平方数でないとする（従って $p \neq 2$ です）.

例えば $p=5,\ q=2,\ r=3,\ p=7,\ q=3,\ r=5, p=11, q=7, r=8$ 等の対 $(p,\ q,\ r)$ を考えます．そして，有限体 $\mathbf{Z}_p=\mathbf{Z}/(p)$ 上の $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]$ を考察します（以下この条件で考える）．

積は $xy=(m+n\sqrt{q}+l\sqrt{r})(m'+n'\sqrt{q}+l'\sqrt{r})$，共役元は $\overline{x}=m-n\sqrt{q}-l\sqrt{r}$ if $x=m+n\sqrt{q}+l\sqrt{r}$ です（この積を standard product と呼ぶことにします）．

ここで内積（ノルム）を次の様に定義します.

$$\| x \|=\sqrt{<x,x>},\ <x,y>=\frac{1}{2}(x\overline{y}+y\overline{x}).$$

勿論 $\mathbf{Z}_p$ 上での 2 次代数 (quadratic algebra) です．つまり $1,x,x^2$ が 1 次従属であり，

$$xx-(x+\overline{x})x+\overline{x}x=0$$

を満たします．又合成代数の性質：

$$\| xy \|=\| x \|\| y \|\ \ (<xy,xy>=<x,x><y,y>)$$

が成立します．ここで $\| x \|^2=<x,x>=x\overline{x}\in\mathbf{Z}_p$ です．しかし $<x,y>$ は退化します.

以下の議論の為に

$M_2(p,q,r):=\{\begin{pmatrix} m & nq+l \\ n+lr & m \end{pmatrix}|m,n,l\in\mathbf{Z}_p\}$,

$GL(M_2(p,q,r)):=\{A\in M_2(p,q,r)|\det\ A\neq 0\}$,

$SL(M_2(p,q,r)):=\{A\in M_2(p,q,r)|\det\ A=1\}$,

$N(p,q,r):=\{x\in\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]|\ \| x \|=1\}$

なる記号を導入し，用いることにします.

定理 1（行列式とノルムの関係）　上記の記号のもとで

$\phi:\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]\to M_2(p,q,r)$ (as algebra, ϕ is a homomorphisum)

$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]^{\times}\cong GL(M_2(p,q,r))$ (as group)

$N(p,q,r)\cong SL(M_2(p,q,r))$ (as group)

が成り立つ.

証明　$x=m+n\sqrt{q}+l\sqrt{r}$ と $A=\begin{pmatrix} m & nq+l \\ n+lr & m \end{pmatrix}$ が $\mathbf{Z}_p$ 上準同型となり，

$$\| x \|^2=<x,x>=m^2-n^2q-l^2r-2nl$$

$$\det\ A = m^2 - n^2 q - l^2 r - 2nl$$

が成り立つので，$\| x \| = 1$ と $\det\ A = 1$ の同値性が示せます．勿論 $< x, x > \geq 0$ の為に，標数 p で考え，well-defined は仮定します．□

Remark.　$\exists (n, l) \in \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p,$ s.t. $nq + l \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$, $n + lr \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$ が $Ker\ \phi$ の元を生成します（勿論 $m = 0$ です）.

Remark.　簡単なことですが，次が成り立ちます.

$$SL(M_2(p,q,r)) \triangleleft GL(M_2(p,q,r)).\text{(正規部分群)}$$

$$\text{そして}\ \ \tilde{Q}(N(p,q,r)) := \{\lambda \in N(p,q,r) | \lambda\lambda = \overline{\lambda},\ \lambda \text{ is invertible}\},$$

と $\tilde{Q}(N(p,q,r))$ を定義します（weak quandle の原型です). また $N(\tilde{Q})$ を $\lambda \in \tilde{Q}$ の個数とする. 更に

$$x * y = \overline{xy}$$

によって new product $*$ を導入すると，この積 $*$ で $\lambda\lambda = \overline{\lambda}$ は $\lambda * \lambda = \lambda$ と表せます.

Remark　$(\sqrt{<\lambda, \lambda>})^2 = \| \lambda \|^2 = \lambda\overline{\lambda}$ なので，勿論 $x * \overline{x} = \overline{x}x = < x, x >$ です.
$\tilde{Q}(N(p,q,r)) \ni \lambda$ が invertible $_{iff} <=> \| \lambda \| \neq 0.$
実際

$$\lambda \frac{\overline{\lambda}}{<\lambda, \lambda>} = 1 \text{ if } \ <\lambda, \lambda> \neq 0$$

より λ は invertible です. 更に $\lambda^2 = \overline{\lambda}$ より $\| \lambda^2 \| = \| \lambda \|$ かつ $\| \lambda \| \neq 0$ ならば, $\| xy \| = \| x \| \| y \|$ が $\forall x, y \in \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ において成り立つので，$\| \lambda \|^2 = \| \lambda \| \| \lambda \|$ から $\| \lambda \|^2 = \| \lambda \| \in \mathbf{Z}_p$. $\| \lambda \| \neq 0$ のとき,

$$\| \lambda \| = 1.$$

以上より，λ が invertible, かつ $\lambda^2 = \overline{\lambda}$ のとき，ノルム 1 の元で，$\tilde{Q}(N(p,q,r))$ を考えることが可能です. ここで，λ が 0 でなくても $\| \lambda \| = 0$ となるノルム 0 の元 λ が存在することに留意して下さい（内積 $<\ ,\ >$ が非退化とは限りません）.

$$\tilde{Q}(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]) = \{\lambda \in \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}] | \lambda * \lambda = \lambda,\ \lambda \text{ is invertible}\}$$

とおき，weak quandle と呼ぶ. これを $\tilde{Q}$ と表す. この $\tilde{Q}$ を用いて，$Q_\lambda = \{\lambda \in \tilde{Q} | 1, \lambda, \overline{\lambda}\}$ と置くと次のことが成立する.

定理 2（カンドルの構成）　$\tilde{Q}$ が weak quandle のとき, Q_λ はカンドルであり, この $\tilde{Q}$ は更に次の様に表示できます

$$\tilde{Q} = \cup_{\lambda*\lambda=\lambda} Q_\lambda \ (Q_\lambda \text{の和集合}).$$

詳しい証明は略しますが，$1 * \lambda = \overline{\lambda}, \overline{\lambda} * \overline{\lambda} = \lambda \cdot \lambda = \overline{\lambda}$ 等を用います.

Remark　For the product $x * y$, note that $< x * y, z > = < x, y * z >$ and $< x * y, x * y > = < x, x >< y, y >$.

ここでは体 F 上の代数 A(単位元 1 をもたない場合も仮定する) が 2 次代数 (quadratic algebra) とは　$\forall x \in A$ に対して　$ax^2 + bx + c = 0$ となる $a = b = c = 0$ 以外の　$a, b, c \in F$ が存在するときと定義する. (単位元をもつときは $1, x, x^2$ が１次従属です).

Remark　単位元を持たない 2 次代数を変形した代数 $(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}], *)$ の考察であり，そして特に $\tilde{Q}$ の乗法$*$ は非結合的 (nonassociative) です．つまり $(x*y)*z \neq x*(y*z)$ となり，standard product の記号で表すと,

$$\overline{(\overline{xy})z} \neq \overline{x(\overline{yz})}$$

を意味するので，非結合的乗法$*$ を持つ代数系です（ここで $^-$ は共役です）.

以上より共役をもつこの様な代数系が weak カンドルの例になると考えます.

{ ノルム１かつ巾等元 (idenpotent) がカンドルを生成します }.

§3.Examples（実例について）

$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ において，特に素数 p が小さい時の weak quandle の例を以下に列挙します.

$\mathbf{Z}_5[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$;　$\lambda * \lambda = \lambda$ の元.
$(m, n, l) : \lambda = m + n\sqrt{q} + l\sqrt{r}$ とおく.

(1,0,0)
(2,0,1),　(2,0,4).
(2,1,2),　(2,1,4),
(2,2,0),　(2,2,2)
(2,3,0),　(2,3,3)
(2,4,1)　(2,4,3)

これらは 11 個存在します．$\lambda = 2+\sqrt{3}$ のとき $\overline{\lambda} = 2+4\sqrt{3}$ です．記号で表すと $N(\tilde{Q}) = 11$.

・standard product では $\lambda\lambda = \overline{\lambda}$ を満たします.

$\| \lambda \| = 1$ の元の個数は 30 個．つまり $a^5 = 1,\ b^6 = 1$ の元の積が $\| \lambda \| = 1$ を満たします．従って $\mathbf{Z}_5[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ においては，weak quandle $\tilde{Q}$ を具体的に求められます.

$$
\begin{array}{ll}
\lambda = 2+\sqrt{3}\text{のとき} & Q_\lambda = \{1, \lambda, \overline{\lambda}\} \\
\mu = 2+2\sqrt{2}\text{のとき} & Q_\mu = \{1, \mu, \overline{\mu}\} \\
\nu = 2+\sqrt{2}+2\sqrt{3}\text{のとき} & Q_\nu = \{1, \nu, \overline{\nu}\} \\
\kappa = 2+\sqrt{2}+4\sqrt{3}\text{のとき} & Q_\kappa = \{1, \kappa, \overline{\kappa}\} \\
\xi = 2+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}\text{のとき} & Q_\xi = \{1, \xi, \overline{\xi}\}.
\end{array}
$$

これらの $Q_\lambda, Q_\mu, Q_\nu, Q_\kappa, Q_\xi$ がそれぞれ quandle であり，weak quandle $\tilde{Q}$ は $\tilde{Q} = Q_\lambda \cup Q_\mu \cup Q_\nu \cup Q_\kappa \cup Q_\xi$ （$\tilde{Q}$ は 11 個の要素の集合）です．$Q_\lambda, \cdots, Q_\xi$ 達の共通集合は $\{1\}$ のみです.

$$(2+\sqrt{3}) * (2+2\sqrt{2}) = \overline{1+4\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{2}+3\sqrt{3} \notin \tilde{Q}\text{です.}$$

$*$ の積で $\tilde{Q}$ は閉じていません.

$\mathbf{Z}_{11}[\sqrt{7}, \sqrt{8}]$;　　$\lambda * \lambda = \lambda$ の元.

(m, n, l) :

(1,0,0),	(5,0,5),	(5,0,6)	(5,1,9),
(5,1,10)	(5,2,2),	(5,2,3),	(5,3,6),
(5,3,7),	(5,4,0),	(5,4,10),	(5,5,3),
(5,5,4),	(5,6,7),	(5,6,8),	(5,7,0)
(5,7,1),	(5.8.4),	(5,8,5),	(5,9,8)
(5,9,9),	(5,10,1),	(5,10,2)	

これらは 23 個存在します．$N(\tilde{Q}) = 23$ です

$\| \lambda \| = 1$ の元の個数は 132 個．$a^{11} = 1,\ b^{12} = 1$ の元の積が $\| \lambda \| = 1$ を満たします.

$\mathbf{Z}_{17}[\sqrt{5}, \sqrt{7}]$;　　$\lambda * \lambda = \lambda$ の元.

(m,n,l)):

(1,0,0),	(8,0,3),	(8,0,14),
(8,1,9),	(8,1,15),	(8,2,4),
(8,2,10),	(8,3,5),	(8,3,16),
(8,4,0),	(8,4,11),	(8,5,6),
(8,5,12),	(8,6,1),	(8,6,7),
(8,7,2),	(8,7,13),	(8,8,8),
(8,8,14),	(8,9,3),	(8,9,9),
(8,10,4),	(8,10,15),	(8,11,10),
(8,11,16),	(8,12,5),	(8,12,11),
(8,13,0),	(8,13,6),	(8,14,1),
(8,14,12),	(8,15,7),	(8,15,13),
(8,16,2),	(8,16,8)	

これらは 35 個存在します．$N(\tilde{Q})=35$

$\parallel \lambda \parallel = 1$ の元の個数は 306 個．$a^{17}=1,\ b^{18}=1$ の元の積が $\parallel \lambda \parallel = 1$ を満たします.

Remark　$\mathbf{Z}_{19}[\sqrt{7},\sqrt{11}]$ について，$\parallel \lambda \parallel = 1$ なる元については $a^{18}=1,\ b^{19}=1$ なる元の積が λ の元です．そして $\lambda*\lambda=\lambda$ の個数は 39 です．$N(\tilde{Q})=39$, 別の例として $\mathbf{Z}_{19}[\sqrt{3},\sqrt{13}]$ では $\lambda*\lambda=\lambda$ の元は 1 個．$\parallel \lambda \parallel = 1$ の元は 19×20 個です.

Remark　$\mathbf{Z}_7[\sqrt{3},\sqrt{5}]$ においては $\parallel \lambda \parallel = 1$ の元は 56 個ですが，$\lambda*\lambda=\lambda$ の元は 1 個です．$\lambda=1$ のみです.

Remark　上記の方法で，$2p+1$ 個の元をもつ weak カンドルが構成できると思います.

Remark　$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]$ の p,q,r の選び方により，$\lambda*\lambda=\lambda$ の元は 1 個の場合も存在します.

Remark　2 次代数の例の $\mathbf{Z}_3[\sqrt{2}]$, $\mathbf{Z}_5[\sqrt{2}]$ 等における $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ が体の $\lambda*\lambda=\lambda$ なる元は多くても 3 個です．従ってカンドルの例としてはあまり興味が持てませんので省略します.

しかし少しだけ述べますと，2 次代数 $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}](p\neq 2)$ $0<q<p$ については

(a)　$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ が体

$_{iff} \Longleftrightarrow$ ノルム 1 の元の個数が $p+1$ 個

(b)　$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ が体でない

$_{iff} \Longleftrightarrow$ ノルム 1 の元の個数が $p-1$ 個

a) のとき，$p+1$ が 3 の倍数ならば，$\lambda\lambda = \overline{\lambda}$ の元の $\lambda(\neq 1)$ が存在する．この時，$Aut_*\mathbf{Z}[\sqrt{q}] \cong S_3$ （ただし $x*y$ の積で考察). i.e., $g(x*y) = g(x)*g(y)$ なる自己同型群が 3 次の対称群を生成します．$\{1, \lambda, \overline{\lambda}\}$ なる set における automorphism が重要なのです．

$p+1$ が 3 の倍数でない時 $Aut_*\mathbf{Z}[\sqrt{q}] \cong \mathbf{Z}_2$.

b) のとき，$p-1$ が 3 の倍数ならば，$\lambda\lambda = \overline{\lambda}$ の元の $\lambda \neq 1$ が存在する．a) の時と同様に b) の時も自己同型が存在します．つまり $Aut_*\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}] =\cong S_3$ 又は $p-1$ が 3 の倍数でない時 $\mathbf{Z}_2$ です．

以上の $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ の結果は unpublished paper (in preprint [2017] 筑波大学の増岡彰氏との共同研究) ですが，解明しました（勿論, 平方剰余の概念を用いない方法によってです）．ここに記録の為に記しておきます．

例　$\mathbf{Z}_7[\sqrt{2}]$ は体でなく、$x*y = \overline{xy}$ による積で $1*x = \overline{x}$ となり単位元が存在しない、$< 1+2\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2} >= 0$ なる非結合的な代数系です (不思議な性質を持ちます).

Remark　$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ における $\lambda*\lambda = \lambda$ の元の性質と $\parallel \lambda \parallel = 1$ なる元の個数についても，予想が可能です．ここでは議論に深入りせず，quandle の例が new product のもとで与えられることだけを述べたいと思います．

Remark.　$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ において $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ と $\mathbf{Z}_p[\sqrt{r}]$ の両方が体でない必要十分条件は $\parallel \lambda \parallel = 1$ の元の個数が $p(p-1)$ である．どちらかが　体のときは $p(p+1)$ である，（このような予想が成り立つと考えます）．

この章の最後に結果だけですが triality group (三対群)（ 定義は 5 章参照）を考えと, p *and* q に依存して $Trig_*(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]) \simeq S_4$ or *a subgroup of* S_4 となります.

§4. Generalizations（一般化について）

前節までに $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ における quandle の例を述べましたが，そこでの idea は，次の様に一般化できると考えます．

(A, xy) を単位元 1 をもつ associative, commutative, involutive ($\overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$) algebra とする．ここで $x*y = \overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}$ で new product を定義する．A はベクトル空間としては同じですが，代数構造が異なる xy と $x*y$ の積が存在します．そ

して $1*x=\overline{1x}=\overline{x}$ であり，単位元を持たない非結合的代数です．この 1 は para unit と呼ばれるものです．

$$\tilde{Q}(A) := \{x \in A | x * x = x,\ x \text{ is } invertible\}$$

と定義すると，$\tilde{Q}(A)$ は weak quandle の構造を持つ．ただし，$x*y$ は非結合的な乗法 $*$ を持つ代数系です（正確には $x*y \in \tilde{Q}(A)$ とは限りません）．この様な $\tilde{Q}(A)$ を研究するのも，将来への課題です．つまり weak カンドルの実例を与えると考えます（巾等元の構造を調べる）．$N(\tilde{Q}) := the\ number\ of\ \{\lambda|\lambda*\lambda=\lambda\}$ ($\tilde{Q}$ の元 λ の個数) を調べる．

Let B be a commutative associtative algebra with a binary product xy.

$$\tilde{Q}(B) = \{\lambda \in B|\ \lambda\lambda = \lambda, \lambda \text{ is invertivle}\}$$

$$Q(B) = \{\kappa \in \tilde{Q}(B) | \kappa = \mu\nu,\ {}^\forall\mu, \nu \in \tilde{Q}(B)\}\ \text{(乗法で閉じている為の条件)}$$

$$S_x y = xy\ \forall x, y \in Q(B)$$

と定義する．この時 ${}^\forall x, y \in Q(B)$ に対して $S_x x = x,\ S_x S_y = S_{S_x y} S_x$ が成り立つ．S_x が自己同型、つまり $Q(B)$ は s-set，$\{S_x\}$ は s-map．カンドルの例です．ただし $\tilde{Q}(B)$ は一般に閉じていない可能性があります．

別の視座からもう少し述べます．単位元を必ずしも持たない代数系として $x*y$ を乗法とする．ここでは $<x,y>$ の非退化は仮定していません．

$\odot$ $(x*y)*x = x*(y*x) = <x,x>y$ （called quasi symmmetric composition algebra)

$\odot$ $\| x*y \| = \| x \| \| y \|$ (called pre composition algebra)

$\odot$ involution $\overline{x*y} = \overline{y}*\overline{x}$ を持ち，$x*\overline{x}, x+\overline{x} \in$ base field,
$x, x*x, 1$(para unit) が 1 次従属なもの，つまり

$$x*x-(x+\overline{x})*x+x*\overline{x}=0$$

なる関係式を満たす（これを para quadratic algebra と呼ぶ）．

この様な 3 種類の非結合的代数系が考えられると思います（乗法の単位元を持たない代数系）ただし $<x,y>$ は非退化とは限りませんし，$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}], \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$, $\mathbf{Z}_p[i,j,k], \mathbf{Z}_p[e_1, \cdots, e_7]$ （有限体上の 2 次元，3 次元、4 次元，8 次元代数）が，これらの実例です．将来の研究課題です．究極としては Meson と Baryon の特徴ずけに現れる Gell- Mann ((1929-2019), quark 理論のノーベル賞受賞者）の 8 次元代数 (pseudo octonion algebra or symmetric composition algebra, Lie admissible algebra) の $\mathbf{Z}_p$ 上での研究です (数理物理学との関連が期待可能です. 有限体上の素粒子模型ーー大袈裟ですが). これらの代数系で三対関係（三対群、三対原理）を考察したいのです.

It emphasizes that concept of a local triality relation (triality derivation) in this paper is a generalization of "principle of triality" due to J. Tits. (c.f. §5)

§5.Applications（応用）

Let (M, S_x) be a s-set with s-map S_x defined in section one (i.e.,satisfying (3) and (4)).

We shall now define an endomorphism $g \in Epi(M, S_x)$ as follows;

$$gS_x = S_{gx}g.$$

Then it is said to be a s-automorphism on (M, S_x).

Ex. s-map $\{S_x\}$ is a s-automorphism, because $S_xS_y = S_{S_xy}S_x$.

Ex. Let (G, xy) be a group. We set $S_xy = (xy)x^{-1}$, then (G, S_x) is a s-automorphism.

Ex. Let $(G, \eta(x, y, z))$ be a homogeneous presystem. Then by $\eta(a, b)c := \eta(a, b, c), \eta(a, a)$ is a s-automorphism on G, because

$$\eta(a, a, \eta(x, x, z)) = S_a\eta(x, x, z) = S_aS_xz = \eta(\eta(a, a, x), \eta(a, a, x), \eta(a, a, z)) = S_{S_ax}S_az,$$

where

$$\eta(a, a, z) = S_az.$$

Ex.(counter example) Following ([K-S.1]), we recall a quasi group (Q_5, xy) with the following multible table;

	0	1	2	3	4
0	4	3	2	1	0
1	3	1	0	2	4
2	0	2	3	4	1
3	1	0	4	3	2
4	2	4	1	0	3

$01=3,\ 10=3,\ 23=4,\ 32=4,\ 04=0,\ 40=2$, etc., and x^{-1} is an element y satisfying $xy=yx=1$ for any $x\in Q_5$. Then we can define

$$s_x y=(xy)x^{-1}$$

however, this s_x is not the s-map, i.e., (M,s_x) is not the s-set.

In final comments, we describe only the results.

$$Aut_*(Q_\lambda(\mathbf{Z}_5[\sqrt{2},\sqrt{3}]))\cong S_3\ (\text{if } \lambda=2+\sqrt{3})$$

$$Aut_*(Q_\lambda(\mathbf{Z}_7[\sqrt{3},\sqrt{5}]))\cong<Id>\ \ (\lambda*\lambda=\lambda \text{ is only } \lambda=1).$$

Indeed, general speaking, these mean that

$$g(x*y)=(g(x))*(g(y))$$

for any element

$$g\in Aut_*(Q_\lambda(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}])),$$

where

$$s_x y=x*y,\ ^\forall x,y\in Q_\lambda(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]).$$

Remark If $N(Q_\lambda)\neq 1\Longrightarrow Aut_*Q_\lambda\cong S_3$.

The details will deal with future study and so for the complex number, we will induce a concept of triality group as a generalization of automorphisms of these subjects.

以下は我々が何を考えているかの簡単な動機の実例です.

($\sharp$) 複素数体 $\mathbf{C}$ の場合: （$\lambda*\lambda=\lambda$ の例）**-new product の導入-**

$x*y=\overline{xy}$,(new product) を考える. ここで xy は複素数 $\mathbf{C}$ の standard product, and $\overline{x}$ の共役によって定義される new product $*$ を考えます. $\mathbf{C}$ を $re^{i\theta}$ で考察.

$\theta=\frac{2}{3}\pi$ とするとき, 周期 2π で $-\frac{4}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi$ と同一視します、$e^{i\theta}$ の共役元は $e^{-i\theta}$ より,

$$e^{\frac{2}{3}\pi i}=e^{\frac{2}{3}\pi i}*e^{\frac{2}{3}\pi i}(\text{周期 } 2\pi),\ \text{を用いて}$$

$$e^{i\theta}=e^{i\theta}*e^{i\theta},\ e^{i\theta}(x*y)=(e^{i\theta}x)*(e^{i\theta}y),\ ^\forall x,y\in\mathbf{C},\ i=\sqrt{-1}.$$

つまり $e^{i\theta}(=g)$ が $*$ の乗法で自己同型です. 記号で書くと, $g(x*y)=(gx)*(gy)$ が成り立ちます. 又 $\frac{2}{3}\pi i(x*y)=(\frac{2}{3}\pi ix)*y+x*(\frac{2}{3}\pi iy)$ が成り立ちますので,

これは $\frac{2}{3}\pi i$ が $(\mathbf{C},*)$ の微分を意味します（周期 2π で考えます）. $\frac{2}{3}\pi i$ の共役は $-\frac{2}{3}\pi i$ を用います.

$$e^{i\theta} \longleftrightarrow i\theta\ (\theta = \frac{2}{3}\pi)$$

なる glogal $\longleftrightarrow$ local 対応を示しています．つまり次の対応が成り立ちます.

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{C},*) \cong S_3 \text{ (symmetric group of order 3)}$$

$$i.e.,\ g(x*y) = (gx)*(gy),\ g\ is\ an\ automorphism,$$

$$\text{global relation} \longleftrightarrow \text{local relation}$$

$$\mathrm{Der}(\mathbf{C},*) = \{d \in \mathrm{End}\ \mathbf{C} | d = (\frac{2n}{3})\pi i,\ n : integer\}.$$

$$i.e.,\ d(x*y) = (dx)*y + x*(dy), the\ definition\ of\ derivation.$$

これらの一般化として triality group （自己同型群の拡張概念, 三対群）を考察したいのです．つまりコペルニクス的発想ですが，$xy = \overline{x*y}$ によって standard product を考えると，自己同型写像 g が $x*y$ の積で $g(x*y) = g(x)*g(y)$ として成り立つようなことが可能な代数系を探求するのが目標です．そして $g_j(x*y) = (g_{j+1}x)*(g_{j+2}y),\ j = 0,1,2$ なる g_j を決定したい。local and global triality relations for algebras を考察するのが目標です。実数の場合は K_4(Klein's four group), 複素数の場合は 2 次元の無限群です。実際, $g_j(1) = \alpha_j$ とおくと $\alpha_j = \alpha_{j+1}\alpha_{j+2}$ より $\alpha_j = exp(\sqrt{-1}\theta_j)$ and $\theta_j + \theta_{j+1} + \theta_{j+2} = 0$ が成り立ちます．つまり $(\alpha_j, \alpha_{j+1}, \alpha_{j+2}) \in Trig\ \mathbf{C}$, this means the triality group of $\mathbf{C}$.

($\sharp\sharp$) 行列代数 $A := Mat(n;F)$ の場合: $x*y = {}^t(xy)$ とおく, 右辺は行列の standard product xy and ${}^tx$ は x の転置行列. Then we introduce $g_j(x) = a_j x^t a_{j+1}$ $(j = 0,1,3)$, where a_j is any element of orthogonal matrix group $O(n,F) = \{a_j | a_j^t a_j = Id_n\}$. Hence we obtain $g_j(x*y) = g_{j+1}(x)*g_{j+2}(y)$. On the other hand, we put $P_j = (1-a_j)(1+a_j)^{-1}$ (Cayley transformation), then we have $P_j(x*y) = (P_{j+1}x)*y + x*(P_{j+2}y)$, P_j は交代行列.

($\sharp\sharp\sharp$) Tits の三対原理; The Cayley algebra $\mathbf{O}$ has a triality derivation $(d_j, d_{j+1}, d_{j+2}) \in (D_4, D_4, D_4)$, where D_4 is the simple Lie algebra with dim 28, satisfying $d_j(xy) = (d_{j+1}x)y + x(d_{j+2}y), \forall x,y \in \mathbf{O}$, and $< d_jx, y > + < x, d_jy >= 0$. Furthermore, we obtain $D := d_0 + d_1 + d_2$ is a derivation of $\mathbf{O}$ and $< D >_{span} \cong G_2$ (G_2 is the simple Lie algebra with dim 14).

§6. Conclusions and References（あとがきと文献）

この小論では予備知識をほとんど仮定しませんので，引用文献は多くは挙げません．ここで述べた $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q},\sqrt{r}]$ 等の 2 次代数は，[K-O] での symmetric composition algebra
$(<xy|xy>=<x|x><y|y>)$ の variation (ある種の一般化）です．内積 $<,>$ が非退化でない場合で考えています．$\mathbf{Z}_p$ 上，$(xy)x=x(yx)=<x,x>y$ を満たす代数系も考えられます．この algebra の性質，$\| xy \| = \| x \| \| y \|$ (つまり $<x,x>=\| x \|^2$ の定義のもとで) なる関係式を満たす代数系と，Cayley algebra の三対原理の一般化の三対関係 (triality of groups and derivations) については，次の文献が役に立つと思います.

[K-O]; N.Kamiya and S.Okubo, Algebras and groups satisfying triality relations, Monograph (Book), Aizu Univ., (2015),Arxiv.1503.00614, Arxiv.1609.05892. （標数 0 の体上の代数系での研究）．ここでの文献リストには大久保氏との共同著者として三項系代数とリー（超）代数の構成に関する論文が多数あります.

又，次の文献も quandles の応用として役に立つかも知れませんので挙げておきます.

[K-S.1]; N.Kamiya and Y.Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps associated with homogeneous presystems, J. Gen. Lie theory App. **5**, (2011) Art ID,G110116.

[K-S.2]; N.Kamiya and Y.Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps and weak Hopf algebras associated with quandles, Proc.of the meeting for study of Number theory, Hopf algebras and related topics, 2019, p1-23, (Yokohama Publisher) 収録論文．この論文はカンドルとヤング・バクスター方程式に関連した論文です. これ以外にも大久保氏と筆者との共同研究による三項系代数 (triple systems) からの Yang-Baxter equations の構成に関するいくつかの論文が存在します.

一方, 話題が異なりますが超弦理論と三項系に関する数理物理学の共同研究が佐藤松夫氏（弘前大学）と数編存在します.

[K-M]: N.Kamiya and D.Mondoc, A construction of Lie (super) algebras and (ε,δ) Freudenthal-Kantor triple systems defined by bilinear forms, (2020), J. Alg. and its applications, doi./10.1142/ S0219498820502230. 最近の上記の論文 [K-M] は三項系代数からリー超代数の構成が可能な数理物理学に応用を持つ, ルート系によらない素粒子論の特徴ずけが期待されると考えます．この分野の研究はそこでの引用文献を参照ください.

数学史的側面の立場から視ますと，非結合的代数系 + 数理物理学 + 計算機科学 = knot theory, mathematical physics, differential geometry, etc.,（他分野への応用）．この様な融合的分野が将来いつか芽生える発端になればと思い，歴史の一コマとしてここに記述させていただきましたことを御寛容ください．又，定義のところ等で，独自の記号等そして英語と日本語がミックスした文章になりましたこと，更に各分野の人達にとり，見やすくしたつもりがかえって筆者の未熟の為，混乱させたかもしれません．再度不束な文体，お許しください．数理代数学と呼ぶべき黎明期の時代が来ていると思います.

§7. Appendix (付録). Definitions of $\mathbf{Z}_p[i,j,k]$ and $\mathbf{Z}_p[e_1,\cdots,e_7]$ （乗積表）と予想

有限体 $\mathbf{Z}_p$ 上の８次元の Cayley algebra (and Hamilton number) の乗積表を与えます.[1]

$\mathbf{Z}_p[e_1,\cdots,e_7]$ の Table;

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	e_7	$-e_6$
e_2	$-e_3$	-1	e_1	$-e_6$	e_7	e_4	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	e_6	$-e_5$	$-e_4$
e_4	$-e_3$	e_6	$-e_7$	-1	e_1	$-e_2$	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	$-e_6$	$-e_1$	-1	e_3	e_2
e_6	$-e_7$	$-e_4$	e_5	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_7	e_6	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	$-e_1$	-1

(体 $\mathbf{Z}_p$ 上の standard product xy で定義）．　そして new product $*$ を考える.

$$x * y = \overline{xy} \text{ (new product)}$$

$$x = e_0 + \sum_{i=1}^{7} e_i,\ \overline{x} = e_0 - \sum_{i=1}^{7} e_i \text{ (standard involution)}$$

$e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k$ in $\mathbf{Z}_p[i,j,k]$(*called a quasi quaternion*), $e_0 = 1$ は省略 (in table)，$\mathbf{Z}_p[e_1,\cdots,e_7]$ を *a quasi octonion* と呼ぶ．内積は $< x, y >= (x\bar{y}+y\bar{x})/2$, 積は例えば $e_3e_1 = e_2, e_3 * e_1 = \overline{e_3e_1} = -e_2, e_6e_7 = e_1, e_6 * e_7 = \overline{e_6e_7} = -e_1$ 等．つ

[1] 4 元数, 8 元数の定義を Zorn's vector matrix で表記する方法も存在しますがこの乗積表 (table) で定義させていただきます.

まり For the standard product $xy, < e_0, e_1, e_2, e_3 >_{gen}$ が 4 元数の場合です．But for the product $x * y$, $(e_1 * e_2) * e_3 \neq e_1 * (e_2 * e_3)$ and $(e_1 * e_2) * e_1 = e_2$ 等面白い性質をもちます.

カンドルの例を具体的に多数見つけることが応用面に役立つ存在だと考えています.

予想

- $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ に関して $qr \equiv 1 (mod\ p)$，q, r は平方数でない.

a) ノルム 1 の元の個数が $p(p+1)$．$\Longleftrightarrow_{iff}$ $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ 又は $\mathbf{Z}_p[\sqrt{r}]$ が体.

b) ノルム 1 の元の個数が $p(p-1)$．$\Longleftrightarrow_{iff}$ $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ かつ $\mathbf{Z}_p[\sqrt{r}]$ の両方が体でない.

a) の時 $p+1$ が 3 の倍数又は b) の時 $p-1$ が 3 の倍数 $\Rightarrow N(\tilde{Q}) = 2p+1$，これ以外は $N(\tilde{Q}) = 1$, ただし $N(\tilde{Q})$ は weak quandle の個数.

- $\mathbf{Z}_p[i, j, k]$ のノルム 1 の元の個数は $p^3 - p$ そして $N(\tilde{Q}) = 3p$
- $\mathbf{Z}_p[e_1, \cdots, e_7]$ のノルム 1 の元の個数は $p^7 - p^3$

そして $N(\tilde{Q}) = p^6 + (1 - \delta_{p,3})(-1)^{\frac{p+1}{2}}(p^3 + (-1)^{\frac{p+1}{2}})$, $\delta_{p,3}$ はクロネッカーの *delta*.

- $N(\tilde{Q}) > 1 \Rightarrow Aut_* Q_\lambda \cong S_3$. ($*$ の積のもとでの Q_λ の自己同型群は 3 次の対称群).

筆者には以上の予想が解決されていて既知なのかわかりませんが述べさせていただきます（非結合的代数系の立場での話です）．$\mathbf{Z}_3[e_1, \cdots, e_7]$ における $\lambda * \lambda = \lambda$ の元の一例は $1 + e_1 + e_2 + e_3$ であり，$\mathbf{Z}_5[e_1, \cdots, e_7]$ における $\lambda * \lambda = \lambda$ の元の一例は $2 + e_1 + e_2$ であり，$\mathbf{Z}_7[e_1, \cdots, e_7]$ における $\lambda * \lambda = \lambda$ の元の一例は $3 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6$ です.

手計算の結果なので再考・改良しなければならない点多々存在すると思いますが，先駆的な研究としての予想としてお許し下さい．そして ”智者の千慮にも必ず一失があり，　愚者の千慮にも一得が存在する ” ということわざのように読者がこの Note より有益な知見をすくいとって下さらんことを願います.

最後に，$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ に関して堀田修功君（神奈川大学理学部情報科学科大学院生（2018 年当時））に計算機科学の方法により，$\lambda * \lambda = \lambda$ の元を求めることの recheck をして頂いたことに感謝の意を表したいと思います.

何故 $\lambda * \lambda = \lambda$ を考えるのかは g が自己同型写像ならば $\lambda = g(1)$ とおくと $g(1) = g(1) * g(1)$ が必要条件だからです．この様な g の考察のためです.

Current address;
Noriaki Kamiya
CHIGASAKI CITY, CHIGASAKI 1-2-47-201 JAPAN, 253-0041
e-mail; shigekamiya@outlook.jp

[書評]

リッカチのひ・み・つ
解ける微分方程式の理由を探る
井ノ口順一, 日本評論社, 2018

河 本 直 紀

1　はじめに

本書は常微分方程式と群の作用との関連についての入門書で，日本語では他に類の無い貴重な１冊である．より詳しく述べると，微分方程式が解けるか解けないか（解が積分を用いて表されるか否か），という問題を対称性（群の作用）の観点から，いくつかの初等的な常微分方程式について考えていて，S. Lie から始まる微分方程式の代数的な取扱いの一端をやさしく紹介している．

初出は数学セミナー 2008 年 4 月号～2009 年 3 月号の 12 回の連載記事で，それに加筆修正を施したものである．著者によれば,「高等学校で微分積分学を学んだ読者のための」,「微分方程式から始める」「幾何学的思考力を養う入門コース」を提供することが目的とある．記述は初学者を意識した親切で丁寧なもので，計算例等も詳しく書かれている．ただし，実際に本書を読み進むには大学初年級程度の微分，積分，行列，行列式，等々の計算力が必要と思われる．なお，各章末には参考文献の詳しい紹介もあって，さらに詳しく知りたい読者へのよき道案内となっている．

ここでは主としてリッカチ方程式に関連する部分を取り上げて本書の概要を紹介するとともに感想も述べたい．なお，定理や式の番号は本書のものによるが，用語，記号，記述については一部変更したところもあることをお断りしておく．

2　本書の目次

内容を概観するために次に目次を挙げておく．ただし各章の中の節については行数が増えるので省略した．

はじめに
対称性とはなんだろうか
記号表
第１章　常微分方程式
第２章　射影変換と複比
第３章　行列の指数函数
第４章　１径数群
第５章　ベクトル場
第６章　流れ
第７章　完全微分方程式
第８章　１径数変換群の不変函数
第９章　リーの定理
第１０章　射影変換とベクトル場
第１１章　リッカチ方程式の解けるひみつ
第１２章　リウヴィル方程式
第１３章　KdV 方程式
付録 A　微分学
付録 B　リッカチの方程式
付録 C　微分ガロア理論の一例
付録 D　微分形式
演習問題の略解
章末問題の略解
参考文献
あとがき
索引

3　扱う微分方程式（第１章）

次のような初等的な常微分方程式について，微分方程式が解けるか解けないか（解が積分を用いて表されるか否か）を考える．なお，本書では t を独立変数としている．

解ける微分方程式．

$\dot{x}(t) = \alpha(t)$　　（不定積分）

$\dot{x}(t) = \beta(t)x(t)$　　（変数分離形）

$\dot{x}(t) = \alpha(t) + \beta(t)x(t)$　　（1 階線形）

解けるとは限らない微分方程式.

$\dot{x}(t) = \alpha(t) + 2\beta(t)x(t) + \gamma(t)x(t)^2$ （リッカチ方程式）

本書ではこれらが並列的に扱われて対比されるが，以後は主としてリッカチ方程式に限って紹介することとする.

なお，ここで注意しておくと，リッカチ方程式

$$\dot{x}(t) = \alpha(t) + 2\beta(t)x(t) + \gamma(t)x(t)^2$$

は一次分数変換とのつながりが深く，変換

$$y(t) = T_A(x(t)) = \frac{ax(t)+b}{cx(t)+d}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ |A| \neq 0$$

によりまた（別の）リッカチ方程式が得られる.

4 元祖リッカチ方程式（付録 B）

本書の記述の順番とは異なるが，まず元々のリッカチ方程式について見ておく．歴史的には 1724 年， J. F. Riccati と D. Bernoulli が独立に次の微分方程式を考察したのが始まりである.

$$\dot{x}(t) + ax(t)^2 = bt^m \quad a, b, m \in \mathbb{R} \tag{B.2}$$

この方程式には解ける場合がある．$a = 0$ または $b = 0$ のときは明らか. $a, b \neq 0$ とする．$m = 0$ のとき.

$$\dot{x}(t) = b - ax(t)^2$$

これは変数分離形となり解ける．次に，$m \neq 0$ のとき.

$$x(t) = \frac{y(t)}{t^2} + \frac{1}{at}$$

とおくと $y(t)$ について

$$\dot{y}(t) + \frac{a}{t^2}y(t)^2 = bt^{m+2} \tag{B.3}$$

ここで $m=-2$ のときは

$$\dot{y}(t)+a\left(\frac{y(t)}{t}\right)^2=b$$

となり，同次形なので解ける．よって $x(t)$ が求まる．

$m\neq -2,\ m\neq -3$ とする．

$$t_1=t^{m+3},\quad x_1=\frac{1}{y}$$

とおくと

$$\frac{dx_1}{dt_1}(t_1)+a_1x_1(t_1)^2=b_1t_1^{m_1},\quad m_1=-\frac{m+4}{m+3} \tag{B.5}$$

となり元の式 (B.2) と同じ形である．よって上から $m_1=0,-2$ (それぞれ $m=-4,-2$) のとき解ける．これを繰り返すと

$$\frac{dx_k}{dt_k}(t_k)+a_kx_k(t_k)^2=b_kt_k^{m_k},\quad m_k=-\frac{m_{k-1}+4}{m_{k-1}+3} \tag{B.7}$$

となる．よって $m_k=0,-2$ のとき解ける．

$$m_k=-\frac{(2k-1)m+4k}{km+(2k+1)}$$

となることより

$$m=\frac{4k}{1-2k},\quad k=0,1,2,...$$

のとき元の式は求積できる．さらに $k=-1,-2,...$ のときも求積できる．ただし，k が負の場合の記述は詳しくはない．

5　一般のリッカチ方程式（第１章，第２章）

リッカチ方程式の特性として特殊解が一つ求まれば一般解が求まるということがある．これは次のようにして示される．

$$\dot{x}(t)=\alpha(t)+2\beta(t)x(t)+\gamma(t)x(t)^2 \tag{1.10}$$

の特殊解 $u(t)$ があるとする．

$$x(t) = u(t) + \frac{1}{v(t)}$$

と置いて代入すると $v(t)$ に関する微分方程式

$$\dot{v}(t) = -2(\beta(t) + \gamma(t)u(t))v(t) - \gamma(t) \tag{1.11}$$

が得られる．これは非斉次線形方程式なので解ける．

$$v(t) = cr(t) + s(t), \quad c : 定数, \quad s(t) : 特殊解$$

すると

$$x(t) = u(t) + \frac{1}{v(t)} = \frac{p(t)c + q(t)}{r(t)c + s(t)} \tag{1.13}$$

ここで $A = (a_{ij}) \in \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ による一次分数変換を

$$T_A(x) = \frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}}$$

で表すと次が示される．

定理 2.8 $\mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ に値をもつ函数 $A(t)$ と定数 c で函数 $x(t)$ を

$$x(t) = T_{A(t)}(c)$$

で定義すると $x(t)$ はリッカチ方程式をみたす.

6　行列の指数関数（第３章，第４章）

2 次正方行列 $X = (x_{ij}) \in \mathrm{M}_2\mathbb{R}$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$$

が絶対収束 (ノルム収束) することから，行列の指数関数

$$e^X = \exp X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$$

が定義される．これより次が示される．

定理 3.12　常微分方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t) = A\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

の解で初期条件 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ をみたす解は $\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}_0$ で与えられ，しかもこれのみである．

行列の指数関数について次のような基本的な性質が示される．

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき $\exp(tE) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$

$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $\exp(tJ) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

$X, Y \in \mathrm{M}_2\mathbb{R}$ で $XY = YX$ ならば

$$\exp(X+Y) = \exp X \exp Y$$

$X \in \mathrm{M}_2\mathbb{R}$ ならば $\exp X$ は正則で

$$(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$$

$X \in \mathrm{M}_2\mathbb{R}$ ならば $|\exp X| = e^{\mathrm{tr}\ X}$

7　接ベクトル（第５章）

ここで接ベクトルが幾何的に導入される．この方法は直感的で分かりやすいものと思われる．

$\mathbb{R}^2$ の点 p を始点とするベクトル全体を

$$T_p\mathbb{R}^2 = \{\overrightarrow{pq} \mid q \in \mathbb{R}^2\}$$

とするとき $\overrightarrow{pq}$ を p における $\mathbb{R}^2$ の接ベクトルという．

$\mathbb{R}^2$ の点 p を含む領域を D とし，D 上の関数を f とする．$v_p \in T_p\mathbb{R}^2$ に対して

$$v_p(f) = \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}$$

が存在するとき $v_p(f)$ を f の v_p 方向微分係数という．

$e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)$ に対しては

$$(e_1)_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \quad (e_2)_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)$$

となるので

$$(e_i)_p(f) = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p f \qquad (i = 1,2)$$

とおく．$v = (v_1, v_2)$ に対しては

$$v_p(f) = \sum_i v_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p f$$

となる．

この後で写像としての微分作用素が定義されて次が示される．

定理 5.14 p における微分作用素 D は $D(f) = v_p(f)$ と表せる．

8　ベクトル場（第 5 章，第 6 章）

次にベクトル場が導入される．$p \in \mathbb{R}^2$ とする．写像 X が p に対し，p での接ベクトル X_p を対応させるとき，X を $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場という．ここで

$$(E_1)_p = (e_1)_p, \quad (E_2)_p = (e_2)_p$$

と置くと E_1, E_2 は $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場である．任意のベクトル場は $X = X_1E_1 + X_2E_2$ と表される．$\{X_1, X_2\}$ を X の成分という．$(E_i)_p = \left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ であるので

$$E_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$$

とも書く．これよりベクトル場は次のようにも表される．

$$X = X_1\partial_1 + X_2\partial_2$$

続いて，ベクトル場に関するいろいろな概念が導入される．

$$X = X_1\partial_1 + X_2\partial_2, \quad Y = Y_1\partial_1 + Y_2\partial_2$$

に対しスカラー場 $(X|Y) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ を次で定める．

$$(X|Y)_p = (X_p|Y_p) = X_1Y_1 + X_2Y_2$$

$\mathbb{R}^2$ の領域 D 上の滑らかな関数 f に対して，ベクトル場を次のように定める．

$$\text{勾配} \quad \mathrm{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\partial_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\partial_2$$

$X = X_1\partial_1 + X_2\partial_2$ に対し次のように定める．

$$\text{発散} \quad \mathrm{div}X = \frac{\partial}{\partial x_1}X_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}X_2$$

$$\text{渦度} \quad \mathrm{curl}X = \frac{\partial}{\partial x_1}X_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}X_1$$

なお，$\mathrm{curl}X = 0$ のとき渦無しという．

これらに関して次が示される．

定理 6.16 (ポアンカレの補題) $\mathbb{R}^2$ の長方形領域 R で定義された渦無しのベクトル場 X に対し $X = \mathrm{grad}f$ となる R 上の滑らかな函数 f が存在する．

このとき f を X のポテンシャルという．

9 完全微分方程式（第 7 章）

ここで微分方程式に話題を戻して次の式を考える．

$$X_1(x_1, x_2) + X_2(x_1, x_2)\frac{dx_2}{dx_1} = 0 \tag{7.1}$$

この解を $x_2 = f(x_1)$ とし，解の表す曲線を解曲線という．ここで解曲線の径数表示 $(x_1, x_2) = (x_1(t), x_2(t)) = \boldsymbol{x}(t)$ をとると $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{dx_2}{dt}\Big/\dfrac{dx_1}{dt}$ より

$$X_1(x_1(t), x_2(t))\frac{dx_1}{dt} + X_2(x_1(t), x_2(t))\frac{dx_2}{dt} = 0 \tag{7.2}$$

ここでベクトル場 X を

$$X = X_1(x_1(t), x_2(t))\partial_1 + X_2(x_1(t), x_2(t))\partial_2$$

として，微分方程式 (7.1) に対応するベクトル場という．すると

$$0 = X_1\frac{dx_1}{dt} + X_2\frac{dx_2}{dt} = (X_{\boldsymbol{x}(t)} \mid \boldsymbol{x}'(t)) \tag{7.3}$$

したがって解曲線は各点でベクトル場 X と (接線が) 直交する曲線である．

上のベクトル場 X がポテンシャル F をもつとする．このとき (7.1) を完全微分方程式という．$X = \mathrm{grad}F$ より (7.3) から

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}F(\boldsymbol{x}(t))$$

すなわち解曲線上で F の値は一定であることがわかる．$F = c$ として得られる曲線 $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x_1, x_2) = c\}$ を F の等位線という．よって次を得る．

定理 7.4　微分方程式 (7.1) において $X_1\partial_1 + X_2\partial_2$ がポテンシャルをもつとする．このとき (7.1) の解曲線はポテンシャルの等位線である．

微分方程式 (7.1) がポテンシャルをもつとき (7.1) を完全微分方程式という．

10　積分因子（第 7 章）

微分方程式 (7.1) は完全微分方程式でなくても，関数 $\mu(x_1, x_2)$ をかけた

$$\mu(x_1, x_2)X_1(x_1, x_2) + \mu(x_1, x_2)X_2(x_1, x_2)\frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

が完全微分方程式になることがある．このとき $\mu(x_1, x_2) \not\equiv 0$ を積分因子という．μ が積分因子のときポテンシャルを F，等位線を $\boldsymbol{x}(t)$ とすると

$$0 = \frac{d}{dt}F(\boldsymbol{x}(t)) = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} = \mu(x_1, x_2)(X_{\boldsymbol{x}(t)} \mid \boldsymbol{x}'(t))$$

ここで $\mu \not\equiv 0$ より $(X_{\boldsymbol{x}(t)} \mid \boldsymbol{x}'(t)) = 0$ となり F の等位線は (7.1) の解曲線を与える．すなわち，積分因子が求まれば微分方程式が解ける．

11　１径数変換群の不変関数・不変集合（第６章，第８章）

微分方程式の不変性を表すために必要な変換群が導入され，いくつかの定義と定理が準備される．

定義 6.5 写像 $\Phi(t) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (t \in \mathbb{R})$ が

$$\begin{aligned}&\Phi(t)\Phi(s)(\boldsymbol{u}) = \Phi(t+s)(\boldsymbol{u}) \quad (t, s \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2),\\ &\Phi(0)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \quad (\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2)\end{aligned}$$

をみたすとき $\Phi = \{\Phi(t) | t \in \mathbb{R}\}$ を $\mathbb{R}^2$ の１径数変換群とよぶ.

定義 8.5 実数 s に対し函数 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2)$ が

$$f(\Phi(s)\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2)$$

をみたすとき f は $\Phi(s)$-不変という．f がすべての s について $\Phi(s)$-不変のとき f は１径数変換群 Φ で不変な函数という.

定理 8.7 函数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が１径数変換群 Φ で不変であるための必要十分条件は Φ の定めるベクトル場 V に対し $V(f) = 0$.

ここで $V_{\Phi(s)\boldsymbol{P}}(f) = \dfrac{d}{ds}f(\Phi(s)\boldsymbol{P})$ である.

定義 8.13 部分集合 $S \subset \mathbb{R}^2$ に対し

$$\boldsymbol{x} \in S \Longrightarrow \Phi(s)\boldsymbol{x} \in S$$

のとき S は $\mathit{\Phi}(s)$-不変という．すべての s について $\mathit{\Phi}(s)$-不変のとき S は $\mathit{\Phi}$-不変という．

命題 8.16 函数 F が１径数変換群 $\mathit{\Phi}$ で不変であれば，その等位線

$$S = \{(x_1, x_2) \mid F(x_1, x_2) = c\}$$

は $\mathit{\Phi}$-不変である．

定理 8.19 １径数変換群 $\mathit{\Phi}$ がベクトル場 V をもつとする．函数 F は等位線 $F = 0$ 上で

(1)　$(\partial_1 F, \partial_2 F) \neq (0, 0)$

(2)　$V(F) = 0$

をみたすとする．このとき等位線 $F = 0$ は $\mathit{\Phi}$-不変である．

12　リーの定理（第９章）

これまでの準備を経て，ここで本書の主題に入る．すなわち微分方程式に対称性があれば積分因子をもつ，すなわち解くことができるということが示される．

微分方程式 $\dfrac{dx_2}{dx_1} = f(x_1, x_2)$ の解曲線 C を変換 $\mathit{\Phi}(s)$ で移し

$$\mathit{\Phi}(s)(x_1(t), x_2(t)) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t))$$

とおく．このとき変換先での導関数は

$$\frac{d\tilde{x}_2}{d\tilde{x}_1} = \frac{\dfrac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \tilde{x}_2}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dx_1}}{\dfrac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \tilde{x}_1}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dx_1}} \tag{9.4}$$

と表される．

x_1, x_2 に加え $x_2' = dx_2/dx_1$ を座標にもつ３次元空間

$$J^{(1)} = \{(x_1, x_2, x_2') \mid x_2' = \frac{dx_2}{dx_1}\}$$

を１次のジェット空間とよぶ．微分方程式を陰関数表示して

$$F(x_1, x_2, \frac{dx_2}{dx_1}) = 0 \tag{9.3}$$

これを $J^{(1)}$ 内の図形とみなして

$$S^{(1)} = \{(x_1, x_2, x_2') \in J^{(1)} \mid F(x_1, x_2, x_2') = 0\} \tag{9.5}$$

とおく．

$\mathbb{R}^2$ の１径数変換群 $\Phi = \{\Phi(s)\}$，$\Phi(s)(x_1, x_2) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ に対し (9.4) によりジェット空間の１径数変換群 $\Phi^{(1)} = \{\Phi^{(1)}(s)\}$ を

$$\Phi^{(1)}(s)(x_1, x_2, x_2') = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_2')$$

で定めることができる．$\Phi^{(1)}$ を Φ の１次の延長という．

１径数変換群 $\Phi = \{\Phi(s)\}$ のベクトル場を $V = V_1\partial_1 + V_2\partial_2$ とする．V の積分曲線 $\boldsymbol{x}(s)$ から延長 $\Phi^{(1)}$ により $J^{(1)}$ 内の曲線 $\boldsymbol{x}^{(1)}(s)$ を定め，これを微分してベクトル場 $V^{(1)}$ を求める．

$$V^{(1)} = V_1\partial_1 + V_2\partial_2 + V_2^{(1)}\partial_{2'},\ \partial_{2'} = \frac{\partial}{\partial x_2'},$$

$$V_2^{(1)} = \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_2} - \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right)\frac{dx_2}{dx_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2 \tag{9.7}$$

$J^{(1)}$ のベクトル場 $V^{(1)}$ を V の１次の延長という．

ジェット空間 $J^{(1)}$ において微分方程式の対称性が定義される．

定義 9.8 $\Phi = \{\Phi(s)\}$ を１径数変換群とする．

$$S^{(1)} = \{(x_1, x_2, x_2') \mid F(x_1, x_2, x_2') = 0\}$$

が実数 s に対し条件

$$(x_1, x_2, x_2') \in S^{(1)} \Longrightarrow \Phi^{(1)}(s)(x_1, x_2, x_2') \in S^{(1)}$$

をみたすとき，常微分方程式

$$F(x_1, x_2, \frac{dx_2}{dx_1}) = 0$$

は $\Phi(s)$-不変という．すべての s に対し $\Phi(s)$-不変のとき Φ-不変という．Φ-不変のとき，すなわち Φ により解が解に移されるとき，Φ を常微分方程式 $F(x_1, x_2, \frac{dx_2}{dx_1}) = 0$ の対称性という．

微分方程式

$$X_1(x_1, x_2) + X_2(x_1, x_2)\frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

が 1 径数変換群 Φ で不変とする．すなわちジェット空間で

$$S^{(1)} = \{(x_1, x_2, x_2') \in J^{(1)} \mid F(x_1, x_2, x_2') = 0\},$$

$$F(x_1, x_2, x_2') = x_2' + \frac{X_1(x_1, x_2)}{X_2(x_1, x_2)}$$

が 1 径数変換群 $\Phi^{(1)}$ で不変とする．

さらに Φ のベクトル場 $V = V_1\partial_1 + V_2\partial_2$ と微分方程式に対応するベクトル場 $X = X_1\partial_1 + X_2\partial_2$ が

$$(X|V) = X_1V_1 + X_2V_2 \neq 0$$

をみたすとする．このとき次の結果が示される．

定理 9.19 (リーの定理, 1874) 常微分方程式

$$X_1(x_1, x_2) + X_2(x_1, x_2)\frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

は，1 径数変換群 $\Phi = \{\Phi(s)\}$ で不変で，Φ のベクトル場を V とするとき $(X|V) \neq 0$ ならば，積分因子

$$\mu(x_1, x_2) = \frac{1}{(X|V)}$$

をもつ．

始めに挙げた解ける微分方程式の場合がこの定理により一般化される．これにより本書の主題である「対称性をもつ微分方程式は求積できる」が示された．

13　線形リー群（第１０章，第１１章）

リッカチ方程式を考えると 1 次分数変換から自然に線形リー群が現れてくる．定義がいくつか与えられる．

定義 10.8 $\mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ の部分群 G が条件
どの収束する点列 $\{X_n\} \subset G$ に対しても，
その極限 $X = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ は G に収まる
をみたすとき閉部分群であるという．

定義 10.11 $\mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ の閉部分群を (2 次の) 線形リー群とよぶ．

$X \in \mathrm{M}_2\mathbb{R}$ に対し，１径数群 $G_X = \{\exp(tX) \mid t \in \mathbb{R}\}$ は $\mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ の部分群であるが，$\mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ 内の曲線とみなすこともできる．

定義 10.13 線形リー群 $G \subset \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ に対し

$$\mathfrak{g} = \{X \in \mathrm{M}_2\mathbb{R} \mid G_X \subset G\}$$

と定め，$\mathfrak{g}$ を G のリー環 (リー代数) とよぶ．

行列 $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_2\mathbb{R}$ に対し，A の定める 1 次分数変換を

$$T_A(x) = \frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}}$$

とした．これより A に対し (射影直線上の) 変換

$$\Phi_A(t)(x) = T_{\exp(tA)}(x)$$

が定まる．$\Phi(A) = \{\Phi_A(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ は１径数変換群である．$\Phi(A)$ の定めるベクトル場 $\xi(A)$ は次のようになる．

$$\xi(A)_p(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(T_{\exp(tA)}(p))$$

関数 $x = x(t)$ に対し

$$x'(t) = \frac{dx}{dt}(t)\partial_1$$

を x の接ベクトル場という.

G を線形リー群とし，そのリー代数を $\mathfrak{g}$ とする．$\mathfrak{g}$ に値をもつ滑らかな関数を $A(t)$ とし，$x(t)$ に沿って定義された上記のようなベクトル場 $\xi(A(t))$ を考える．このとき式

$$x'(t) = \xi(A(t))_{x(t)} \tag{11.2}$$

を本書では G におけるリー形微分方程式とよんでいる.

14　リッカチ方程式（第１１章）

$\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ におけるリー形微分方程式を考える.

$$A = \begin{pmatrix} \beta(t) & \alpha(t) \\ -\gamma(t) & -\beta(t) \end{pmatrix}$$

とするとリー形微分方程式は

$$\frac{dx}{dt}(t) = \alpha(t) + 2\beta(t)x(t) + \gamma(t)x(t)^2 \tag{11.8}$$

となりリッカチ方程式となる.

これより「リッカチ方程式の解けるしくみ」である次の結果が示される.

定理 11.4 リー形微分方程式

$$x'(t) = \xi(A(t))_{x(t)}, \quad A = \begin{pmatrix} \beta(t) & \alpha(t) \\ -\gamma(t) & -\beta(t) \end{pmatrix}$$

の初期条件 $x(0) = c$ をみたす解は

$$\frac{dS}{dt}(t) = A(t)S(t)$$

の初期条件 $S(0) = E$ をみたす解 $S(t)$ を用いて $x(t) = T_{S(t)}(c)$ で与えられる.

これより特殊解が一つあればリッカチ方程式の一般解が求まる．本書の第 2 の主題が示された.

この後にリーの夢として，微分方程式と群論との関係についての解説がなされ，次の定理が引用される．

定理 11.8 (リーの定理) G を連結なリー群とする．G が可解リー群ならば G におけるリー形微分方程式は求積できる．

リッカチ方程式は既に見たように $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ におけるリー形微分方程式であるが，$\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ は単純群であり，可解ではない．よって一般には求積できないことが分かる．

さらに微分ガロア理論に関した次のような事項に言及がある．

ピカール-ヴェッシオ理論
コルチンの微分体のガロア理論
梅村理論

また，付録 C では微分ガロワ群の具体例が示される．

15　リウヴィル方程式（第１２章）

この部分は数学セミナーの連載時には無くて，本書で追加されている．

線形リー群を用いて解を求めることができる微分方程式の例として，次の２階常微分方程式を考える．

$$\ddot{x}(t) = 2e^{-4x(t)} \tag{12.1}$$

これは１次元リウヴィル方程式と呼ばれる．一般に

$$L(t) = \begin{pmatrix} y(t) & z(t) \\ z(t) & -y(t) \end{pmatrix}, \quad M(t) = \begin{pmatrix} 0 & -z(t) \\ z(t) & 0 \end{pmatrix}$$

とすると

$$\frac{dL}{dt}(t) = [L(t), M(t)] \tag{12.7}$$

となる．(12.7) をラックス方程式という．成分で表すと

$$\dot{y}(t) = 2z(t)^2, \quad \dot{z}(t) = -2y(t)z(t) \tag{12.8}$$

という連立常微分方程式になる．(12.7) を (12.8) のラックス表示という．特に

$$y(t) = \dot{x}(t), \quad z(t) = e^{-2x(t)}$$

とすると１次元リウヴィル方程式のラックス表示となる．

ラックス方程式は解けることが示される．

定理 12.3 $L : \mathbb{R} \to \mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ に対するラックス方程式

$$\frac{dL}{dt}(t) = [L(t), M(t)]$$

の初期条件 $L(0) = L_0 \in \mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ をみたす解が求まる．

これより１次元リウヴィル方程式の解も求まる．

定理 12.7　１次元リウヴィル方程式 $\ddot{x}(t) = 2e^{-4x(t)}$ の初期条件 $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$ をみたす解は

$$x(t) = \frac{1}{2}\log\cosh(2e^{-2x_0}t) + x_0$$

なお，リウヴィル方程式 $\ddot{x}(t) = 2e^{-4x(t)}$ は戸田格子の最も簡単な式 $(N = 2)$ になっていることが注意される．

16　KdV 方程式（第１３章）

この終章において KdV 方程式が導入され，現在研究が進行している無限可積分系へと話題が広がる．

まず，いくつかの用語を準備する．区間 I で定義され，射影直線 $\mathbb{R}P^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ に値をもつ関数 $f(t)$ が $\dot{f}(t) \neq 0$ をみたすとき $\mathbb{R}P^1$ 内の運動という．

$\mathbb{R}P^1$ 内の運動 $x(t)$ に対し，その斉次座標ベクトル場を

$$\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t) : x_2(t)] = [1 : x(t)], \quad x(t) = \frac{x_2(t)}{x_1(t)}$$

で表す．ここで径数 t を射影弧長径数と呼ばれる径数 s で置き換える．このとき

$$\mathcal{F}(s) = (\boldsymbol{x}'(s), \boldsymbol{x}(s)) = \begin{pmatrix} \frac{d}{ds}x_1(s) & x_1(s) \\ \frac{d}{ds}x_2(s) & x_2(s) \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$$

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds}(s) = \mathcal{F}(s)\mathcal{U}(s),\ \mathcal{U}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u(s) & 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}''(s) = u(s)\boldsymbol{x}(s)$$

となることが分かる．$\mathcal{F}(s)$ を $x(s)$ の射影フレネ標構という．

運動 $x(s)$ の斉次座標ベクトル場

$$\boldsymbol{x}(s) = [x_1(s) : x_2(s)] = [1 : x(s)]$$

が時間の経過 t により変化しているとする．

$$(s,t) \longmapsto \boldsymbol{x}(s,t)$$

ここで s はすべての t に対し共通の射影弧長径数と仮定する．すると

$$\mathcal{F}(s,t) = \left(\frac{\partial}{\partial s}\boldsymbol{x}(s,t), \boldsymbol{x}(s,t)\right)$$

は

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{F}(s,t) = \mathcal{F}(s,t)\mathcal{U}(s,t),\ \mathcal{U}(s,t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u(s,t) & 0 \end{pmatrix}$$

となることが分かる．

$\boldsymbol{x}(s,t)$ の時間に伴う変化を

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}(s,t) = f(s,t)\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial s}(s,t) + g(s,t)\boldsymbol{x}(s,t) \tag{13.9}$$

とおくと

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(s,t) = \mathcal{F}(s,t)\mathcal{V}(s,t),\ \mathcal{V}(s,t) = \begin{pmatrix} f_s + g & f \\ g_s + uf & g \end{pmatrix}$$

となる．このとき

$$\mathcal{V}_s - \mathcal{U}_t + [\mathcal{U}, \mathcal{V}] = 0 \tag{13.10}$$

が得られる．

ポアンカレの補題 (定理 6.16) に相当する次の定理が成立している．

定理 13.6 (フロベニウスの定理) リー代数に値をもつ函数

$$\mathcal{U}(s,t), \mathcal{V}(s,t) : \mathbb{R}^2 \to \mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$$

に対し連立偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{U}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{V}$$

の解 $\mathcal{F}(s,t) : \mathbb{R}^2 \to \mathrm{S}L_2\mathbb{R}$ が存在するための必要十分条件は

$$\mathcal{V}_s - \mathcal{U}_t + [\mathcal{U}, \mathcal{V}] = 0 \tag{13.10}$$

(13.10) を積分可能条件という．(13.9) において特に $f = 2u(s,t)$ とすると $g = 0$ となり，積分可能条件は次のような KdV 方程式となる．

$$u_t - 6uu_s + u_{sss} = 0 \tag{13.13}$$

よって次が成り立つ．

定理 13.7 射影直線 $\mathbb{R}P^1$ 内の運動の滑らかな連続変形

$$x_t(s,t) = 2u(s,t)x_s(s,t)$$

に伴う $u(s,t)$(射影曲率とよばれる) の時間発展は KdV 方程式に従う．

これより $u(s,t)$ が KdV 方程式の解ならば，連立偏微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{U}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{V}$$

は積分可能条件 (= KdV 方程式) を満たしているので解 $\mathcal{F}(s,t)$ が存在し，これより $\boldsymbol{x}$，すなわち運動の連続変形 $\boldsymbol{x} = x_2/x_1$ が定まる．

最後に KdV 方程式に関連する次のような事項についての簡単な紹介がある．

KdV 方程式の解法
ミウラ変換
逆散乱法
ループ群
アフィン・リー代数
ソリトン方程式

17　終わりに

ここで紹介したのは本書の内容の一部分であり，他にも様々な事柄についての解説，言及がある．時々立ち止まって周りを見渡し，関係する事柄に思いを巡らすのも，本書を楽しむ一つの方法かもしれない．演習問題，章末問題にはそのような例がいくつもある．略解があるのも読者に有益であろう．

記述は多少荒削りなところも見受けられ，ミスプリントも散見されるが，いろいろな興味深い話題が丁寧に述べられているので，本書が読み継がれ，新しい文献等も追加された改訂版が出ることを期待したい．

〒 737-8512
呉市若葉町 5-1
海上保安大学校
E-mail: nkawamoto@nifty.com

10 次元以下の pointed ホップ・スーパー代数の分類

岡山理科大学大学院 理学研究科 応用数学専攻 若尾亮太

目次

1 ホップ代数

以下で基礎体 $\Bbbk$ は標数 0 の代数閉体であるとし，$\Bbbk$ 上のテンソル $\otimes_{\Bbbk}$ は $\otimes$ とかく．

1.1 ホップ代数

群 G に対して群環 $\Bbbk G$ は代数だけでなく，ホップ代数の構造をもつ．ここでホップ代数とは次のように与えられる代数系を指す：

定義 1.1. ベクトル空間 H が**ホップ代数**であるとは，代数射たち $m : H \otimes H \to H$ と

$u : H \to \Bbbk$ と**余積** $\Delta : H \otimes H \to H$ と**余単位** $\varepsilon : H \to \Bbbk$ が存在して

(1) $m \circ (\mathrm{id}_H \otimes m) = m \circ (m \otimes \mathrm{id}_H)$
(2) $m \circ (\mathrm{id}_H \otimes u) = m \circ (u \otimes \mathrm{id}_H)$
(3) $(\mathrm{id}_H \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta$
(4) $(\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta$

の 4 条件を満たし，さらに

$$m \circ (S \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta = u \circ \varepsilon = m \circ (\mathrm{id}_H \otimes S) \circ \Delta$$

を満たすような**対合射**と呼ばれる線型写像 $S : H \to H$ が存在するときをいう．さらに，線形写像 $\mathrm{flip} : H \otimes H \to H \otimes H; a \otimes b \mapsto b \otimes a$ とおく．このとき，ホップ代数 H が**余可換**であるとは，$\Delta = \mathrm{flip} \circ \Delta$ が成り立つときをいう．

ホップ代数 H に対して $g.\ell(H) := \{g \in H \mid 0 \neq g, \Delta(g) = g \otimes g\}$ と定義して，この集合の元を **group like 元**という．

命題 1.2. $g.\ell(H)$ は H の積に関して群をなす．

群環 $\Bbbk G$ の場合は $g \in G$ に対して $\Delta(g) = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$, $S(g) = g^{-1}$ とすることでホップ代数をなす．すぐにしたがうように，群環 $\Bbbk G$ に対して，その group like 元全体は $g.\ell(\Bbbk G) = G$ となることがわかる．このことからホップ代数は群環を一般化した対象と思える．

例 1.3. 有限次元ホップ代数 H に対して双対空間 $H^* := \hom(H, \Bbbk)$ には，積を $f, g \in H^*$ に対して $f * g := m \circ (f \otimes g) \circ \Delta$ とすることで代数をなし，代数射 $\Delta^* : H^* \to H^* \otimes H^*$, $u^* : H^* \to \Bbbk$ を

$$\Delta^*(f) := \sum f_1 \otimes f_2 \quad \text{with} \quad \text{「任意の } a, b \in H \text{ に対して } f(ab) = \sum f_1(a) f_2(b)\text{」}$$

$u : H^* \to \Bbbk; f \mapsto f(1_H)$，対合射 $S^* : H^* \to H^*$ は $a \in H$ に対して $S^*(f)(a) = S(f(a))$ と定義することでホップ代数をなす．

双対 H^* の余積は複雑であるが，group like 元 $g.\ell(H^*)$ は次のように比較的簡単に表すことが出来る．

命題 1.4. 有限次元ホップ代数 H に対して $g.\ell(H^*) = \mathsf{Alg}(H, \Bbbk) := \{f \in H^* \mid f \text{ は環準同型}\}$ が成り立つ．

群環は余可換なホップ代数をなしたが，次は非余可換なホップ代数をなす．

例 1.5. 自然数 $2 \leq n$ と $\Bbbk$ 上の 1 の原始 n 乗根 ζ_n をとり固定する．$\langle c, x\rangle$ で c, x で生成されるような自由代数を表すとき，

$$T_{n,\zeta_n} := \langle c, x\rangle/(c^n - 1, x^n, cx - \zeta_n xc)$$

上に Δ, ε, S を

$$\Delta(c) = c \otimes c,\ \Delta(x) = x \otimes 1 + c \otimes x, \quad \varepsilon(c) = 1, \varepsilon(x) = 0, \quad S(c) = c^{-1}, S(x) = -c^{-1}x.$$

と定義することで n^2 次元の余可換でないホップ代数をなす．これは **Taft 代数**と呼ばれる．

1.2 Yetter Drinfeld 加群

定義 1.6. H をホップ代数とする．ベクトル空間 V が**左 H-余加群**であるとは，次の 2 条件：

(1) $(\mathrm{id}_H \otimes \rho) \circ \rho = (\Delta \otimes \mathrm{id}_V) \circ \rho$
(2) $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_V) \circ \rho = \varphi$ with $\varphi : V \to \Bbbk \otimes V; v \mapsto 1 \otimes v$: 線型同型射.

が成り立つような線形写像 $\rho : V \to H \otimes V$ が存在するときをいう．この ρ を**余作用**といい，このとき，左 H-余加群全体と上の条件を保つ射を考えることで，これは圏をなし ${}^H\mathcal{M}$ とかく．

ホップ代数として群環 $\Bbbk G$ が考えられたのだった．この余加群圏に関して，次が知られている．

事実 1.7. 群 G に対して ${}^{\Bbbk G}\mathcal{M}$ の対象全体は G で次数付けられるようなベクトル空間全体と一致する．

このもとで，“Yetter-Drinfeld 加群” という対象は，加群構造と今の余加群構造を両立させるようなものとして定義される．

定義 1.8. ホップ代数 H を固定する．このとき，ベクトル空間 V が **Yetter-Drinfeld 加群**であるとは，作用 $H \otimes V \to V; h \otimes v \mapsto h.v$ と余作用 $\delta : V \to H \otimes V; v \mapsto v_{-1} \otimes v_0$ が存在して，次の両立条件を満たす：

$$\delta(h.v) = h_1 v_{-1} S(h_3) \otimes h_2.v_0 \text{ for } h \in H,\ v \in V.$$

この条件を満たすベクトル空間全体と，両立条件を保つ線型写像を考えることで，これは圏をなす．以下では ${}^H_H\mathcal{YD}$ とかく．

1.3 ボゾン化（bosonization）

${}^H_H\mathcal{YD}$ を考える利点のひとつには，群論における半直積の一般化である“ボゾン化”を考えることができることにある．これは Radford-Majid[R85, Mj94] によってよく研究なされており，Andruskiewitsch-Schneider[AS02] は以下に述べる事実を体系的にまとめている．

事実 1.9. ホップ代数たち A, H を固定する．ホップ代数射たち $\pi : A \to H$ と $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_H$ を満たすような $\iota : A \to H$ が与えられたとき，

$$B := A^{\mathrm{co}(\pi)} := \{a \in A \mid (\mathrm{id}_A \otimes \pi)(\Delta_A(a)) = a \otimes 1_H\}$$

は次の構造で ${}^H_H\mathcal{YD}$ のホップ代数対象となる．

(1) $\Delta_H(h) = h_1 \otimes h_2$ と表示するとき，作用は $h \otimes a \mapsto \iota(h_1)a\iota(S(h_2))$.
(2) 余作用は $a \mapsto (\pi \otimes \mathrm{id}_A)(\Delta_A(a))$.
(3) B は A の部分代数をなす.
(4) $\Delta_A(a) = a_1 \otimes a_2$ と表示するとき，余積 Δ_B は $\Delta_B : B \to B \otimes B; a \mapsto a_1(\iota \circ \pi)(S(a_2)) \otimes a_3$.

他方で，次の操作が考えられる．

定義 1.10. ホップ代数 H と ${}^H_H\mathcal{YD}$ のホップ代数対象 B に対してテンソル積 $B\#H := B \otimes H$ 上に

$$(b\#h)(b'\#h') := b(h_1.b')\#h_2h'$$
$$\Delta(b\#h) := b^{(1)}\#(b^{(2)})_{-1}h_1 \otimes (b^{(2)})_0\#h_2$$

と，積と余積を定めることが出来る．

この操作は**ボゾン化**と呼ばれる．ボゾン化に関して，以下の事実が成り立つ：

事実 1.11. この $B\#H$ はホップ代数をなす．さらに B, H が有限次元ならば双対 $(B\#H)^*$ は $B^*\#H^*$ とホップ代数同型になる．

事実 1.12. ホップ代数 H に対して以下には 1 対 1 対応がある．

- ${}^H_H\mathcal{YD}$ 圏のホップ代数対象.

- $H \subset A$ かつ $\pi|_H = \mathrm{id}_H$ を満たすようなホップ代数 A とホップ代数射 $\pi : A \to H$ の組 (A, π).

条件に出てきた π を **split epi** とよぶ.

さて，ホップ代数 H を固定する．ホップ代数全体を対象として，ホップ代数構造を保つ射をもつ圏を Hopf とかく．このとき，上記のことから

$$\mathcal{F}_H : \{{}^H_H\mathcal{YD}\text{のホップ代数対象}\} \longrightarrow \mathsf{Hopf};\ K \longmapsto K\#H.$$

という関手 $\mathcal{F}_H : \{{}^H_H\mathcal{YD}\text{のホップ代数対象}\} \to \mathsf{Hopf}$ を得たことになる．この $\mathcal{F}_H$ に関して，Hopf を事実 1.9 を満たすものたちに制限することで，これは圏同値となる．つまり ${}^H_H\mathcal{YD}$ のホップ代数対象 B に対して $(B\#H)^{\mathrm{co}(\pi)} \cong B$ が成立する．

2 ホップ・スーパー代数

2.1 ホップ・スーパー代数

スーパーとは，$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ で次数付けられた対象の理論である．通常のベクトル空間の代わりに $\mathbb{Z}_2$-graded ベクトル空間 $V = V_0 \oplus V_1$ を考え，この V を**スーパーベクトル空間**という．各部分空間には名前がついていて V_0 は **even part** と V_1 は **odd part** と呼ばれ，元 $v \in V_0 \cup V_1$ に関して（**斉次元**という）$v \in V_0$ のときは $|v| := 0$, $v \in V_1$ のときは $|v| := 1$ と定め，これを v の **parity** と呼ぶ．スーパーベクトル空間たち全体と $\mathbb{Z}_2$-grading を保つ線型写像を考えることで圏をなし，これを sVec とかく．またスーパーベクトル空間たち V, W に対して

$$V \otimes W := ((V_0 \otimes W_0) \oplus (V_1 \otimes W_1)) \oplus ((V_1 \otimes W_0) \oplus (V_0 \otimes W_1))$$

と $V \otimes W$ をスーパーベクトル空間とみることで，テンソル圏をなす．さらに次の**スーパー対称性**により対称テンソル圏をなす．

$$V \otimes W \to W \otimes V\,;\, v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v.$$

ここで v, w は斉次元としてとっている．

定義 2.1. スーパーベクトル空間 $V = V_0 \oplus V_1$ が **purely even** であるとは $V_1 = 0$ のときをいう．

ホップ・スーパー代数は圏 sVec を用いて次のように定義される．

定義 2.2. $\mathcal{H}$ が**ホップ・スーパー代数**であるとは $\mathcal{H}$ が sVec のホップ代数対象となるときをいう.

命題 2.3. ホップ・スーパー代数 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ の余積 Δ は $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ とかくとき $\Delta(ab) = \sum (-1)^{|a_{(2)}||b_{(1)}|} a_{(1)} b_{(1)} \otimes a_{(2)} b_{(2)}$ を満たす.

2.2 ホップ・スーパー代数の例

ホップ・スーパー代数の例として，例えば次があげられる：

例 2.4. purely even であるような任意のホップ代数 H は自然にホップ・スーパー代数構造をもつ.

例 2.5. 自然数 n に対して**外積代数** $\bigwedge(\mathbb{k}^n) := \mathbb{k}\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle / (x_i x_j + x_j x_i,\, i, j \in \{1, \ldots, n\})$ は次の構造で n^2 次元のホップ・スーパー代数をなす.

$$\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i, \quad \varepsilon(x_i) = 0, \quad S(x_i) = -x_i.$$

2.3 スーパーベクトル空間と Yetter-Drinfeld 加群

この節では，ホップ・スーパー代数に対しても §1.3 で紹介したボゾン化が可能であることを確かめる.

命題 2.6. sVec は ${}^{\mathbb{k}\mathbb{Z}_2}_{\mathbb{k}\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ の full subcategory をなす.

Proof. 事実 1.7 から ${}^{\mathbb{k}\mathbb{Z}_2}_{\mathbb{k}\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ の対象は少なくとも $\mathbb{k}\mathbb{Z}_2$ で次数付けられたベクトル空間になることから，対象に関して閉じていることはよい．スーパーベクトル空間 V を固定する．作用 $\mathbb{k}\mathbb{Z}_2 \otimes V \to V$ と余作用 $\delta : V \to \mathbb{k}\mathbb{Z}_2 \otimes V$ は $\mathbb{Z}_2 = \langle \sigma \rangle = \{e, \sigma\}$ と勝手な V の元 $v = v_0 + v_1$ with $v_0 \in V_0,\, v_1 \in V_1$ に対して

$$e.v = v,\ \sigma.v := v_0 - v_1, \quad \delta(v_0) = e \otimes v_0,\ \delta(v_1) = \sigma \otimes v_1$$

として線型和に拡張すればよい．両立条件が成り立つことを示す．$\mathbb{k}\mathbb{Z}_2 = \mathbb{k}e \oplus \mathbb{k}\sigma$ の余積は $\Delta(\sigma^i) = \sigma^i \otimes \sigma^i$ で対合射は $S(\sigma^i) = \sigma^i$ であることに注意すると次の等号

$$\delta(\sigma^i.v) = e \otimes v_0 + (-1)^i \sigma \otimes v_1$$

が任意の $v \in V$ に対して成り立てばよいことになる．実際に $v = v_0 + v_1$ with $v_0 \in V_0, v_1 \in$

V_1 に対して

$$\begin{aligned}\delta(\sigma^i.v) &= \delta(v_0 + (-1)^i v_1)\\ &= \delta(v_0) + (-1)^i \delta(v_1)\\ &= e \otimes v_0 + (-1)^i \sigma \otimes v_1\end{aligned}$$

となるので両立条件もよい．subcategory をなすことはこれでよく，full subcategory であることは sVec の射は $\mathbb{Z}_2$-次数付けを保つ射であったことからしたがう． □

このことからホップ・スーパー代数 $\mathcal{H}$ に対して事実 1.12 から（通常の）ホップ代数 $\hat{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2$ を考えることができ，その構造たちは次のように書き下すことが出来る：

$$(a \otimes \sigma^i)(b \otimes \sigma^j) \ := \ a(b_0 + (-1)^i b_1) \otimes \sigma^{i+j}, \qquad 1_{\mathcal{H}} \otimes 1_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$$

ただし，$b = b_0 + b_1 \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ と表示しており $1_{\mathcal{H}}, 1_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$ はそれぞれの単位元である．

$$\widehat{\Delta}(a \otimes \sigma^i) \ := \ (a_{0(1)} \otimes \sigma^i) \otimes (a_{0(2)} \otimes \sigma^i) + (a_{1(1)} \otimes \sigma^{i+1}) \otimes (a_{1(2)} \otimes \sigma^i), \qquad \varepsilon_{\mathcal{H}} \otimes \varepsilon_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$$

と入れる．ただし，余積を $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ と表示しており $\varepsilon_{\mathcal{H}}, \varepsilon_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$ はそれぞれの余単位である．これを $\hat{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2$ とかく．さらに対合射は次で与えられる：

$$\hat{S} : \hat{\mathcal{H}} \to \hat{\mathcal{H}}\,;\, a \otimes \sigma^i \mapsto (-1)^{i+1} S(a) \otimes \sigma^{i+|a|}.$$

ここで S は $\mathcal{H}$ の対合射である．

ホップ・スーパー代数 $\mathcal{H}$ に対して，$g.\ell(\mathcal{H}) = \{0 \neq g \in \mathcal{H}_0 \mid \Delta(g) = g \otimes g\}$ とおく．purely even でない有限次元ホップ・スーパー代数 $\mathcal{H}$ に対して，そのボゾン化は以下の基本的な性質を満たす：

命題 2.7. 次元に関して $\dim \hat{\mathcal{H}} = 2 \dim \mathcal{H}$ が成立する．

Proof. これはテンソル積の構成から明らかである． □

命題 2.8. 写像 $g.\ell(\mathcal{H}) \times \mathbb{Z}_2 \cong g.\ell(\hat{\mathcal{H}}); (h, \sigma^i) \mapsto h \otimes \sigma^i$ は群同型をなす．

Proof. 元 $h = h_0 + h_1 \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ with $h_0 \in \mathcal{H}_0$, $h_1 \in \mathcal{H}_1$ について．$h \otimes \sigma^i \in g.\ell(\hat{\mathcal{H}})$ を仮定する．まずボゾン化の余積 $\hat{\Delta}$ の定義から $\Bbbk\mathbb{Z}_2$ の元を見ることで $h_1 = 0$ でなくてはならない．つまり

$$\hat{\Delta}(h \otimes \sigma^i) \ \in \ \big((\mathcal{H}_0 \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2) \otimes (\mathcal{H}_0 \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2)\big) \oplus \big((\mathcal{H}_1 \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2) \otimes (\mathcal{H}_1 \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2)\big)$$

となる．そこで簡単のため $\Delta(h) = x \otimes y + z \otimes w \in (\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_0) \oplus (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1)$ と表示する．もし $z \neq 0$ が成り立つときは先の議論と同じように $h \otimes \sigma^i \in g.\ell(\hat{\mathcal{H}})$ に反するので $\Delta(h) = x \otimes y \in \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_0$ の形となる．最初の仮定から，

$$(h \otimes \sigma^i) \otimes (h \otimes \sigma^i) = \hat{\Delta}(h \otimes \sigma^i) = (x \otimes \sigma^i) \otimes (y \otimes \sigma^i)$$

なので $\Delta(h) = h \otimes h$ を強いる．つまり $h \in g.\ell(\mathcal{H})$ となる． □

命題 2.9. ボゾン化 $\hat{\mathcal{H}}$ は非可換かつ非余可換なホップ代数をなす.

Proof. 仮定から $0 \neq x \in \mathcal{H}_1$ なる元がとれる．積のほうは

$$(x \otimes \sigma)(1 \otimes \sigma) = x \otimes e \neq -x \otimes e = (1 \otimes \sigma)(x \otimes \sigma)$$

となり非可換性はよい．余積のほうは $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ と表示すれば

$$\hat{\Delta}(x \otimes \sigma) = (x_{(1)} \otimes e) \otimes (x_{(2)} \otimes \sigma)$$

となり明らかに非余可換となる． □

補題 2.10. ホップ代数 $\Bbbk\mathbb{Z}_2$ と双対 $(\Bbbk\mathbb{Z}_2)^*$ はホップ代数として同型となる．

定理 2.11. ボゾン化 $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2$ の双対 $(\hat{\mathcal{H}})^*$ は $\mathcal{H}^* \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2$ と同型となる．

さて，ホップ代数 A で事実 1.12 の 2 番目の条件を満たすものを与えれば，A の部分代数として ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ のホップ代数対象を得ることが出来る．ホップ・スーパー代数の分類を行うためには，対応で得られる $B \in {}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ がホップ・スーパー代数とみなすことができる，つまり次の条件：

$$B \in {}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD} \iff B \in \mathsf{sVec}.$$

が満たされるような B に関する必要十分条件を考察すればよいことになる．

2.4 YD データ

ホップ代数 A と位数 2 の元たち $g \in g.\ell(A)$, $\alpha \in g.\ell(A^*)$ であって $\alpha(g) = -1$ を満たす 3 つ組 (A, g, α) 全体を YD と定義する．

定義 2.12. 有限次元ホップ代数 A に対して

$$\mathsf{YD}(A) := \{(g, \alpha) \in g.\ell(A) \times g.\ell(A^*) \mid g^2 = 1,\ \alpha^2 = \varepsilon_A,\ \alpha(g) = -1\}$$

を A の YD（**Yetter-Drinfeld**）**データ**と呼ぶ.

この YD データは次のように特徴づけられる．

定理 2.13. 有限次元ホップ代数 A を固定する．このとき次の集合は 1 対 1 に対応する：

$$\mathsf{YD}(A) \longleftrightarrow \{A \text{ に関する split epi をもつ } {}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD} \text{ のホップ代数対象 }\}$$

対応は $(g,\alpha) \mapsto A^{\mathrm{co}(\pi_{g,\alpha})}$ で与えられる．

ここで $\pi_{g,\alpha} : A \to \Bbbk\mathbb{Z}_2 = \Bbbk e \oplus \Bbbk\sigma$ は split epi であり，

$$\pi_{g,\alpha} : A \to \Bbbk\mathbb{Z}_2; a \mapsto \varepsilon(a)\boldsymbol{e}_0 + \alpha(a)\boldsymbol{e}_1 \quad \text{with} \quad \boldsymbol{e}_0 := \frac{1}{2}(e+\sigma),\ \boldsymbol{e}_1 := \frac{1}{2}(e-\sigma).$$

である．さらにこの “対応の逆” はボゾン化 $B \mapsto \hat{B} = B\#\Bbbk\mathbb{Z}_2$ になっている．

この定理 2.13 から各 $(g,\alpha) \in \mathsf{YD}(A)$ に対して ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ のホップ代数対象を得ることが出来る．しかし，今の構成では $(g,\alpha),(h,\beta) \in \mathsf{YD}(A)$ であってホップ代数同型 $A^{\mathrm{co}(\pi_{g,\alpha})} \cong A^{\mathrm{co}(\pi_{h,\beta})}$ が存在するような $A^{\mathrm{co}(\pi_{g,\alpha})}$ と $A^{\mathrm{co}(\pi_{h,\beta})}$ を区別できていない．したがって，同型類を分類するために $(g,\alpha),(h,\beta) \in \mathsf{YD}(A)$ に対して次の関係「$(g,\alpha) \sim (h,\beta) :\Longleftrightarrow\ f(g) = h,\ \alpha = \beta \circ f$ を満たすようなホップ代数同型射 $f : A \to A$ が存在する」を $\mathsf{YD}(A)$ 上にいれる．

命題 2.14. これは同値関係をなす．

Proof. 反射律は id_A でよい．対称律は仮定で与えられたホップ代数同型射 f の逆写像 f^{-1} が条件を満たし，推移律は，仮定で得られるホップ代数同型 f, g たちの合成 $g \circ f$ (or $f \circ g$) が条件を満たすホップ代数同型射を与える． □

これにより，各 $(A,g,\alpha) \in \mathsf{YD}$ に対して ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ のホップ代数対象は $\mathsf{YD}(A)/\sim$ の元を明示的に与えられれば決定できることがわかった．次に，上の対応で得られる対象 $B \in {}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ について考える．

簡単のため，以下で考える “対象” は有限次元を仮定する．

命題 2.15. 任意の対象 $V \in {}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ は，以下に述べる 4 つの 1 次元ベクトル空間たちを適当な個数直和して得られるベクトル空間と線型同型になる．

$$\Bbbk_0^{1|0}, \quad \Bbbk_0^{0|1}, \quad \Bbbk_1^{1|0}, \quad \Bbbk_1^{0|1}.$$

ここで，$\Bbbk_i^{p|q}$ は $\Bbbk_i^{p|q} = V_0 \oplus V_1$ とかくとき $\dim V_0 = p, \dim V_1 = q$ を満たして，$\Bbbk\mathbb{Z}_2$-作用 $\sigma \otimes v \mapsto (-1)^i v$ をもつスーパーベクトル空間．

Proof. 事実 1.7 から対象は $\mathbb{Z}_2$ で次数付けされたベクトル空間になることはよい．任意に対象 V をとり，非ゼロな元 $v \in V$ を 1 つ固定する．このとき，v を基底に持つ部分空間 $\langle v \rangle$ 上の $\Bbbk\mathbb{Z}_2$-作用 $\sigma \otimes v \mapsto \sigma.v$ を考える．すると $\sigma.(\sigma.v) = (\sigma^2).v = e.v = v$ が作用の満たすべき条件から成り立つ．したがって $\sigma.v := kv$ と表示すれば $k^2 v = v$ が成り立つ．つまり $k = \pm 1$ である．$k = 1$ は自明な作用で，$k = -1$ は $\langle v \rangle = \Bbbk_1^{1|0}, \Bbbk_1^{0|1}$ である．このことから任意の対象 V は，主張の 4 つのベクトル空間を適当な個数分直和することで実現できることが示された． □

再び 3 つ組 (A, g, α) に対応する $B \in {}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ を考える．ホップ代数 B は

$$B \to \Bbbk\mathbb{Z}_2 \otimes B; b \mapsto (\pi \otimes \mathrm{id})\Delta_A(b), \quad \Bbbk\mathbb{Z}_2 \otimes B \to B; g \otimes b \mapsto gbg^{-1}.$$

という余作用と作用をもつのだった．先の命題 2.15 を踏まえると B は

$$B = \bigoplus_{i,j=0}^{1} B_{ij}$$

と分解される．ここで $B_{ij} \subset B$ はある整数 n_j, m_j が存在して次の条件を満たすような Yetter-Drinfeld 加群である．

$$B_{ij} := \{ b \in B \mid (\pi \otimes \mathrm{id})\Delta_A(b) = g^i \otimes b,\ gbg^{-1} = (-1)^j b \},$$

$$B_{0j} \cong (\Bbbk_j^{1|0})^{\oplus n_j}, \quad B_{1j} \cong (\Bbbk_j^{0|1})^{\oplus m_j}.$$

スーパーベクトル空間には parity が定まっていたのだった．それを踏まえると次の同値を得る：

$$B \in \mathsf{sVec} \iff B_{01} = 0 = B_{10} \iff B = B_{00} \oplus B_{11}.$$

上の条件 $B \in \mathsf{sVec}$ はより明示的に書くことが出来る．split epi $\pi : A \to \Bbbk\mathbb{Z}_2$ は $a \in A$ に対して

$$\begin{aligned} \pi(a) &= \varepsilon(a)\boldsymbol{e}_0 + \alpha(a)\boldsymbol{e}_1 \\ &= \frac{1}{2}(\varepsilon(a) + \alpha(a))1 + (\varepsilon(a) - \alpha(a)g) \end{aligned}$$

であったので，$b \in B$ に対して

$$\begin{aligned} (\pi \otimes \mathrm{id})\Delta_A(b) = 1 \otimes b &\iff \frac{1}{2}((\varepsilon(b_1) + \alpha(b_1))1 + \varepsilon(b_1) - \alpha(b_1)g)b_2 = b \\ &\iff (\varepsilon(b_1) + \alpha(b_1))b_2 = 2b \ \&\ (\varepsilon(b_1) - \alpha(b_1))b_2 = 0 \\ &\iff \varepsilon(b_1)b_2 = b = \alpha(b_1)b_2 \end{aligned}$$

である．同様にして $(\pi\otimes \mathrm{id})\Delta_A(b)=g\otimes b \iff \alpha(b_1)b_2=-b$ も成り立つ．このことから B_{ij} は

$$B_{ij}=\{b\in B\mid \alpha(b_1)b_2=(-1)^i b,\ gbg^{-1}=(-1)^j b\}$$

と条件式を書き換えられることがわかった．このことから次が成り立つ．

補題 2.16. 3 つ組 (A,g,α) に対応する対象を $B=A^{\mathrm{co}(\pi_{g,\alpha})}\in {}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ とかくとき，次は同値：

- 任意の $b\in B$ に対して $b\leftharpoonup\alpha:=m\circ(\alpha\otimes\mathrm{id})\circ\Delta_A(b)=gbg^{-1}$ が成り立つ．
- B はスーパーベクトル空間構造をもつ．

Proof. 任意の $b\in B$ を $b_{ij}\in B_{ij}$ を用いて $b=b_{00}+b_{10}+b_{01}+b_{11}$ と表示する．このとき

$$b\leftharpoonup\alpha=b_{00}+b_{01}-b_{10}-b_{11},\quad gbg^{-1}=b_{00}-b_{01}+b_{10}-b_{11}$$

の 2 条件が上のことから成り立つ．以上から次の同値が成り立つことが示された：

$$B\in\mathsf{sVec}\iff b_{01}=0=b_{10}\iff b\leftharpoonup\alpha=gbg^{-1}.$$

□

2.5　分類への応用

ホップ代数 A が **pointed** であるとは，構造射 Δ で閉じているような，全ての単純部分空間（その部分空間として，0 か自分自身しかとれない）の次元が 1 になるときをいう．ホップ・スーパー代数においても pointed の概念を次で定義する．

定義 2.17. ホップ・スーパー代数が **pointed ホップ・スーパー代数**であるとは，ボゾン化が pointed であるときをいう．

以下では §2.2 までの，分類への応用を用いて 10 次元以下の pointed ホップ・スーパー代数を決定する．pointed ホップ代数 A であって次の条件 $(*)$ を満たすものを決定する．

- A は可換でも余可換でもない．
- 位数が 2 であるような元たち $g\in g.\ell(A)$ と $\alpha\in g.\ell(A^*)$ が存在する．

次に条件 $(*)$ を満たす各 A に対して商集合 $\mathsf{YD}(A)/\sim$ を決定する．同値類を次のように書き下す：

$$\mathsf{YD}(A)/\sim=\{[(g_i,\alpha_i)]\mid(g_i,\alpha_i)\in\mathsf{YD}(A)\}$$

各 $[(g_i,\alpha_i)]$ に対して $A^{\mathrm{co}(\pi_{g_i,\alpha_i})}$ with $\pi_{g_i,\alpha_i}: A \to \Bbbk\mathbb{Z}_2; a \mapsto \varepsilon(a)\boldsymbol{e}_0 + \alpha_i(a)\boldsymbol{e}_1$ を知ればよい．すると，ホップ代数同型 $\widehat{A^{\mathrm{co}(\pi_{g_i,\alpha_i})}} \cong A$ を与えるような ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ のホップ代数対象 $A^{\mathrm{co}(\pi_{g_i,\alpha_i})}$ を決定できたことになる．さらに，$A^{\mathrm{co}(\pi_{g_i,\alpha_i})}$ たちのうちで，補題 2.16 で与えた同値条件を満たすものがホップ・スーパー代数である．

3 主結果

YD データを用いることで 10 次元以下の purely even でないような pointed ホップ・スーパー代数を分類することができた．以下にそれをまとめる．

定理 3.1. p を奇素数とする．$\dim\mathcal{H} = p$ であるような purely even でないホップ・スーパー代数 $\mathcal{H}$ は存在しない．

Proof. 背理法で，$\dim\mathcal{H} = p > 2$ である purely even でないホップ・スーパー代数の存在を仮定する．このときボゾン化 $\hat{\mathcal{H}}$ の次元は $\dim\hat{\mathcal{H}} = 2p$ なのだった．ここで，[M95, Ng05] から次元が $2p$ で与えられる（通常の）ホップ代数は群環 $\Bbbk G$ または，その線型双対 $(\Bbbk G)^*$ とホップ代数同型になる．したがって，ホップ代数 $\hat{\mathcal{H}}$ は可換か余可換のどちらかの構造を持たなければならない．しかし，これは purely even であることに矛盾する． □

この定理 3.1 から次元のうちで自明な 1 を除き，$2, 4, 6, 8, 9, 10$ となる場合を考察すればよい．

定理 3.2. p を奇素数とする．次の条件を満たす purely even でない pointed ホップ・スーパー代数 $\mathcal{H}$ は存在しない．

- $\hat{\mathcal{H}}$ は代数として半単純でない．
- $\dim\mathcal{H} = p^2$ を満たす．

Proof. 次元が $2p^2$ で与えられる pointed ホップ代数は [AN01] から次のいずれかに同型となる．

$$\mathscr{A}(\zeta_p,1,0),\quad \mathscr{A}(\zeta_p,1,1),\quad \mathscr{A}(\zeta_{2p},2r,0),\quad \mathscr{A}(\zeta_p,2,0).$$

ここで，$\zeta_n \in \Bbbk\,(n = p, 2p)$ は 1 の原始 n 乗根を表し，r は $1 \leq r \leq p-1$ を満たす自然数である．いずれも代数として，位数 $2p$ の group like 元 c と非自明な生成元 x の 2 元で生成される自由代数をなす．これらはいずれも条件 $(*)$ を満たしている．そこで $A_1 := \mathscr{A}(\zeta_p,1,0)$, $A_2 := \mathscr{A}(\zeta_p,1,1)$, $A_3(r) := \mathscr{A}(\zeta_{2p},2r,0)$, $A_4 := \mathscr{A}(\zeta_p,2,0)$ としてそれぞれで YD データを決定する．

(1) $A_1 = \mathscr{A}(\zeta_p, 1, 0)$ について．$A_1 = \langle c, x \rangle$ は次の構造をもつ．

$$c^{2p} = 1,\ x^p = 0,\ cxc = \zeta_p x, \quad c \in g.\ell(A_1),\ \Delta(x) = x \otimes 1 + c \otimes x.$$

位数 2 で与えられる代数射 $\alpha : A \to \Bbbk$ は $\alpha(c) = -1, \alpha(x) = 0$ のみ．したがって $\mathsf{YD}(A_1) = \{(c^p, \alpha)\}$ であり，自明に $\mathsf{YD}(A_1)/\sim = \{[(c^p, \alpha)]\}$ である．得られた対象 $A_1^{\mathrm{co}(\pi_{c^p,\alpha})}$ について $\pi(c) \neq 1$ に注意すると $A_1^{\mathrm{co}(\pi_{c^p,\alpha})} = \langle c^2, x \rangle$ と書くことが出来る．この x について：

$$x \leftharpoonup \alpha = \alpha(c)x = -x \neq x = \zeta_p^p x = c^p x c^p$$

なので補題 2.16 を満たさないことがわかる．したがって $A_1^{\mathrm{co}(\pi_{c^p,\alpha})}$ はホップ・スーパー代数ではない．

(2) $A_2 = \mathscr{A}(\zeta_p, 1, 1)$ について．代数構造として $x^p = 1 - c^p$ が成り立つのだった．A_1 のときと同様にして位数 2 の代数射 $\alpha : A_2 \to \Bbbk$ は $\alpha(c) = -1, \alpha(x) = 0$ を満たしている．しかし p は特に奇数だったので $\alpha(x)^p = 0 \neq 2 = 1 - (-1)^p = 1 - \alpha(c)^p$ となって，この場合は $\mathsf{YD}(A_2) = \varnothing$ となる．

(3) $A_3 = \mathscr{A}(\zeta_{2p}, 2r, 0)$ について．$cxc = \zeta_{2p} x$ と各 r に対して $\Delta(x) = x \otimes 1 + c^{2r} \otimes x$ という構造をもつのだった．これより A_1 のときと $\mathsf{YD}(A_3(r))/\sim$ を求めるまでは同じ議論で，$\mathsf{YD}(A_3(r))/\sim = \{[(c^p, \alpha)]\}$ を得る．このとき $A_3(r)^{\mathrm{co}(\pi_{c^p,\alpha})} = \langle c^2, x \rangle$ は $2r$ が偶数であることに注意すると

$$x \leftharpoonup \alpha = \alpha(c)^2 x = x \neq -x = \zeta_{2p}^p x = c^p x c^p$$

なのでこの場合も補題 2.16 を満たさない．

(4) 最後に $A_4 = \mathscr{A}(\zeta_p, 2, 0)$ について．A_2 は $cxc = \zeta_p x$ と $\Delta(x) = x \otimes 1 + c^2 \otimes x$ という構造をもつ．先の議論を辿ることで，$\mathsf{YD}(A_4)/\sim = \{[(c^p, \alpha)]\}$ であり，$A_4^{\mathrm{co}(\pi_{c^p,\alpha})} = \langle c^2, x \rangle$ は

$$x \leftharpoonup \alpha = x = \zeta_p^p x = c^p x c^p, \quad c^2 \leftharpoonup \alpha = c^2 = c^p c^2 c^p$$

なので補題 2.16 の条件を満たす．つまりホップ・スーパー代数をなす．しかし，$A_4^{\mathrm{co}(\pi_{c^p,\alpha})}$ は自明でない odd part の元をもたないことがわかる．したがって purely even なホップ・スーパー代数となる．

□

定理 3.3. p を奇素数とする．次の条件を満たす purely even でない pointed ホップ・スーパー代数 $\mathcal{H}$ は 3 つ存在する．

- $\hat{\mathcal{H}}$ は代数として半単純でない.
- $\dim \mathcal{H} = 2p$ を満たす.

Proof. 次元が 4p で与えられる pointed ホップ代数は [AN01] から次のいずれかに同型となる.

$$\mathscr{A}(-1,1,0),\quad \mathscr{A}(-1,1,1),\quad \mathscr{A}(\zeta_{2p},p,0),\quad \mathscr{A}(-1,p,0).$$

これらは定理 3.2 と同様にして ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ のホップ代数対象と, 生成元の間の関係式を記述できるのはよい. 補題 2.16 を満たすことを確かめる.

(1) $A_1 := \mathscr{A}(-1,1,0)$ について. $cxc = -x$, $\Delta(x) = x \otimes 1 + c \otimes x$ という構造をもつ.

$$x \leftharpoonup \alpha = -x = c^p x c^p$$

なので, これは purely even でないようなホップ・スーパー代数である.

(2) $A_2 := \mathscr{A}(-1,1,1)$ について. この場合, $\Delta(x) = x \otimes 1 + c \otimes x$ から

$$x \leftharpoonup \alpha = -x = c^p x c^p$$

なので purely even でないようなホップ・スーパー代数を得られる.

(3) $A_3 = \mathscr{A}(\zeta_{2p},p,0)$ について. この場合, $\Delta(x) = x \otimes 1 + c^p \otimes x$ から

$$x \leftharpoonup \alpha = x \neq -x = \zeta_{2p}^p x = c^p x c^p$$

なのでこの場合, ホップ・スーパー代数にならない.

(4) $A_4 = \mathscr{A}(-1,p,0)$ について. この場合, $\Delta(x) = x \otimes 1 + c^p \otimes x$ から

$$x \leftharpoonup \alpha = -x = c^p x c^p$$

なので purely even でないようなホップ・スーパー代数である.

□

よって, 次元が 4, 8 となる場合を考察すればよいことがわかった. 8 次元または 16 次元のホップ代数は [CDR00, St99] から条件 $(*)$ を満たすものだけで 16 個存在する. ここではある 8 次元のホップ・スーパー代数を具体的に構成することにする . 条件 $(*)$ を満たす 16 次元 pointed ホップ代数は次のように与えられる.

$$A = H(C_2 \times C_2, (2,2), (c^*, c^*d^*), (c,c), (0,0)),\ H(C_2 \times C_2, (2,2), (c^*, d^*), (c,d), (0,0)), \ldots$$

ここで, 記号の定義は [CDR00] を参照されたい.

以下では，この A に対して $\mathsf{YD}(A)/\sim$ を決定する．まず，A の構造は次のように書き下すことが出来る．

$$A = \langle c, d, x_1, x_2\rangle/(c^2 = 1 = d^2, x_i^2 = 0, cx_ic = -x_i, dx_1d = x_1, dx_2d = -x_2, x_1x_2 = -x_2x_1)$$
$$c, d \in g.\ell(A), \quad \Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + c \otimes x_i.$$

次に $\mathsf{YD}(A)$ を決定する．自明な id_A を除いて，位数 2 で与えられる $g.\ell(A^*)$ の元は命題 1.4 から次の $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ のいずれかになる．

(1) $\alpha_1(c) = -1, \alpha_1(d) = 1, \alpha_1(x_i) = 0,$
(2) $\alpha_2(c) = 1, \alpha_2(d) = -1, \alpha_2(x_i) = 0,$
(3) $\alpha_3(c) = -1, \alpha_3(d) = -1, \alpha_3(x_i) = 0.$

したがって，

$$\mathsf{YD}(A) \;=\; \{(c,\alpha_1), (cd,\alpha_1), (d,\alpha_2), (cd,\alpha_2), (c,\alpha_3), (d,\alpha_3)\}$$

商集合 $\mathsf{YD}(A)/\sim$ を決定する．

補題 3.4. $(c,\alpha_1) \sim (c,\alpha_3), (cd,\alpha_1) \sim (d,\alpha_3), (d,\alpha_2) \sim (cd,\alpha_2)$ が成立する．

Proof. $(c,\alpha_1) \sim (c,\alpha_3)$ を示す．次の対応を与える代数射 $f : A \to A$ を考える：

$$c \mapsto c, \quad d \mapsto cd, \quad x_1 \mapsto x_2, \quad x_2 \mapsto x_1.$$

すると f は A の構造から容易にホップ代数同型射となり，写像として $\alpha_1 = \alpha_3 \circ f$ が成立する．実際，各 $\alpha_i\,(i = 1, 2, 3)$ に対して $\alpha_i(x_j) = 0$ だったので c, d で一致することを見れば十分である．c に対しては $\alpha_3(f(c)) = \alpha_3(c) = -1 = \alpha_1(c)$ であり d に対しても $\alpha_3(f(d)) = \alpha_3(cd) = 1 = \alpha_1(d)$ なので等号が成立することはよい．また，あたりまえに $f(c) = c$ も成り立つのでこれで $(c,\alpha_1) \sim (c,\alpha_3)$ となる．他の $(cd,\alpha_1) \sim (d,\alpha_3)$ と $(d,\alpha_2) \sim (cd,\alpha_2)$ も同じ f が条件を満たす． □

さらに，ホップ代数同型写像 $A \to A$ を考察することで次を得た：

定理 3.5. $\mathsf{YD}(A)$ の商集合 $\mathsf{YD}(A)/\sim$ は次で与えられる．

$$\mathsf{YD}(A)/\sim = \{[(c,\alpha_1)],\ [(cd,\alpha_1)],\ [(d,\alpha_2)]\}.$$

今得られた $\mathsf{YD}(A)/\sim$ の元たちからホップ・スーパー代数を具体的に表示すると次のようになる：

$$A^{\mathrm{co}(\pi_{c,\alpha_1})} \;=\; \langle d, x_1, x_2\rangle \quad \text{with} \quad \Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i.$$

$$A^{\mathrm{co}(\pi_{cd,\alpha_1})} = \langle d, x_1, x_2 \rangle \quad \text{with} \quad \Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + d \otimes x_i.$$

$$A^{\mathrm{co}(\pi_{d,\alpha_2})} = \langle c, x_1, x_2 \rangle \quad \text{with} \quad \Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + c \otimes x_i.$$

参考文献

[AN01] N. Andruskiewitsch and S. Natale, *Counting arguments for Hopf algebras of low dimension*, Tsukuba Math J. **25**, No.1 (2001),277-298.

[AS02] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider, *Pointed Hopf Algebras*, in: Recent developments in Hopf algebra Theorey,MSRI Publications **43** (2002), 168,Cambridge Univ. Press.

[CDR00] S. Caenepeel, S. Dăscălescu and Ş. Raianu, *Classfifying pointed Hopf algebras of dimension 16*, Comm. Algebra **28**, No.2 (2000), 541-568.

[M95] A. Masuoka, *Semisimple Hopf algebras of dimension* $2p$, Comm. Algebra **23** (1995), 1931-1940.

[Mj94] S. Majid, *Crossed products by braided groups and bosonization*, J.Algebra **163** (1994),pp. 165-190.

[Ng05] S.-H. Ng, *Hopf algebras of dimension* $2p$, Proc. Amer. Math. Soc. **133**, no. 8 (2005), 2237-2242 (electronic).

[R85] D. Radford,*The structure of Hopf algebras with a projection*, J. Algebra **92** (1985), 322-347.

[St99] D. Ştefan, *Hopf algebras of low dimension*, J. Algebra **211** (1999), 343-361.

Towards BGG resolutions for the affine Lie superalgebra $\widehat{\mathfrak{sl}}(2|2)$

Takuya Matsumoto[1]
partly working with Prof. Yoshiyuki Koga[1]

[1]University of Fukui

The 37th Lie Algebra Summer Seminar
August 27, 2022 @ University of Fukui

Motivations

- $\mathfrak{sl}(2|2)$ is a distinguished Lie superalgebra.
  - **Math:** $\#$(defect) is two, the Killing form is degenerated, allows two central extensions [Iohara,Koga] .
  - **Phys:** Supersymmetries in particles phys, 1-dim Hubbard model in statistical phys.
- want to construct the BGG-type resolution for the reprs. of the affine $\widehat{\mathfrak{sl}}(2|2)$, [Bernstein,Gel'fand,Gel'fand,'71,'75,'76]

$$\cdots \to N_3(\mathfrak{g}) \to N_2(\mathfrak{g}) \to N_1(\mathfrak{g}) \to L_\Lambda(\mathfrak{g}) \to 0\,,$$

  which explains the character formula.
- expecting that $N_i(\mathfrak{g})$ are the generalized Verma modules , so as the affine Lie superalgebra $\widehat{\mathfrak{sl}}(2|1)$ case. [Koga]

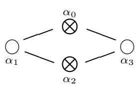
Plan of this talk

Affine Lie Superalgebra $\widehat{\mathfrak{sl}}(2|2)$

- **Cartan datum**
  - $I = \{0,1,2,3\} = I_{\bar 0} \sqcup I_{\bar 1}$: index set of simple roots with $I_{\bar 0} = \{1,3\}$ (even) and $I_{\bar 1} = \{0,2\}$ (odd) .
  - $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$: Cartan matrix, $\operatorname{rank} A = 2$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

  where $B = DA$ (symmetrized) with $D = \operatorname{diag}(1,1,1,-1)$.
- **Root datum**
  - Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$, $\dim \mathfrak{h} = 6$.
  - Simple roots and coroots : $\Pi = \{\alpha_i\}_{i\in I} \subset \mathfrak{h}^*$, $\Pi^\vee = \{h_i\}_{i\in I} \subset \mathfrak{h}$, s.t. $\langle h_i, \alpha_j\rangle = \alpha_j(h_i) = a_{ij}$.
  - Dyunkin diagram



Affine Lie Superalgebra $\widehat{\mathfrak{sl}}(2|2)$

- **Root datum**
  - Root system : $\Delta = \{\, \beta + m\delta\,, n\delta \mid \beta \in \bar\Delta\,, m,n \in \mathbb{Z}\,, n \neq 0\,\}$ where $\delta = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ (imaginary root) and $\bar\Delta$ is the root system of $\mathfrak{sl}(2|2)$.
  - $\Delta_{\bar 0}\,, \Delta_{\bar 1}$: sets of even and odd roots, resp. In particular, $\bar\Delta = \bar\Delta_{\bar 0} \sqcup \bar\Delta_{\bar 1}$ with $\bar\Delta_{\bar 0} = \{\,\pm\alpha_1\,, \pm\alpha_3\,\}$, $\bar\Delta_{\bar 1} = \{\,\pm\alpha_2\,, \pm(\alpha_1+\alpha_2)\,, \pm(\alpha_2+\alpha_3)\,, \pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\,\}$
  - Root vectors: $e_\beta \in \mathfrak{g}^\beta\,, f_\beta \in \mathfrak{g}^{-\beta}$, where $\mathfrak{g}^\gamma = \{\, x \in \mathfrak{g} \mid [h,x] = \gamma(h)x$ for ${}^\forall h \in \mathfrak{h}\,\}$ (root subsp. corresponding to γ)

Remark 1
In $\mathfrak{sl}(2|2)$ case, any $\tau \in \Delta_{\bar 1}$ is isotropic, i.e., $(\tau,\tau) = 0$.

Affine Lie Superalgebra $\widehat{\mathfrak{sl}}(2|2)$

Central extensions and the Hopf algebraic structures

Basic concepts

Generalized Verma modules

Central extensions

Def. 2 ($\mathfrak{psl}(2|2) \oplus \mathbb{C}^3$)

The centrally extended Lie superalgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{psl}(2|2) \oplus \mathbb{C}^3$ over $\mathbb{C}$ has the generators $h_{i,0}$, $x^{\pm}_{i,0}$ with $i = 1, 2, 3$ and the central elements $P^{\pm}_0$, and they satisfy the following relations;

$$[h_{i,0}, h_{j,0}] = 0 \tag{1}$$
$$[h_{i,0}, x^{\pm}_{j,0}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,0} \tag{2}$$
$$[x^{+}_{i,0}, x^{-}_{j,0}] = \delta_{ij} h_{i,0} \tag{3}$$
$$[x^{\pm}_{2,0}, x^{\pm}_{2,0}] = [x^{\pm}_{1,0}, x^{\pm}_{3,0}] = 0 \tag{4}$$
$$[x^{\pm}_{i,0}, [x^{\pm}_{i,0}, x^{\pm}_{2,0}]] = 0 \quad \text{for} \quad i = 1, 3 \tag{5}$$
$$[[x^{\pm}_{1,0}, x^{\pm}_{2,0}], [x^{\pm}_{3,0}, x^{\pm}_{2,0}]] = P^{\pm}_0 . \tag{6}$$

The Cartan matrix is $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Remark:

$\frac{1}{2}h_1 + h_2 + \frac{1}{2}h_3 =: C$ is central in $\mathfrak{sl}(2|2)$ and $A_{1,1} = \mathfrak{psl}(2|2) = \mathfrak{sl}(2|2)/\mathbb{C}C$.

Central extensions

Theorem 3 (M-Molev,'14)

A complete list of pairwise non-isomorphic finite-dimensional irreducible representations of $\mathfrak{g}$ where the central elements act by $C \mapsto 0$, $P^{-}_0 \mapsto 0$, $P^{+}_0 \mapsto 1$, consists of

1. *the Kac modules $K(m,n)$ with $m, n \in \mathbb{Z}_+$ and $m \neq n$,* $\dim K(m,n) = 16(m+1)(n+1)$,
2. *the modules S_n with $n \in \mathbb{Z}_+$,* $\dim S_n = 8(n+1)(n+2)$.

Note:

- There exists outer automorphism of $\mathfrak{g}$ sending

$$\begin{pmatrix} C & -P^{-}_0 \\ P^{+}_0 & -C \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- The reps. of the former case coincide with those of $\mathfrak{sl}(2|2)$.
- The reps. of the latter are discussed in the above theorem.

Yangian

Def. 4 (Drinfeld realization $\mathrm{Y}_D(\mathfrak{sl}(2|2) \oplus \mathbb{C}^3)$,[M])

The Yangian $\mathrm{Y}_D(\mathfrak{sl}(2|2) \oplus \mathbb{C}^3)$ is generated by $h_{i,r}, x^{\pm}_{i,r}$ with $i = 1, 2, 3$ and the **central elements** $P^{\pm}_r$ with $r = 0, 1, 2, \cdots$.
They satisfy the following relations,

$$[h_{i,r}, h_{j,s}] = 0 , \quad [x^{+}_{i,r}, x^{-}_{j,s}] = \delta_{ij} h_{i,r+s} , \quad [h_{i,0}, x^{\pm}_{j,r}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,r} , \tag{7}$$
$$[h_{i,r+1}, x^{\pm}_{j,s}] - [h_{i,r}, x^{\pm}_{j,s+1}] = \pm\frac{1}{2} a_{ij} \{h_{i,r}, x^{\pm}_{j,s}\} \quad \text{for } i, j \text{ not both } 2 \tag{8}$$
$$[h_{2,r}, x^{\pm}_{2,s}] = 0 \tag{9}$$
$$[x^{\pm}_{i,r+1}, x^{\pm}_{j,s}] - [x^{\pm}_{i,r}, x^{\pm}_{j,s+1}] = \pm\frac{1}{2} a_{ij} \{x^{\pm}_{i,r}, x^{\pm}_{j,s}\} \quad \text{for } i, j \text{ not both } 2 \tag{10}$$
$$[x^{\pm}_{2,r}, x^{\pm}_{2,s}] = 0 \tag{11}$$
$$[x^{\pm}_{j,r}, [x^{\pm}_{j,s}, x^{\pm}_{2,t}]] + [x^{\pm}_{j,s}, [x^{\pm}_{j,r}, x^{\pm}_{2,t}]] = 0 \quad \text{for} \quad j = 1, 3 \tag{12}$$
$$[[x^{\pm}_{1,r}, x^{\pm}_{2,0}], [x^{\pm}_{3,s}, x^{\pm}_{2,0}]] = P^{\pm}_{r+s} . \tag{13}$$

The Cartan matrix is $(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Yangian

Denote $\mathfrak{sl}(2|2) \oplus \mathbb{C}^3$ by $\mathfrak{g}$.

Purpose:

We would like to show that
the Yangian $\mathrm{Y}_D(\mathfrak{g})$ has the **Hopf algebraic structures.**

But, hard to show the **coproducts** Δ for the Drinfeld realizations.

Remedy:

1. Define the truncated system $\mathrm{Y}_L(\mathfrak{g})$, called the **Levendorskii's** realization. [Levendorskii,'93]
2. Introduce the Hopf alg. str. for $\mathrm{Y}_L(\mathfrak{g})$.
3. Show the isom. $\mathrm{Y}_D(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{Y}_L(\mathfrak{g})$.

The Hopf alg. str. of $\mathrm{Y}_D(\mathfrak{g})$ are induced from those of $\mathrm{Y}_L(\mathfrak{g})$.
c.f. [Spill, Torrielli]

Yangian

Def. 5 (Levendorskii's realization $\mathrm{Y}_L(\mathfrak{sl}(2|2) \oplus \mathbb{C}^3)$)

The Yangian $\mathrm{Y}_L(\mathfrak{sl}(2|2) \oplus \mathbb{C}^3)$ generated by $h_{i,0}$, $x^{\pm}_{i,0}$, $\tilde{h}_{i,1}$, $x^{\pm}_{i,1}$ with $i = 1, 2, 3$ and the central elements $P^{\pm}_0$, $P^{\pm}_1$. They satisfy the relations of the Lie algebra (Def.2) and

$$[\tilde{h}_{i,1}, h_{j,0}] = 0 , \quad [\tilde{h}_{i,1}, \tilde{h}_{j,1}] = 0 \quad \text{(degree two rels.)}, \tag{14}$$
$$[\tilde{h}_{i,1}, x^{\pm}_{j,0}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,1} , \quad [x^{+}_{i,1}, x^{-}_{j,0}] = \delta_{ij} h_{i,1} \tag{15}$$
$$[x^{\pm}_{i,1}, x^{\pm}_{j,0}] - [x^{\pm}_{i,0}, x^{\pm}_{j,1}] = \pm\frac{1}{2} a_{ij} \{x^{\pm}_{i,0}, x^{\pm}_{j,0}\} \tag{16}$$
$$[x^{\pm}_{2,1}, x^{\pm}_{2,0}] = 0 \tag{17}$$
$$[\tilde{h}_{j,1}, [x^{+}_{j,1}, x^{-}_{j,1}]] = 0 \quad \text{for} \quad j = 1, 3 \tag{18}$$
$$[\tilde{h}_{1,1}, [x^{\pm}_{2,1}, x^{-}_{2,1}]] = 0 \quad \text{(degree three rels.)} \tag{19}$$
$$[[x^{\pm}_{1,1}, x^{\pm}_{2,0}], [x^{\pm}_{3,0}, x^{\pm}_{2,0}]] = P^{\pm}_1 \tag{20}$$

where $h_{i,1}$ in (15) is defined by $h_{i,1} = \tilde{h}_{i,1} + \frac{1}{2}(h_{i,0})^2$.
The Cartan matrix is the same as before.

Yangian

▸ Yangian limit

Proposition 6 (M)

The Yangian $\mathrm{Y}_L(\mathfrak{g})$ has the Hopf algebra structures with the coproducts $\Delta : \mathrm{Y}_L(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Y}_L(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{Y}_L(\mathfrak{g})$ given by

$$\begin{aligned}
\Delta(X) &= X \otimes 1 + 1 \otimes X \quad \textit{for} \quad X \in U(\mathfrak{g}) \\
\Delta(x^+_{2,1}) &= x^+_{2,1} \otimes 1 + 1 \otimes x^+_{2,1} \\
&\quad + h_{2,0} \otimes x^+_{2,0} + E_{12} \otimes E_{31} + E_{34} \otimes E_{42} - E_{14} \otimes P^+_0 \\
&\cdots \quad \textit{(fairly complicated)} \\
\Delta(P^+_1) &= P^+_1 \otimes 1 + 1 \otimes P^+_1 - 2C_0 \otimes P^+_0 \\
\Delta(P^-_1) &= P^-_1 \otimes 1 + 1 \otimes P^-_1 - 2P^-_0 \otimes C_0
\end{aligned}$$

the counits $\epsilon : \mathrm{Y}_L(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$, $\epsilon(X) = 0$ for $X \in \mathrm{Y}_L(\mathfrak{g})$, and the antipodes $\mathrm{S} : \mathrm{Y}_L(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Y}_L(\mathfrak{g})$ satisfying the antipode rels.

c.f. [Beisert, 2004]

Yangian

Introduce the higher degree gens. for $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ in $\mathrm{Y}_L(\mathfrak{g})$ by

$$\begin{aligned}
&x^\pm_{1,r+1} = \pm\frac{1}{2}[\tilde{h}_{1,1}, x^\pm_{1,r}], \quad x^\pm_{2,r+1} = \mp[\tilde{h}_{1,1}, x^\pm_{2,r}], \quad x^\pm_{3,r+1} = \mp\frac{1}{2}[\tilde{h}_{3,1}, x^\pm_{3,r}], \\
&h_{i,r} = [x^+_{i,r}, x^-_{i,0}] \quad (\ i = 1,2,3\ ), \quad P^\pm_r = [[x^\pm_{1,r}, x^\pm_{2,0}], [x^\pm_{3,0}, x^\pm_{2,0}]]. \qquad (21)
\end{aligned}$$

Theorem 7 (M)

The Yangian $\mathrm{Y}_D(\mathfrak{g})$ is isomorphic to $\mathrm{Y}_L(\mathfrak{g})$. The isomorphism $\phi : \mathrm{Y}_D(\mathfrak{g}) \to \mathrm{Y}_L(\mathfrak{g})$ is given by

$$h_{i,r} \mapsto h_{i,r}, \qquad x^\pm_{i,r} \mapsto x^\pm_{i,r}, \qquad P^\pm_r \mapsto P^\pm_r,$$

where the image of ϕ is defined in (21).

Yangian

Theorem 7 allows us to induce the **Hopf algebra structures** to $\mathrm{Y}_D(\mathfrak{g})$ from $\mathrm{Y}_L(\mathfrak{g})$ via the following commutative diagrams,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Y}_D(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\Delta_D"'] & \mathrm{Y}_L(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\Delta"] \\
\mathrm{Y}_D(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{Y}_D(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\phi\otimes\phi"'] & \mathrm{Y}_L(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{Y}_L(\mathfrak{g})
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Y}_D(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathrm{S}_D"'] & \mathrm{Y}_L(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\mathrm{S}"] \\
\mathrm{Y}_D(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\phi"'] & \mathrm{Y}_L(\mathfrak{g})
\end{tikzcd}, \qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Y}_D(\mathfrak{g}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\epsilon_D"'] & \mathrm{Y}_L(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\epsilon"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, equal] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Δ_D: coproduct, S_D: antipode, and ϵ_D: counit in $\mathrm{Y}_D(\mathfrak{g})$.

Corollary 8

$\mathrm{Y}_D(\mathfrak{g})$ has the Hopf alg. structures induced from those of $\mathrm{Y}_L(\mathfrak{g})$.

Quantum affine algebra $\mathrm{U}_{g,q}(\hat{\mathfrak{g}})$

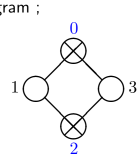
[Beisert,Galleas,M,'12]

- Generators: $\{K_i, E_i, F_i\}_{i=0,1,2,3}$ and $\{U_k, V_k\}_{k=0,2}$ (centers)
- Parity $p : \mathrm{U}_{g,q} \to \mathbb{Z}_2$,

$$p(E_k) = p(F_k) = 1 \quad (k = 0,2), \qquad p(\text{others}) = 0.$$

- Two deformation parameters : g and q
- GCM, Normalized matrix, Dynkin diagram ;

$$(b_{ij}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$



$$(d_i) = \mathrm{diag}(-1,-1,-1,1)$$

Defining relations

- Defining relations : c.f. [Jimbo],[Drinfeld]

$$\begin{aligned}
&\mathrm{K}_1^{-1}\mathrm{K}_k^{-2}\mathrm{K}_3^{-1} = \mathrm{V}_k^2 \qquad (k = 0,2), && (22) \\
&K_i E_j K_i^{-1} = q^{b_{ij}} E_j, \qquad K_i F_j K_i^{-1} = q^{-b_{ij}} F_j, && (23) \\
&[E_j, F_j] = d_j \frac{K_j - K_j^{-1}}{q - q^{-1}}, && (24) \\
&[E_i, F_j] = 0 \quad \text{for} \quad i \neq j, \quad (i,j) \neq (0,2), (2,0). && (25)
\end{aligned}$$

The **centrally extended** relations ;

$$\begin{aligned}
&[E_2, F_0] = -\tilde{g}\left(K_0 - U_2 U_0^{-1} K_2^{-1}\right), && (26) \\
&[E_0, F_2] = +\tilde{g}\left(K_2 - U_0 U_2^{-1} K_0^{-1}\right), && (27)
\end{aligned}$$

where we denote $\tilde{g} := g/\sqrt{1 - g^2(q - q^{-1})^2}$.

Defining relations

- The Serre relations (similar for F's):

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_3] = \mathrm{E}_2\mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_0\mathrm{E}_0 = [\mathrm{E}_2, \mathrm{E}_0] = 0 \\
&\big[\mathrm{E}_j, [\mathrm{E}_j, \mathrm{E}_k]\big] - (q - 2 + q^{-1})\mathrm{E}_j\mathrm{E}_k\mathrm{E}_j = 0
\end{aligned}$$

- **The extended Serre relations:**

$$\begin{aligned}
&\big[[\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_k], [\mathrm{E}_3, \mathrm{E}_k]\big] - (q - 2 + q^{-1})\mathrm{E}_k\mathrm{E}_1\mathrm{E}_3\mathrm{E}_k = g(1 - \mathrm{V}_k^2\mathrm{U}_k^2) \\
&\big[[\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_k], [\mathrm{F}_3, \mathrm{F}_k]\big] - (q - 2 + q^{-1})\mathrm{F}_k\mathrm{F}_1\mathrm{F}_3\mathrm{F}_k = g(\mathrm{V}_k^{-2} - \mathrm{U}_k^{-2})
\end{aligned}$$

where $j = 1,3$, $k = 0,2$.

Note: Introduced U instead of P_0^+ and P_0^-
→ More restricted algebra is considered.

$$\begin{aligned}
q^C &= V_2 \\
P_0^+ &= +g(1 - \mathrm{V}_2^2\mathrm{U}_2^2) \\
P_0^- &= -g(\mathrm{V}_2^{-2} - \mathrm{U}_2^{-2})
\end{aligned}$$

Limits of the deformation parameters

$\mathrm{U}_{g,q}(\hat{\mathfrak{g}})$ has two deformation parameters ;

g : " coupling const. "　　and　　q : q-deformation.

- $g \to 0$ limit: dropping the central extensions.

$$\lim_{g\to 0} \mathrm{U}_{g,q}(\hat{\mathfrak{g}}) \simeq \mathrm{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(2|2))$$

- $q \to 1$ limit: Yangian limit, degenerates XXZ to XXX.

$$\lim_{q\to 1} \mathrm{U}_{g,q}(\hat{\mathfrak{g}}) \simeq \mathrm{Y}_\hbar(\mathfrak{g}) \,, \qquad q = e^\hbar$$

Difficult to see the degeneration of the relations directly.
c.f. [Guay-Ma]

($\because$) Singular limit : Rescale by $1/(1-q)$, then take $q \to 1$

◇ Checked the degeneracy for the fundamental repr. and the coproducts.

19 / 32

Yanian limit of $\mathrm{U}_{g,q}(\hat{\mathfrak{g}})$

Obs.: Considering the limit $q \to 1$ of fund. rep., we see that

$$F_0 \to [[E_3, E_2], E_1] =: -E_{321} \,, \qquad E_0 \to [[F_3, F_2], F_1] =: F_{321} \,.$$

Then their differences divided by $(q-1)$ could give something finite. In fact, we found the level-1 Yangian as

$$\lim_{q\to 1} \frac{-F_0 - E_{321}}{2ig(q-1)} = \widehat{E}_{321} + \frac{i}{2}(1+U^2)F_2$$

$$\lim_{q\to 1} \frac{E_0 - F_{321}}{2ig(q-1)} = -\widehat{F}_{321} + \frac{i}{2}(1+U^{-2})E_2$$

1. Evaluation rep.: $\widehat{E}_{321} \simeq uE_{321}$

$$\lim_{q\to 1} \frac{-F_0 - E_{321}}{2ig(q-1)} \simeq uE_{321} + \frac{i}{2}(1+U^2)F_2$$

2. Coproduct Δ:　▸ Yangian Δ

$$\lim_{q\to 1} \frac{-\Delta(F_0) - \Delta(E_{321})}{2ig(q-1)} = \Delta\big(\widehat{E}_{321} + \frac{i}{2}(1+U^2)F_2\big)$$

20 / 32

Affine Lie Superalgebra $\widehat{\mathfrak{sl}}(2|2)$

Central extensions and the Hopf algebraic structures

Basic concepts

Generalized Verma modules

21 / 32

Basic concepts (Base and Odd reflection)

Def. 9 (Base)

$\Sigma \subset \Delta$ (lin. indep.) is called a **base** if $^\exists e_\beta \,, f_\beta (\beta \in \Sigma)$ satisfying
(1) $\{ e_\beta \,, f_\beta \,, h \,|\, \beta \in \Sigma \,, h \in \mathfrak{h} \}$ generate $\mathfrak{g}$,
(2) $[e_\beta, f_\gamma] = 0$ if $\beta \neq \gamma$.
Denote the set of bases by $\mathbb{B}$.

Def. 10 (Odd reflection)

Let Σ be a base and $\tau \in \Sigma_{\bar{1}}$. For each $\beta \in \Sigma$, the **odd reflection** $r_\tau(\beta)$ is defined by

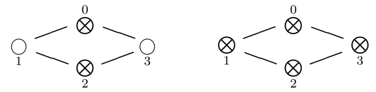
$$r_\tau(\beta) = \begin{cases} -\beta & \beta = \tau \\ \beta + \tau & \beta \neq \tau \wedge (\beta, \tau) \neq 0 \\ \beta & \beta \neq \tau \wedge (\beta, \tau) = 0 \end{cases}$$

Note: $r_\tau(\Sigma)$ is also a base for any $\tau \in \Sigma_{\bar{1}}$. Hence, the odd refs. define transformations btw. bases.
c.f. Weyl groupoid [Heckenberger,Yamane]

22 / 32

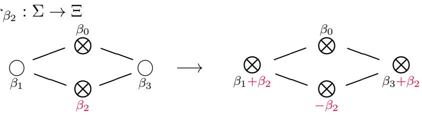
Odd reflections for $\widehat{\mathfrak{sl}}(2|2)$　▸ gen. Verma

Two typical types of Dynkins: $\Sigma =$ "XOXO" and $\Xi =$ "XXXX"

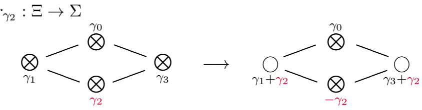


Odd reflections interchange Σ and Ξ .

- $r_{\beta_2} : \Sigma \to \Xi$



- $r_{\gamma_2} : \Xi \to \Sigma$



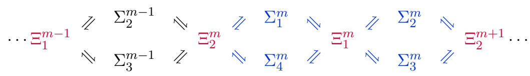
23 / 32

Odd reflections for $\widehat{\mathfrak{sl}}(2|2)$

Complete list of Bases for $\widehat{\mathfrak{sl}}(2|2)$ ($\delta = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i \,, m \in \mathbb{Z}$)

$$\Sigma_1^m = \{\ \alpha_0 + m\delta \,, \alpha_1 \,, \alpha_2 - m\delta \,, \alpha_3\ \} \quad (\text{c.f. } \Pi = \Sigma_1^0)$$
$$\Sigma_2^m = \{\ \alpha_1 \,, -\alpha_0 - \alpha_1 - m\delta \,, \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \,, \alpha_0 + \alpha_3 + m\delta\ \}$$
$$\Sigma_3^m = \{\ \alpha_3 \,, \alpha_0 + \alpha_1 + m\delta \,, \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3 \,, -\alpha_0 - \alpha_3 - m\delta\ \}$$
$$\Sigma_4^m = \{\ -\alpha_0 - m\delta \,, \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \,, -\alpha_2 + m\delta \,, \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3\ \}$$
$$\Xi_1^m = \{\ -\alpha_0 - m\delta \,, \alpha_0 + \alpha_1 + m\delta \,, \alpha_2 - m\delta \,, \alpha_0 + \alpha_3 + m\delta\ \}$$
$$\Xi_2^m = \{\ \alpha_0 + m\delta \,, \alpha_1 + \alpha_2 - m\delta \,, -\alpha_2 + m\delta \,, \alpha_2 + \alpha_3 - m\delta\ \}$$

Periodicity: $\pm\delta$-shift is obtained by **4 steps .**



24 / 32

Algebraic structures assoc. with Bases

Three hierarchies assoc. with a base Σ:

Root Σ $\to$ **Algebra** $\mathfrak{g}_\Sigma^+$ $\to$ **Module** M_Σ .

- **Triangular decomposition** assoc. with a base Σ:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\Sigma^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\Sigma^-$$

where

$$\mathfrak{g}_\Sigma^\pm = \bigoplus_{\gamma \in \pm\Delta_\Sigma^+} \mathfrak{g}^\gamma , \quad \Delta_\Sigma^+ = \Delta \cap Q_\Sigma^+ , \quad Q_\Sigma^+ = \sum_{\gamma \in \Sigma} \mathbb{Z}_{\geq 0}\gamma$$

- **Cartan matrices** assoc. w/ $\Sigma = \mathrm{XOXO}$ and $\Xi = \mathrm{XXXX}$

$$A_\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} , \qquad A_\Xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} ,$$

can be symm. by $D_\Sigma = \mathrm{diag}(1,1,1,-1)$ and $D_\Xi = \mathrm{diag}(1,1,-1,-1)$, resp.

Algebraic structures assoc. with Bases

- **Weyl vector** ρ_Σ assoc. with a base Σ .
  1. For $\Pi \in \mathbb{B}$, take $\rho_\Pi \in \mathfrak{h}^*$ s.t. $(\rho_\Pi, \alpha_i) = \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_i)\,, (i \in I)$.
  2. For any $\Sigma \in \mathbb{B}$, set $\rho_\Sigma := \rho_\Pi + \sum_{\beta \in \Delta_\Pi^+ \cap \Delta_\Sigma^-} \beta$.

Note:

- when $\Sigma' = r_\tau(\Sigma) \in \mathbb{B}$ with $\tau \in \Sigma_{\bar{1}}$, $\rho_{\Sigma'} = \rho_\Sigma + \tau$.
- holds that $(\rho_\Sigma, \gamma) = \frac{1}{2}(\gamma, \gamma) \quad ({}^\forall\gamma \in \Sigma)$.
- For $\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \in \mathbb{B}$, we can take ρ_Π as

$$\rho_\Pi = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3) .$$

Principal roots

Def. 11 (Principal root)

An even root $\gamma \in \Delta$ is called a **principal root** if there exists a base $\Sigma \in \mathbb{B}$ obtained from Π by odd reflections s.t. $\gamma \in \Sigma$.

- **i.e.** principal roots $=$ all even roots in $\bigcup_{\Sigma \in \mathbb{B}} \Sigma$.
- The list of bases for $\widehat{\mathfrak{sl}}(2|2)$,

$$\begin{aligned}
\Sigma_1^m &= \{\ \alpha_0 + m\delta\,, \alpha_1\,, \alpha_2 - m\delta\,, \alpha_3\ \} \quad (\text{c.f. } \Pi = \Sigma_1^0) \\
\Sigma_2^m &= \{\ \alpha_1\,, -\alpha_0 - \alpha_1 - m\delta\,, \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2\,, \alpha_0 + \alpha_3 + m\delta\ \} \\
\Sigma_3^m &= \{\ \alpha_3\,, \alpha_0 + \alpha_1 + m\delta\,, \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3\,, -\alpha_0 - \alpha_3 - m\delta\ \} \\
\Sigma_4^m &= \{\ -\alpha_0 - m\delta\,, \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2\,, -\alpha_2 + m\delta\,, \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3\ \} \\
\Xi_1^m &= \{\ -\alpha_0 - m\delta\,, \alpha_0 + \alpha_1 + m\delta\,, \alpha_2 - m\delta\,, \alpha_0 + \alpha_3 + m\delta\ \} \\
\Xi_2^m &= \{\ \alpha_0 + m\delta\,, \alpha_1 + \alpha_2 - m\delta\,, -\alpha_2 + m\delta\,, \alpha_2 + \alpha_3 - m\delta\ \} ,
\end{aligned}$$

tells us that the principal roots are

$$\{\ \alpha_1\,, \underbrace{\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3}_{\delta - \alpha_1}\,, \alpha_3\,, \underbrace{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}_{\delta - \alpha_3}\ \} .$$

Weyl group

Def. 12 (Weyl group)

The **Weyl group** W is defined to the subgroup of $\mathrm{GL}(\mathfrak{h}^*)$ generated by the even reflections r_β for the **principal root** β .

- In $\widehat{\mathfrak{sl}}(2|2)$ case, the principal roots are

$$\{\ \alpha_1\,, \underbrace{\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3}_{\delta - \alpha_1}\,, \alpha_3\,, \underbrace{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}_{\delta - \alpha_3}\ \} ,$$

- The Weyl group W for $\widehat{\mathfrak{sl}}(2|2)$ coincides with that of $\widehat{\mathfrak{sl}}_2 \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}_2$.

Generalized Verma modules

Three hierarchies assoc. with a base Σ:

Root Σ $\to$ **Algebra** $\mathfrak{g}_\Sigma^+$ $\to$ **Module** M_Σ .

Notations: For a base $\Sigma \in \mathbb{B}$,

- $\mathfrak{b}_\Sigma = \mathfrak{g}_\Sigma^+ \oplus \mathfrak{h}$: Borel subalg. assoc. with Σ .
- $M_\Sigma(\Lambda)$: Verma mod. with h.w. $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ defined from $\mathfrak{b}_\Sigma$.
- $L_\Sigma(\Lambda)$: the irreducible quotient of $M_\Sigma(\Lambda)$.
- $\mathfrak{p}_{\Sigma;\tau} = \mathfrak{b}_\Sigma \oplus \mathfrak{g}^{-\tau}$: parabolic subalg. for $\tau \in \Sigma_{\bar{1}}$.
- $\mathbb{C}\mathbf{1}_\Lambda$: 1-dim $\mathfrak{p}_{\Sigma;\tau}$-mod. with $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ s.t. $(\Lambda, \tau) = 0$, defined by

$$h.\mathbf{1}_\Lambda = \Lambda(h)\mathbf{1}_\Lambda \ (h \in \mathfrak{h}) , \quad \mathfrak{g}_\Sigma^+\mathbf{1}_\Lambda = \{0\} , \quad \mathfrak{g}^{-\tau}\mathbf{1}_\Lambda = \{0\} .$$

Def. 13 (Generalized Verma module with (Σ, τ, Λ))

$$N_\Sigma(\Lambda; \tau) \equiv U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_{\Sigma;\tau})} \mathbb{C}\mathbf{1}_\Lambda$$

Note: $f_\tau\mathbf{1}_\Lambda \in M_\Sigma(\Lambda)$ is a singular vec. if $(\Lambda, \tau) = 0$. Hence,

$$M_\Sigma(\Lambda)/U(\mathfrak{g})f_\tau\mathbf{1}_\Lambda \simeq N_\Sigma(\Lambda; \tau) .$$

Generalized Verma modules: $\mathfrak{sl}(2|2)$ case

Dynkin

Difficulty:

There are **two** orthogonal isotropic odd roots **(defects)** .

c.f. $\widehat{\mathfrak{sl}}(2|2)$ is the defect$=1$ case. [Koga]

We are starting with the **non-affine** case $\mathfrak{sl}(2|2)$.

- Three types of Dynkins: $\Pi =$ OXO, $\Sigma =$ XOX, and $\Xi =$ XXX.

$$\underset{1}{\bigcirc} - \underset{2}{\bigotimes} - \underset{3}{\bigcirc}, \quad \underset{1}{\bigotimes} - \underset{2}{\bigcirc} - \underset{3}{\bigotimes}, \quad \underset{1}{\bigotimes} - \underset{2}{\bigotimes} - \underset{3}{\bigotimes}$$

- List of bases for $\mathfrak{sl}(2|2)$. Principal roots are $\{\alpha_1, \alpha_3\}$.

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \{\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\ \} \\
\Pi_2 &= \{\ \alpha_3, -\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3, \alpha_1\ \} \\
\Sigma_1 &= \{\ -\alpha_1-\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2+\alpha_3\ \} \\
\Sigma_2 &= \{\ \alpha_1+\alpha_2, \alpha_3, -\alpha_2-\alpha_3\ \} \\
\Xi_1 &= \{\ \alpha_1+\alpha_2, -\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3\ \} \\
\Xi_2 &= \{\ -\alpha_1-\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, -\alpha_2-\alpha_3\ \}
\end{aligned}$$

Generalized Verma modules: $\mathfrak{sl}(2|2)$ case

- Weyl group: $W = W_{\mathfrak{sl}_2} \times W_{\mathfrak{sl}_2}$.
- **Odd reflections:**

$$\begin{array}{ccccc}
 & \nearrow\!\!\!\nearrow & \Sigma_1 & \searrow\!\!\!\searrow & \\
\Pi_1 \rightleftharpoons \Xi_1 & & & & \Xi_2 \rightleftharpoons \Pi_2 \\
 & \searrow\!\!\!\searrow & \Sigma_2 & \nearrow\!\!\!\nearrow &
\end{array}$$

- We are expecting the gen. Verma mods. are
  - $M_\Pi(\Lambda)/U(\mathfrak{g})f_{\alpha_2}\mathbf{1}_\Lambda$
  - $M_\Sigma(\Lambda)/(U(\mathfrak{g})f_{\alpha_1+\alpha_2}\mathbf{1}_\Lambda + U(\mathfrak{g})f_{\alpha_2+\alpha_3}\mathbf{1}_\Lambda)$
- needs more precise calculations $\cdots$
- We hope to report the complete answers at the 38th Lie Algebra Summer Seminar!

References

References

- K. Iohara and Y. Koga, *Central extensions of Lie superalgebras*, Comment. Math. Helv. **76** (2001), 110–154.
- N. Beisert, *The* $\mathfrak{su}(2|2)$ *dynamic* S*-matrix*, Adv. Theor. Math. Phys. **12** (2008), 945–979.
- M and A. Molev, *Representations of centrally extended Lie superalgebra* $\mathfrak{psl}(2|2)$, J. Math. Phys. **55** (2014) 091704 [arXiv:1405.3420 [math.RT]].
- M, *Drinfeld realization of the centrally extended* $\mathfrak{psl}(2|2)$ *Yangian algebra with the manifest coproducts*, arXiv:2208.11889[math.QA]
- S. Z. Levendorskii, *On generators and defining relations of Yangians*, Journal of Geometry and Physics, Volume 12, Issue 1, 1993, Pages 1-11, ISSN 0393-0440.
- F. Spill and A. Torrielli, *On Drinfeld's second realization of the AdS/CFT su(2|2) Yangian*, J. Geom. Phys. **59** (2009) 489 [arXiv:0803.3194 [hep-th]].

References

- N. Beisert, W. Galleas and M, *A Quantum Affine Algebra for the Deformed Hubbard Chain*, J. Phys. A **45** (2012), 365206 [arXiv:1102.5700 [math-ph]].
- I. Heckenberger, F. Spill, A. Torrielli and H. Yamane, *Drinfeld second realization of the quantum affine superalgebras of* $D^{(1)}(2,1;x)$ *via the Weyl groupoid*, RIMS Kokyuroku Bessatsu B **8** (2008), 171 [arXiv:0705.1071 [math.QA]].

Extensions of finite-dimensional coideal subalgebras

芝浦工業大学　　清水健一

目次

1 はじめに

$\Bbbk$ を体とし, ‘代数’ といえば $\Bbbk$ 上の結合的かつ単位的な多元環のことを意味する. A/B を代数の拡大とする (つまり A を代数とし, B をその部分代数とする). A および B を右 B-加群とみたものを, それぞれ, A_B および B_B で表す. このとき $\mathrm{Hom}_B(A_B, B_B)$ は自然な B-A-双加群の構造を持つ (式 (4.1) を見よ). A が右 B-加群として有限生成射影的であり, $\mathrm{Hom}_B(A_B, B_B)$ が B-A-双加群として A と同型であるとき, 拡大 A/B は**フロベニウス拡大** (Frobenius extension) であるという.

体 $\Bbbk$ 上のフロベニウス代数は, $\Bbbk$ のフロベニウス拡大のことに他ならない. 一般の代数の拡大のフロベニウス性は, 加群論的な立場から見ると意義を理解しやすいかもしれない. 代数 R に対して ${}_R\mathfrak{M}$ で左 R-加群の圏を表す. 代数の拡大 A/B に対し, 作用を B に制限する関手 $\mathrm{Res}_{A/B} : {}_A\mathfrak{M} \to {}_B\mathfrak{M}$ がある. A/B がフロベニウス拡大であるための必要十分条件は, 関手 $\mathrm{Res}_{B/A}$ の左随伴と右随伴が同型であることである.

局所コンパクト群上のモジュラー関数の代数的類似物として, 有限次元ホップ代数に対してもモジュラー関数が定義される. Fischman, Montgomery, Schneider は有限次元ホップ代数の拡大のフロベニウス性はモジュラー関数によって簡単に判定できることを示した [FMS97]. ホップ代数の理論においては, ホップ代数の ‘部分構造’ として, 部分ホップ代数よりも, 余イデアル部分代数と呼ばれるものを考える方が自然な場合がある. 本稿の目的は, 柴田大樹との共同研究において得られた, Fischman らの結果の有限次元右余イデアル部分代数への一般化を紹介することである. 我々の結果は土井 [Doi97a, Doi97b] の結果とも関係しており, これについては 4.6 節の最後で議論する.

1.1. 相対ホップ加群. 我々の理論は, 相対ホップ加群に関する Skryabin [Skr08] の結果を本質的に用いる. そこで, まず相対ホップ加群の定義とそのホップ代数の理論における位置づけについて, 簡単に復習しておく. 代数であると同時に (余結合的かつ余単位的な) 余代数であり, 余代数としての構造射が代数射となっているものを双代数と呼ぶのであった. H を双代数とし, その余積を $\Delta : H \to H \otimes H$, 余単位射を $\varepsilon : H \to \Bbbk$ で表す (ただし $\otimes = \otimes_{\Bbbk}$). $h \in H$ の余積を表示するために,

$$\Delta(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}, \quad \Delta(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} = h_{(1)} \otimes h_{(2)} \otimes h_{(3)} = h_{(1)} \otimes \Delta(h_{(2)})$$

のような Sweedler 記法を用いる．任意の $h \in H$ に対して $S(h_{(1)})h_{(2)} = \varepsilon(h)1_H = h_{(1)}S(h_{(2)})$ を満たすような線形写像 $S : H \to H$ を H の**対合射** (antipode) と呼ぶ．対合射は存在すれば一意的であり，しかも反代数射かつ反余代数射である．**ホップ代数** (Hopf algebra) とは，対合射を持つ双代数のことである．

以下，H をホップ代数とする．右 H-余加群 M が与えられたとき，H の余作用を $\delta_M : M \to M \otimes H$ で表す．また，$\delta_M(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)}$ のように，余作用を Sweedler 記法に類似した方法で表すこともある．M と N が右 H-余加群であるとき，$M \otimes N$ は

$$\delta_{M\otimes N}(m \otimes n) = m_{(0)} \otimes n_{(0)} \otimes m_{(1)}n_{(1)} \quad (m \in M, n \in N)$$

によって定義される余作用によって右 H-余加群となる．**右 $\boldsymbol{H}$-余加群代数**とは，右 H-余加群の構造を持つ代数 A であって，積 $A \otimes A \to A$ および単位射 $\Bbbk \to A$ が右 H-余加群の射となっているようなもののことである．言い換えれば，$\delta_A(ab) = a_{(0)}b_{(0)} \otimes a_{(1)}b_{(1)}$ $(a, b \in A)$ および $\delta_A(1_A) = 1_A \otimes 1_H$ が成り立つということである．以下で導入する余イデアル部分代数は，重要なクラスの余加群代数である．

定義 1.1. H の**右余イデアル** (right coideal) とは，H 自身を余積によって右 H-余加群とみたときの部分余加群のことである．H の部分代数で，なおかつ H の右余イデアルでもあるようなものを，H の**右余イデアル部分代数** (right coideal subalgebra) と呼ぶ．

H 上の**右ホップ加群** (right Hopf module) とは，右 H-余加群の構造を持つような右 H-加群であって，余作用が右 H-加群の射となっているようなもののことである．Larson-Sweedler [LS69] による**ホップ加群の基本定理**は，右ホップ加群の圏はベクトル空間の圏 Vec と同値であることを主張する．この定理から有限次元ホップ代数が積分を持つことが示されるなど [LS69]，ホップ加群の考え方はホップ代数の理論において極めて基本的なものである．さて，ホップ加群の一般化として——

定義 1.2. 右 H-余加群代数 A と B に対し，圏 ${}_A\mathfrak{M}^H_B$ を以下のようにして定義する．この圏の対象は，右 H-余加群の構造を持つ A-B-双加群 M であって，

$$\delta_M(amb) = a_{(0)}m_{(0)}b_{(0)} \otimes a_{(1)}m_{(1)}b_{(1)} \quad (a \in A, b \in B, m \in M)$$

を満たすようなものである．この圏の射は，左 A-作用，右 B-作用，右 H-余作用のすべてを保つような線形写像である．A または B が $\Bbbk$ のとき，${}_A\mathfrak{M}^H_{\Bbbk} = {}_A\mathfrak{M}^H$，${}_{\Bbbk}\mathfrak{M}^H_B = \mathfrak{M}^H_B$ などと略記する．

右ホップ加群は $\mathfrak{M}^H_H$ の対象のことに他ならない．圏 ${}_A\mathfrak{M}^H$ や $\mathfrak{M}^H_B$ は，A と B が H の部分ホップ代数である場合に竹内 [Tak72] によって考察され，その後 [Tak79] において，A や B が余イデアル部分代数である場合に一般化されている．我々は A と B が余イデアル部分代数とは限らない場合も考えるが，これらの論文に倣い，${}_A\mathfrak{M}^H$ や $\mathfrak{M}^H_B$ の対象を**相対ホップ加群**

(relative Hopf module) と呼ぶことにする．圏 ${}_A\mathfrak{M}^H_B$ の対象は**相対ホップ双加群** (relative Hopf bimodule) とでも呼ぶべきであろう．

H を可換ホップ代数とし, H の部分ホップ代数 A に対して $A^+ = \mathrm{Ker}(\varepsilon|_A)$ とおく．竹内 [Tak72] は, 対応 $A \mapsto A^+H$ が, H の部分ホップ代数と H の 'normal Hopf ideal' の間の 1 対 1 対応を与えるということを示した．この対応の単射性を示す際に本質的なのが, 可換ホップ代数は部分ホップ代数の上の加群として忠実平坦であるという観察 [Tak72, Theorem 3.1] である．相対ホップ加群の考え方は, このことを示すために用いられた．相対ホップ加群の考え方は, その後, ホップ代数が部分代数の上の加群としてどのような性質を持っているのかということを調べるために有効に使われるようになる．やや年代が下るが, 有限次元ホップ代数は部分ホップ代数の上の加群として自由であることを主張する Nichols-Zoeller の定理 [NZ89] などは, その一例と言えよう．

ここまでの話では, ホップ代数の部分代数として部分ホップ代数しか考えられていない．余イデアル部分代数は, 代数群による商空間のホップ代数的な対応物として生じる．アフィン代数群スキーム G とその閉部分群スキーム H に対し, 剰余類の空間 $X := H\backslash G$ を考えたい．一般の場合は様々な難しさがあるが, 仮に X がアフィンであったとすれば, 商射 $G \to X$ の双対として $\mathcal{O}(G)$ の部分代数が対応するはずである．ここで余イデアル部分代数の概念が自然に出現する．竹内 [Tak79] で説明されているところによれば, G の閉部分群スキームによる商でアフィンであるようなものは, 余イデアル部分代数 A で $\mathcal{O}(G)$ が A-加群として忠実平坦であるようなものと対応するのである．

1980 年代半ばに量子群が発見されて以降, 代数群の理論が可換とは限らないホップ代数に対して如何に一般化されるのかという問題が重要になった．Lie 群上の等質空間を量子群論的な意味で '量子化' する試みにおいて見いだされた様々な具体例が部分ホップ代数ではなく余イデアル部分代数であったという事実もあり, 余イデアル部分代数という概念は '量子等質空間' の数学的定式化としての役割を確立していくことになる [MS99]．近年においては, 例えば [CW14] の冒頭などを見るに, 「ホップ代数の理論における部分群に対応する概念は余イデアル部分代数である」という考え方も受け入れられていると言ってよかろう．

1.2. 相対ホップ加群の自由性. H をホップ代数, A を右 H-余加群代数とする．本稿で必要となる Skryabin [Skr07] の結果は, 適当な条件の元で, ${}_A\mathfrak{M}^H$ や $\mathfrak{M}^H_A$ の対象が射影的 A-加群や自由 A-加群になるというものである．ここでその '適当な条件' とやらを説明しておきたいが, そのために多少の準備が必要である．環 R に対し, $\mathrm{Mat}_n(R)$ で R 上の n 次行列環を表す．

定義 1.3. 等式 $ab = 1$ を満たす任意の $a, b \in R$ について $ba = 1$ が成り立つとき, 環 R は**デデキント有限** (Dedekind finite) であるという．任意の自然数 n に対して環 $\mathrm{Mat}_n(R)$ がデデキント有限であるとき, R は**弱有限** (weakly finite) あるいは**安定有限** (stably finite [Lam99]) であ

るという.

定義 1.4. A を右 H-余加群代数とする. A のイデアル I で $\Delta(I) \subset I \otimes H$ を満たすものを A の ***H*-イデアル**という. 非自明な H-イデアルを持たないような右 H-余加群代数は ***H*-単純**であるという.

Skryabin によれば, A が H-単純な半局所環であり, さらに

$$A \text{ の任意の極大イデアル } \mathfrak{m} \text{ に対して } (A/\mathfrak{m}) \otimes H \text{ は弱有限環である} \tag{1.1}$$

という条件が成り立つとき, ${}_A\mathfrak{M}^H$ や $\mathfrak{M}_A^H$ の任意の対象は射影的 A-加群である [Skr07, Theorem 3.5]. さらに, $A/\mathfrak{m}$ が斜体となるような A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ がひとつでも存在すれば, ${}_A\mathfrak{M}^H$ や $\mathfrak{M}_A^H$ の任意の対象は自由 A-加群となる [Skr07, Corollary 3.6].

本稿では, この Skryabin の結果を少し弱めた形で証明する. Skryabin の証明には, 相対ホップ加群と関連して $(A/I) \otimes H$ (ただし I は A のイデアル) という形の環が現れる. この環が弱有限であると話が早いのだが, そのようなことは [Skr07] では仮定されていないから, 極大イデアルを使ったテクニカルな議論がされることになる. さて, 弱有限環の部分環は弱有限であるから, (1.1) が成り立つならば H も弱有限である. 本稿では, (1.1) の代わりに, A が '何らかの非自明な多項式恒等式を満たす' ことを仮定することにした. このような代数は PI 代数と呼ばれる (定義 2.3). 実は, もし H が弱有限で A が PI 代数であれば,

$$A \text{ の任意のイデアル } I \text{ に対して } (A/I) \otimes H \text{ は弱有限環である} \tag{1.2}$$

ということが成立し, 特に条件 (1.1) も成立するのである.

仮定を強めたことによって零れ落ちてしまう具体例があるかどうかは, 正直なところよく分からない (存在するとは思うのだけど, どのように構成すればよいのか見当もつかなかった). 実際のところ, 本稿での応用に関しては, 'H は弱有限かつ A は半局所 PI 代数である' という設定でやっておけば十分である. 仮定を強めたことにより, 議論において本質的な部分が際立つとともに, 仮定のわかりにくさも多少拭えることと思われる.

1.3. 本稿の構成. 以上を踏まえて本稿の構成を述べる. 前節で 'H が弱有限で A が PI 代数であれば (1.2) が成り立つ' と述べたが, このことは明らかなことではない. 証明には PI 代数に関する Montgomery [Mon83] の結果が本質的である. 曰く, PI 代数と弱有限代数のテンソル積は弱有限である. ——第 2 章では, この結果を証明するために必要となる PI 代数に関する結果を self-contained に述べる. これに加えて, PI 代数の理論において重要な結果である Regev の定理も紹介する. 本稿を書いている途中では Regev の定理も必要になると思っていたのだが, 実は要らなかった. 勿体ないから消さないでおく.

第 3 章では, [Skr06, Skr07] から, Skryabin のいくつかの結果を紹介する. 3.1 節から 3.3 節は, それらの結果を証明するために必要な環論的準備である. 3.4 節では, 弱有限ホップ代数の対合射は単射であるという Skryabin [Skr06, Theorem A] の結果の証明を解説する. 続く 3.5 節では, 相対ホップ加群の自由性に関する Skryabin [Skr07, Theorem 3.5] の結果の証明を, 少しだけ仮定を強めた形で与える. 最後の 3.6 節では, [Skr07] から H-単純性の十分条件を紹介し, 特に, 弱有限ホップ代数の有限次元右余イデアル部分代数は H-単純であることを示す.

第 4 章では, フロベニウス拡大とフロベニウス代数についての基本的な結果を述べた後, 本稿の主結果について説明する. H を弱有限ホップ代数, A を H の有限次元右余イデアル部分代数とする. Skryabin [Skr07] の結果より, A はフロベニウス代数になるということがわかる. フロベニウス性を用いて, A 上のモジュラー関数 $\alpha_A : A \to \Bbbk$ とコモジュラス $\mathbf{g}_A \in H^{\times}$ を定義する. 実は A の中山自己同型 ν_A は,

$$\nu_A(a) = \mathbf{g}_A^{-1} S^2(a \leftharpoonup \alpha_A)\mathbf{g}_A \quad (a \in A)$$

で与えられる (定理 4.16). さて, B を H の右余イデアル部分代数で $B \subset A$ を満たすようなものとする. 本稿の主結果は, A/B がフロベニウス拡大であるための必要十分条件は

$$\text{(i) } \alpha_A|_B = \alpha_B \quad \text{および} \quad \text{(ii) } \mathbf{g}_B^{-1}\mathbf{g}_A \in C_H(B)^{\times} \cdot A^{\times}$$

が成り立つことである, というものである (定理 4.19). ただし, $C_H(B)$ は B の H における中心化代数である. この結果と土井 [Doi97a, Doi97b] の結果との関係を議論した後, いくつかの例を与える.

1.4. 謝辞. 本研究は JSPS 科研費 (JP20K03520) の助成を受けたものである. 本稿は, 第 37 回リー代数サマーセミナーにおける筆者の講演に基づく. 同セミナーの世話人の福井大学の古閑義之さん, 松本拓也さんの両氏には, この場を借りて厚く御礼申し上げたい.

2 多項式恒等式を満たす代数について

2.1. PI 代数の定義. $\Bbbk$ を可換環とし, A を $\Bbbk$ 上の代数とする. $\Bbbk\langle X_1, \cdots, X_n\rangle$ で $X_1, \cdots, X_n$ を変数とする $\Bbbk$ 上の非可換多項式環を表す. 多項式 $P \in \Bbbk\langle X_1, \cdots, X_n\rangle$ の変数 X_i $(i = 1, \cdots, n)$ に $a_i \in A$ を代入することで, A の要素 $P(a_1, \cdots, a_n)$ が得られる. 任意の $a_1, \cdots, a_n \in A$ に対して $P(a_1, \cdots, a_n) = 0$ が成り立つとき, 多項式 P は A 上の**多項式恒等式** (polynomial identity) であるという. このとき “A において多項式恒等式 $P = 0$ が成立する” とか “A は $P = 0$ を満たす” などと言うこともある.

自明なことだが, 可換代数は $P(X, Y) = [X, Y]$ $(:= XY - YX)$ を多項式恒等式に持つ. 次の例は, 簡単なのだが, ちょっとびっくりするかもしれない.

補題 2.1 (Hall's identity)**.** R を可換環とする．$\mathrm{Mat}_2(R)$ は, 5 次斉次多項式

$$\begin{aligned}P(X,Y,Z) = XYXYZ - XYYXZ - YXXYZ + YXYXZ \\ - ZXYXY + ZXYYX + ZYXXY - ZYXYX\end{aligned}$$

を多項式恒等式に持つ.

証明. 実は $P(X,Y,Z) = [[X,Y]^2, Z]$ である．行列 $X,Y,Z \in \mathrm{Mat}_2(R)$ を任意にとる．$E \in \mathrm{Mat}_2(R)$ を単位行列とする．$A := [X,Y]$ のトレースはゼロだから, Caylay-Hamilton の定理より $A^2 = -\det(A)E$ が成り立つ．右辺は $\mathrm{Mat}_2(R)$ の中心に属するから, $P(X,Y,Z) = [A^2, Z] = 0$. □

非自明な多項式恒等式を持つような $\Bbbk$-代数を PI 代数 (polynomial identity algebra), 係数環が $\mathbb{Z}$ の場合は PI 環と呼びたいのだが, この素朴な定義には問題点がある．例えば, $n > 1$ を整数とし, 可換環 $\Bbbk$ において $n = 0$ であると仮定する．このとき, 任意の $\Bbbk$ 代数は $P(X) = nX \in \mathbb{Z}\langle X\rangle$ を多項式恒等式に持つ PI 環となってしまう．これでは対象が広範に過ぎ, PI 環に対する一般的な理論は望むべくもなかろう.

このようなものを例から除外するため, 多項式 P には何らかの制限が課されるべきである．しかしながら, どのような制限をつければよいのかについては少々議論を要する．例えば Rowen [Row80, Definition 1.1.17] では, PI 環は, いずれかの項の係数が 1 であるような多重線形多項式 (multilinear polynomial) を満たすことが要求されている．ここで多重線形多項式というのは, 各項に現れる変数の次数がちょうど 1 であるような多項式である．今は非可換な多項式を考えているから, その一般形は

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} c_\sigma X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(m)} \quad (c_\sigma \text{ は係数環の要素}, \mathfrak{S}_m \text{ は } m \text{ 次の対称群}) \tag{2.1}$$

の形の多項式になる．これでは補題 2.1 の $\mathrm{Mat}_2(R)$ が PI 環の例ではなくなってしまうのではないかと懸念されるかもしれないが, 実は大丈夫. 以下のようなテクニックが知られている.

補題 2.2 (multilinearization; see [Row80])**.** R を $\Bbbk$-代数とし, R が満たす非自明な $\Bbbk$-係数多項式 P が存在すると仮定する．このとき, R が満たす非自明な多重線形多項式 Q であって, その係数の集合は P の係数の集合と同じであるようなものが存在する.

証明. $P(X_1, \cdots, X_n)$ を R が満たす非自明な $\Bbbk$-係数多項式とする．必要なら P を $X_i \cdot P(X_1, \cdots, X_n)$ に置き換えることで, P のすべての項は各変数 X_i に関して 1 次以上であると仮定して良い．さて, 多項式 P が X_n に関して次数 $r > 1$ であると仮定しよう．このとき

$$\begin{aligned}Q(X_1, \cdots, X_{n+1}) = P(X_1, \cdots, X_{n-1}, X_n + X_{n+1}) - P(X_1, \cdots, X_{n-1}, X_n) \\ - P(X_1, \cdots, X_{n-1}, X_{n+1})\end{aligned}$$

とおくと, Q の各項における X_n と X_{n+1} に関する次数は $(r-1)$ となる．環 R は恒等式 $Q=0$ を満たし, Q の係数の集合と P の係数の集合は等しい．表記の都合上 X_n に関して話をしたが, すべての変数に対して同様の操作が可能である．この操作を繰り返すことで, 最終的には補題の主張にあるような多重線形多項式が得られる． □

さて, 結局 PI 代数および PI 環をどう定義するかという話であるが, 本稿では上で触れた Rowen [Row80] の定義を採用しておくことにする．すなわち,

定義 2.3. $\Bbbk$ を可換環, R を $\Bbbk$-代数とする．いずれかの項の係数が 1 であるような $\Bbbk$-係数多重線形多項式を R が満たすとき, R は $\Bbbk$ 上の **PI 代数**であるという．そして, そのような多項式のうちで次数が最小のものの次数を R の **PI 次数** (PI degree) と呼び, PI-deg(R) と表す．$\mathbb{Z}$ 上の PI 代数を **PI 環**と称する．

この定義の下では, $\Bbbk$-代数 R が非自明な $\Bbbk$-係数多項式恒等式 $P=0$ を満たすとしても, PI 代数になるとは限らない．しかし, もし P のいずれかの項の係数が $\Bbbk$ の可逆元であるならば, 補題 2.2 の手法により, R は (定義 2.3 の意味で) PI 代数であることが示せる．特に, $\Bbbk$ が体ならば, 補題 2.1 の後で言及した '素朴な定義' を採用しても問題は生じない．

さて, PI 代数の定義がはっきりしたところで, 非自明な例を紹介しておくことにしよう．以下では $\Bbbk$ を可換環とし, 代数といえば $\Bbbk$ 上の代数のことを意味する．

補題 2.4. その中心の上の加群として有限生成であるような代数は, PI 代数である．特に, $\Bbbk$-加群として有限生成であるような代数は, PI 代数である．

証明．R を代数とし, その中心を Z で表す．R は Z-加群として有限個の $e_1,\cdots,e_n \in R$ で生成されていると仮定しよう．このとき, standard identity と呼ばれる多重線形多項式

$$S_m(X_1,\cdots,X_m) := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} \mathrm{sgn}(\sigma)X_{\sigma(1)}\cdots X_{\sigma(m)}$$

を考える．ここで, $m=n+1$ で, sgn は置換の符号を表す．

$a_1,\cdots,a_m \in A$ とすると, 各 a_i は $e_1,\cdots,e_n$ たちの Z 上の線形結合で表されるから, $S_m(a_1,\cdots,a_m)$ は $S_m(e_{i_1},\cdots,e_{i_m})$ $(i_1,\cdots,i_m \in \{1,\cdots,n\})$ の Z 上の線形結合となる．ところが $m>n$ だから, $e_{i_1},\cdots,e_{i_m}$ の中には必ず重複があり, そのことから $S_m(e_{i_1},\cdots,e_{i_m})=0$ であるとわかる．よって $S_m(a_1,\cdots,a_m)=0$ である．以上より, R は PI 代数である． □

補題 2.5. A を PI 代数, B を可換代数とするとき, $A\otimes_{\Bbbk} B$ は PI 代数である．

例えば, この補題において B を多項式環 $\Bbbk[X]$ にとれば, $A[X]$ が PI 代数であることが分かる．また, B を形式的冪級数環 $\Bbbk[[X]]$ にとれば, $A[[X]]$ が PI 代数であることも分かる．

証明．$P(X_1,\cdots,X_n)$ を 1 を係数に持つ A が満たす非自明な多重線形多項式とし, $t_i \in A\otimes_{\Bbbk} B$

$(i = 1, \cdots, n)$ とする．もし各 t_i が $t_i = a_i \otimes b_i$ $(a_i \in A,\ b_i \in B)$ の形をしているならば, B の可換性により

$$P(t_1, \cdots, t_n) = P(a_1, \cdots, a_n) \otimes b_1 \cdots b_n = 0$$

となる．この結果と P の多重線形性より, t_i たちが一般のテンソルの場合も $P(t_1, \cdots, t_n) = 0$ が成り立つことが分かる．したがって $A \otimes_{\Bbbk} B$ は PI 代数である． $\square$

Regev の定理 (定理 2.18) によれば, 基礎環 $\Bbbk$ が体であるときは, PI 代数のテンソル積は PI となる．これは PI 代数の理論において基本的な結果であるが, その証明は簡単ではない．Regev の定理の証明は 2.5 節まで先延ばしにすることとし, しばらくは基礎環が体とは限らない状況も含めて PI 代数の一般論を展開することにする．とはいえ, 2.4 節までの内容と 2.5 節の内容は完全に独立しているため, 読者は 2.4 節までの内容を飛ばして Regev の定理の証明に踏み込んでもよい．

2.2. PI 代数の根基. $\Bbbk$ を可換環とし, 代数といえば $\Bbbk$ 上の代数のことを意味する．代数 R に対し, その Jacobson radical を $\mathrm{Jac}(R)$ で表す．R の素イデアルすべての共通部分を **lower nilradical** と呼び, $\mathrm{Nil}_*(R)$ で表す [Lam01, Definition 10.13]．イデアル $\mathrm{Nil}_*(R)$ は R の prime radical, Baer radical, Baer-McCoy radical などの名でも呼ばれているようである．すべての要素が冪零であるようなイデアルを **nil ideal** という．R の nil ideal すべての和を **upper nilradical** と呼び, $\mathrm{Nil}^*(R)$ で表す [Lam01, Definition 10.26]．$\mathrm{Nil}^*(R)$ は Köthe radical という名でも呼ばれている．

環論において良く知られているように, $\mathrm{Nil}_*(R) \subset \mathrm{Nil}^*(R) \subset \mathrm{Jac}(R)$ という包含関係がある [Lam01, Proposition 10.27]．R が可換である場合, 冪零元の和が冪零元になるという事実により, $\mathrm{Nil}_*(R)$ と $\mathrm{Nil}^*(R)$ は R の冪零元全体の集合と一致する．非可換環に対しては, これらのイデアルは一般には異なるが, 等しくなるための十分条件が知られている．それらの中のひとつとして, ここでは次の定理を紹介する．

定理 2.6 (Levitzki [Lev50, Theorem 4])**.** PI 代数 A に対し, $\mathrm{Nil}_*(A) = \mathrm{Nil}^*(A)$ が成り立つ．

本節 (§2.2) ではこの定理の証明を与える．A を代数, I をその部分集合とする．任意の有限部分集合 $X \subset I$ に対し, ある自然数 m が存在して $X^m = \{0\}$ となるとき, I は局所冪零であるという．A の局所冪零イデアル全体の和を $\mathrm{Lev}(A)$ で表す (Levitsky radical [Lam01, §10, p. 166])．局所冪零イデアルは nil ideal であるから, $\mathrm{Lev}(A) \subset \mathrm{Nil}^*(A)$ である．局所冪零イデアルの和は局所冪零だから, $\mathrm{Lev}(A)$ は A の局所冪零イデアルのうちで最大のものであると言える．

補題 2.7. $\mathrm{Lev}(A)$ を含む A の局所冪零片側イデアルは $\mathrm{Lev}(A)$ のみである．

証明．右側でも左側でも証明は同じなので, I を $\mathrm{Lev}(A)$ を含む局所冪零右側イデアルとする．こ

のとき $J := AI + I$ は A の両側イデアルである. $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ を J の任意の有限部分集合とする. 各 x_i を $x_i = \sum_j a_{ij}u_{ij} + \sum_k u_k$ $(u_{ij}, u_k \in I,\, a_{ij} \in A)$ の形の有限和で表し, この表示を用いて

$$Y = \{\, u_{ij}, u_{ij}a_{rs}, u_k, u_k a_{rs} \mid \text{添え字 } i,j,k,r,s \text{ は可能な限りのすべてを動く} \,\}$$

とおく. これは I の有限部分集合である. I は局所冪零だから, $Y^m = \{0\}$ となる自然数 m が存在する. X^m の要素は Y^m の要素の A-係数線形結合として表されるから, $X^m = \{0\}$ である. 以上より, J は局所冪零イデアルであることがわかった. $\mathrm{Lev}(A)$ の最大性より $J \subset \mathrm{Lev}(A)$ であるが, 一方で $\mathrm{Lev}(A) \subset I \subset J$ だから, $I = \mathrm{Lev}(A)$ となる. □

全ての要素が冪零であるような $\Bbbk$ 上の結合的多元環を **nil 代数**と呼ぶ. 非自明な nil 代数は単位元を持たないため, 我々の規約の下ではそれらは '代数' ではない. しかし, 定義 2.3 と同様にして, **nil PI 代数**およびその PI 次数の概念を定義することができる.

補題 2.8 (Kaplansky [Kap48, Theorem 5])**.** Nil PI 代数は局所冪零である.

この補題より, PI 代数 A に対し, $\mathrm{Lev}(A) = \mathrm{Nil}^*(A)$ が成り立つことがわかる. 実際, '$\subset$' はいつも成り立つのであった. A が PI 代数なら, $\mathrm{Nil}^*(A)$ は nil PI 代数であるから, この補題より局所冪零である. $\mathrm{Lev}(A)$ の最大性より '$\supset$' が従う.

証明. 非単位的な代数 A に対しても, Levitsky radical $\mathrm{Lev}(A)$ は定義されることに注意しておく. 局所冪零でない nil PI 代数が存在したと仮定する. そのようなものの中で最も PI 次数が小さいものをとり, それを A とする. $B := A/\mathrm{Lev}(A)$ とおくと, A は局所冪零でないから, $B \neq 0$ である. B は A の商として nil PI 代数であるから, $x^2 = 0$ を満たす $x \in B \setminus \{0\}$ が存在する. このとき $xB = 0$ である. 実際,[*1]

> 背理法. 仮に $xB \neq 0$ であったとしよう. $n = \text{PI-deg}(xB)$ とし, xB が満たす n 変数の非自明な多重線形多項式 $P(X_1, \cdots, X_n)$ で 1 を係数に持つようなものをとる. 必要なら変数の名前を付け替えることで,
>
> $$P(X_1, \cdots, X_n) = X_1 X_2 \cdots X_n + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \{e\}} \beta_\sigma X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(n)} \quad (\beta_\sigma \in \Bbbk)$$
>
> であるとしてよい. 右辺の項を, その末尾に現れる変数が X_n であるものとそうでないものとに分けることで, $P(X_1, \cdots, X_n) = P_1(X_1, \cdots, X_{n-1})X_n + P_2(X_1, \cdots, X_n)$,
>
> $$P_1(X_1, \cdots, X_{n-1}) \in \Bbbk\langle X_1, \cdots, X_{n-1}\rangle, \quad P_2(X_1, \cdots, X_n) \text{ の各項の末尾は } X_n \text{ ではない}$$
>
> という形に表すことができる. ここで $x_1, \cdots, x_{n-1} \in xB$ を任意にとる. $X_i = x_i$ $(i = 1, \cdots, n-1)$, $X_n = x$ を代入することで $P_1(x_1, \cdots, x_{n-1})x + P_2(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x) = 0$

[*1] 長い背理法が多いので, それらは枠で囲んでみました. ↯ のマークで本線に復帰します.

> を得る． P_2 を展開したときに現れる項は, 必ず X_nX_i $(i < n)$ のような部分を含むことに注意せよ． $x^2 = 0$, $x_i \in xB$ だから $P_2(x_1, \cdots, x_{n-1}, x) = 0$ である．したがって $P_1(x_1, \cdots, x_{n-1})x = 0$ である．
>
> さて, $J = \{a \in xB \mid az = 0 \text{ for all } z \in xB\}$ とおこう． 上の議論より, 任意の $x_1, \cdots, x_{n-1} \in xB$ に対して $P_1(x_1, \cdots, x_{n-1}) \in J$ である． P_1 は 1 を係数に持つ $(n-1)$ 次の多重線形多項式であるから, xB/J の PI 次数は $(n-1)$ 以下であることになる．これは A の PI 次数より真に小さい． A の最小性より, xB/J は局所冪零である． $J^2 = 0$ だから, xB 自体, 局所冪零である． $\mathrm{Lev}(B) = \mathrm{Lev}(A/\mathrm{Lev}(A)) = 0$ だから, 補題 2.7 より $xB = 0$ となる．これは $xB \neq 0$ という仮定と矛盾する． $\lightning$

$xB = 0$ より, $\Bbbk x \subset B$ は B の右側イデアルである．しかも, $x^2 = 0$ だから, これは冪零右側イデアルである．補題 2.7 より $\Bbbk x = 0$ であるが, これは $x \neq 0$ であることと矛盾する．以上で証明は完了した． $\square$

一般に, 代数 A に対し, A の冪零イデアル全体の和を $N_1(A)$ で表す．さらに, 順序数 α に対する $N_\alpha(A)$ を以下のようにして帰納的に定義する (定理 2.6 の証明には $\alpha = 2$ までしか必要ないのだが, ここでは周辺の状況まで含めて説明しておくことにする)．もし $\alpha = \beta + 1$ が順序数 β の後者であるときは,

$$N_\alpha(A) := \{r \in A \mid r + N_\beta(A) \in N_1(A/N_\beta(A))\}$$

とせよ．もし α が極限順序数であるときは, $N_\alpha(A) := \bigcup_{\beta<\alpha} N_\beta(A)$ とせよ．この方法により A のイデアルの増大列ができるが, 超限帰納法により, この列が適当な順序数 α で停まることが証明される．その α に対し, 実は $N_\alpha(A) = \mathrm{Nil}_*(A)$ となっている [Lam03, Ex. 10. 11]．まとめておくと,

$$N_1(A) \subset N_2(A) \subset \cdots \subset N_\alpha(A) = \mathrm{Nil}_*(A) \subset \mathrm{Lev}(A) \subset \mathrm{Nil}^*(A). \tag{2.2}$$

補題 2.9 (Levitski [Lev50, Theorem 1]; Amitsur [Ami51, Theorem 1])**.** A を PI 次数 d の PI 代数とする．このとき, 積で閉じた任意の冪零集合 $B \subset A$ に対し, $B^{\lfloor d/2 \rfloor} \subset N_1(A)$ が成り立つ (ただし, 実数 x に対し, $\lfloor x \rfloor$ で x を超えない最大の整数を表す)．

証明. $m = \lfloor d/2 \rfloor$ とおく． $d = 2i - 1$ (i は整数) のとき $m = i - 1$ となり, $d = 2i$ のとき $m = i$ となることに注意しておこう． n を AB^nA が A の冪零イデアルとなるような自然数のうちで最小のものとする (B は冪零だから, このような n は存在する)．実は $2n \leq d$ である．実際,

> 背理法. $2n > d$ であると仮定する．各 $i = 1, \cdots, n$ に対し, $U_{2i-1} = B^{n-i}AB^{i-1}$, $U_{2i} = B^{n-i}AB^i$ とおく． A は次数 d の PI 代数であるから,
>
> $$X_1X_2 \cdots X_d - \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d \setminus \{e\}} \beta_\sigma X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(d)} = 0 \quad (\beta_\sigma \in \Bbbk)$$
>
> という形の多重線形恒等式を満たす．恒等写像でない $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ に対しては, $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ と

なる i が必ず存在する. $j > k$ に対しては $U_j U_k \subset AB^n A$ となるから,

$$(B^{n-1}A)^d B^m = U_1 \cdots U_d \subset \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_d \setminus \{e\}} U_{\sigma(1)} \cdots U_{\sigma(d)} \subset AB^n A$$

である. これを用いると,

$$\begin{aligned}(AB^{n-1}A)^{d+1} &= \underbrace{(AB^{n-1}A)(AB^{n-1}A)\cdots(AB^{n-1}A)}_{d+1} \subset A\underbrace{(B^{n-1}A)\cdots(B^{n-1}A)}_{d}(B^{n-1}A) \\ &= A(B^{n-1}A)^d B^m B^{n-m-1}A \subset AB^n AB^{n-m-1}A \subset AB^n A\end{aligned}$$

となる. $AB^n A$ は冪零だから, $AB^{n-1}A$ も冪零であることになるが, これは n の最小性と矛盾する. $\lightning$

以上で $2n \leq d$ であることがわかった. $J = AB^m A$ とおくと, $n \leq m$ だから, J は冪零である. A は単位元を持つため, $B^m \subset J$ である. したがって $B^m \subset J \subset N_1(A)$ となる. □

定理 2.6 の証明. A を PI 代数とし, $d = \text{PI-deg}(A)$, $m = \lfloor d/2 \rfloor$ とおく. I を局所冪零イデアルとし, 有限個の元 $x_1, \cdots, x_m \in I$ をとる. $x_1, \cdots, x_m$ で生成される A の '非単位的部分代数' を B とすると, I の局所冪零性より, B は冪零である. したがって, 補題 2.9 より $x_1 \cdots x_m \in B^m \subset N_1(A)$ である. 以上より, $I^m \subset N_1(A)$ であるとわかった. ゆえに $I \subset N_2(A)$ である. $\mathrm{Lev}(A)$ の定義より, $\mathrm{Lev}(A) \subset N_2(A)$ である. 補題 2.8 の後の注意と (2.2) より, $\mathrm{Nil}^*(A) = \mathrm{Nil}_*(A)$ であることがわかる. □

2.3. 原始的 PI 代数. 単純環の中心は体となることに注意しておこう. 中心の上での次元が有限であるような単純環を**中心的単純代数** (central simple algebra) という. 忠実な単純左加群を持つ環を**左原始環** (left primitive ring) という. 中心的単純代数は左原始環である. 逆は一般には成立しないが, PI 環のクラスに限れば成立する. すなわち,

定理 2.10. 左原始的な PI 環は中心的単純代数である.

以下, この定理を示す. まず, 単純環に関する次の事実に注意しておこう.

補題 2.11. A を単純環, K を A の中心とし, A を K-代数とみなす. このとき, 任意の単純 K-代数 B に対し, $A \otimes_K B$ は単純 K-代数である.

A が K 上の中心的単純代数である (つまり $\dim_K A < \infty$ である) 場合は, この補題の主張はブラウアー群の理論において基本となる, 良く知られているものとなる [Lam05, Theorem IV.1.2]. 今は A が有限次元とは仮定していないが, 全く同様に証明される.

証明. $(A \otimes_K B) \setminus \{0\}$ の任意の要素は $\sum_{i=1}^m a_i \otimes_K b_i$ ($a_i \in A$, $b_i \in B$, $\{b_i\}$ は K 上で一次

独立) の形に表すことができる．このときの m を長さと呼ぶことにしよう．$I \neq 0$ を $A \otimes_K B$ のイデアルとする．I の 0 でない要素のうちで長さが最小のものをひとつとり, それを x とする．x の長さを m として, $x = \sum_{i=1}^m a_i \otimes_K b_i$ の形に表示しておこう．A は単純環であるから, $Aa_1A = A$ である．特に, $\sum_{j=1}^m r_j a_1 s_j = 1$ となる $r_j, s_j \in A$ がある．$a'_i = \sum_{j=1}^m r_j a_i s_j$ とおけば,

$$\sum_{j=1}^m (r_j \otimes_K 1)x(s_j \otimes_K 1) = 1 \otimes_K b_1 + a'_2 \otimes_K b_2 + \cdots + a'_m \otimes_K b_m$$

である．この式の両辺を y とおく．$x \in I$ より $y \in I$ である．任意の $a \in A$ に対して

$$[a, a'_2] \otimes_K b_2 + \cdots + [a, a'_m] \otimes_K b_m = [a \otimes_K 1, y] \in I$$

となるが, m の最小性より $[a, a'_2] = \cdots = [a, a'_m] = 0$ である．以上より, 各 a'_i は A の中心 K に属するとわかった．そこで $b = b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_m b_m$ とおけば, $y = 1 \otimes_K b$ である．b_i たちは K 上で一次独立だから, $b \neq 0$ である．B の単純性より $1 \otimes 1 \in (A \otimes_K B)y(A \otimes_K B) \subset I$ となり, 結局 $I = A \otimes_K B$ である．　□

さて, n を自然数, D を斜体とし, $S := \mathrm{Mat}_n(D)$ とおく．可換環は $[X, Y]$ を多項式恒等式に持つような環として特徴づけられることから, PI 次数は, ある種の非可換さの尺度とみなせよう．そのように考えれば, n が大きくなるにつれて S の PI 次数は大きくなるのではないかと予想されるが, 実際にそれは正しい．

補題 2.12 (Levitzki [Lev50, p. 338])**.** 上記の環 $S = \mathrm{Mat}_n(D)$ が PI 環であったと仮定する．このとき, S の PI 次数 d に関して不等式 $\lfloor d/2 \rfloor \geq n$ が成り立つ．言い換えれば, d が偶数のときは $d \geq 2n$ であり, d が奇数のときは $d \geq 2n - 1$ である．

証明. 一般に, 環 R に対し $\mathrm{Jac}(\mathrm{Mat}_n(R)) = \mathrm{Mat}_n(\mathrm{Jac}(R))$ が成り立つ [Lam01, p. 57]．このことから

$$\mathrm{Nil}^*(S) \subset \mathrm{Jac}(S) = \mathrm{Mat}_n(\mathrm{Jac}(D)) = 0$$

であるとわかる．S が次数 d の PI 環であったとする．補題 2.9 の B として x^k $(k = 1, 2, \cdots)$ で張られる S の部分加群をとることで, 任意の冪零元 $x \in S$ に対して $x^{\lfloor d/2 \rfloor} = 0$ が成り立つことがわかる．S は $x^{n-1} \neq 0$ となる冪零元 x を持つから, $\lfloor d/2 \rfloor > n - 1$ である．両辺は整数ゆえ, $\lfloor d/2 \rfloor \geq n$ と書いても同じことである．　□

ここで**左原始環の構造定理** [Lam01, Theorem 11.19] を思い出そう．R を左原始環, V を忠実な単純左 R-加群とし, $D = \mathrm{End}_R(V)$ とする．Schur の補題より D は斜体である．もし R が左アルチンであれば, V の D 上の次元は高々有限であり, それを n とすれば $R \cong \mathrm{Mat}_n(D)$ である．そうでないならば, V は D 上無限次元である．さらに, 任意の自然数 n に対し, $\mathrm{Mat}_n(D)$ を商に持つ R の部分環 R_n が存在する．

補題 2.13. D を斜体とし, その中心を Z とする. このとき,

$$D \text{ は PI 環である} \iff \dim_Z(D) \text{ は有限である}.$$

証明. '$\Leftarrow$' は補題 2.4 より従う. 逆を示そう. D は PI 環であると仮定する. Zorn の補題を使い, Z を含む極大な部分体 $K \subset D$ をとる. $R := D \otimes_Z K$ とし, $V := D$ を作用 $(x \otimes_Z c) \cdot v = xvc$ ($v \in V$, $x \in D$, $c \in K$) によって左 R-加群とみる. D が斜体であることから, 左 R-加群 V は既約であるとわかる. また, 補題 2.11 より R は単純環だから, 左 R-加群 D は忠実である.

さて, $\phi \in \mathrm{End}_R(V)$ とする. $a := \phi(1_D)$ とすれば, $\phi(v) = va$ ($v \in V$) である. ϕ が K の作用と可換であることから, a は K の任意の元と可換であることが分かる. $K(a)$ は K を含む D の部分体であるが, K の極大性より $K(a) = K$, すなわち $a \in K$ である. 逆に $a \in K$ をとり $\phi_a : V \to V$ を $\phi_a(v) = va$ ($v \in V$) で定めれば, $\phi_a \in \mathrm{End}_R(V)$ となる. 以上の考察より, $a \mapsto \phi_a$ で与えられる環準同型写像 $K \to \mathrm{End}_R(V)$ は全単射であるとわかった. これを以って $K = \mathrm{End}_R(V)$ とみなそう.

仮定より, D は PI 環である. 今, 厳密には補題 2.5 が適用できる形にはなっていないのだが, その証明と全く同様の議論により $R = D \otimes_Z K$ も PI 環であることがわかる. このことから, V ($= D$) が K 上で有限次元であることが分かる. 実際,

> 背理法. そうでなかったと仮定すると, 左原始環の構造定理より, 任意の自然数 n に対して $\mathrm{Mat}_n(K)$ を商に持つ R の部分環 R_n が存在することになる. 補題 2.12 より R_n の PI 次数は $(2n-1)$ 以上であり, したがって R の PI 次数も $(2n-1)$ 以上となる. しかし, これは R が PI であることに矛盾する. $\lightning$

そこで $n = \dim_K(V)$ とすると, 左原始環の構造定理から $R \cong \mathrm{Mat}_n(K)$ である. よって,

$$\dim_Z(D) = \dim_K(D \otimes_Z K) = \dim_K(R) = n^2 < \infty. \qquad \square$$

定理 2.10 の証明. R を左原始的な PI 代数とする. V を忠実な単純左 R-加群とし, $D = \mathrm{End}_R(V)$ とする. 補題 2.13 の証明中での議論と同じようにして, $\dim_D(V) < \infty$ であるとわかる. 少し詳しく述べると,

> 背理法. 仮に $\dim_D(V)$ が有限でないならば, 左原始環の構造定理より, 任意の自然数 n に対して $\mathrm{Mat}_n(D)$ を商に持つ R の部分環 R_n が存在する. 補題 2.12 より R_n の PI 次数は $(2n-1)$ 以上であるが, これは R が PI であることに矛盾する. $\lightning$

そこで $n = \dim_D(V)$ とする. このとき, 左原始環の構造定理より $R \cong \mathrm{Mat}_n(D)$ である. Z を D の中心とする. D を R の部分環とみなすとき, R の中心は Z と一致する. R は PI 環だから, その部分環である D も PI である. 補題 2.13 より D は Z 上で有限次元, したがって R も Z 上で有限次元である. $\square$

2.4. 埋め込み定理. $\mathrm{Jac}(R) = 0$ を満たす環 R を**半原始環** (semiprimitive ring) と呼ぶのであった. R を環, $\{R_\alpha\}_\alpha$ を環の族とし, $\pi_\alpha : \prod_\alpha R_\alpha \to R_\alpha$ を α-成分への射影とする. 単射準同型 $i : R \to \prod_\alpha R_\alpha$ であって, 任意の添え字 α に対して $\pi_\alpha \circ i$ が全射となるようなものが存在するとき, R は環の族 $\{R_\alpha\}$ の**部分直積** (subdirect product) であるという. 半原始環は左原始環の部分直積であり, その逆も然り [Lam01, Theorem 12.5]. 可換な左原始環は体であるから, 可換な半原始環は体の部分直積であることも言える. ここでは, ある種の PI 代数に対する, このような埋め込み定理を紹介しよう. まずは半原始的な PI 代数について, 次の結果が知られている.

定理 2.14 (*cf.* Amitsur [Ami52, Theorem 1])**.** 半原始的な PI 代数は中心的単純環の族 $\{R_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の部分直積である. さらに, この R_α たちについて, その中心の上の次元は α によらない定数によって抑えられる.

証明. R を半原始的な PI 代数とし, $d = \text{PI-deg}(R)$ とする. 上で触れた半原始環に関する結果より, R は左原始環の族 $\{R_\alpha\}$ の部分直積となる. 各 R_α は R の商として PI であるから, 定理 2.10 より R_α は中心的単純代数である. R_α の中心の上の次元を n_α とする. R_α は R が満たす多項式を満たすから, $m = \lfloor d/2 \rfloor$ とおけば, 補題 2.12 より $n_\alpha \leq m$ である. □

$\mathrm{Nil}_*(R) = 0$ を満たす環 R を**半素環** (semiprime ring) と呼ぶのであった. 半原始環は半素であるが, 逆は成り立たない. 半素 PI 代数については, 上の定理より少し弱い, 次の結果が成立する.

定理 2.15 (*cf.* Amitsur [Ami52, Theorem 2])**.** 半素 PI 代数は中心的単純環の族 $\{R_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の直積の部分環となる. さらに, この R_α たちについて, その中心の上の次元は α によらない定数によって抑えられる.

後で使うのは, 定理 2.15 から得られる次の結果である.

定理 2.16 (*cf.* Amitsur [Ami52, Theorem 3])**.** 半素 PI 代数は, 被役な可換環上の行列環に埋め込める.

この定理は, 定理 2.15 を認めれば簡単に証明できるので, 先に証明を与えておく.

証明. R を半素 PI 代数とし, 定理 2.15 の主張にある中心的単純代数の族 $\{R_\alpha\}$ をとる. 各 α に対し, R_α の中心上の次元 n_α は α によらない定数 m によって抑えられるとしよう. 中心的単純代数 R_α の分解体を F_α とすると, R_α は $\mathrm{Mat}_{n_\alpha^2}(F_\alpha)$ に埋め込める. そこで $C = \prod_\alpha F_\alpha$ とおけば, 単射準同型の列

$$R \hookrightarrow \prod_\alpha R_\alpha \hookrightarrow \prod_\alpha \mathrm{Mat}_{n_\alpha^2}(F_\alpha) \hookrightarrow \prod_\alpha \mathrm{Mat}_{m^2}(F_\alpha) \cong \mathrm{Mat}_{m^2}(C)$$

がある. つまり, R は $\mathrm{Mat}_{m^2}(C)$ に埋め込める. C は被約かつ可換である. □

定理 2.15 の証明には, 次の補題が本質的である.

補題 2.17 ([Ami52, Lemma 2])**.** $\mathrm{Nil}^*(R) = 0$ を満たす環 R に対し, 多項式環 $R[X]$ は半原始環である.

証明. $J := \mathrm{Jac}(R[X])$ を $R[X]$ の Jacobson radical とする. $R[X]$ が半原始環でない, すなわち, $J \neq 0$ であると仮定しよう. 主張の対偶を考えれば, このとき R が 0 でない nil ideal を持つことを示せばよいとわかる. 0 でない多項式 $f(X) \in R[X]$ に対し, その最高次の係数を $\mathrm{LC}(f(X))$ で表す. そして,

$$n = \min\{\deg f(X) \mid f(X) \in J \setminus \{0\}\}, \quad I = \{\mathrm{LC}(f(X)) \mid f(X) \in J, \deg f(X) = n\} \cup \{0\}$$

とおく. 容易にわかるように, I は R のイデアルである. 以下, I が nil ideal となっていることを示す.

$a \in I$ とする. $a = 0$ なら a の冪零性は自明であるから, $a \neq 0$ とする. 定義より, a はある n 次多項式 $f(X) \in J$ の最高次の係数となっている. $p(X) := f(X)Xa$ は J に属するから, $1 + p(X) \in R[X]^\times$ である. そこで $q(X) = (1 + p(X))^{-1} - 1 \in R[X]$ とする. $1 + q(X) = (1 + p(X))^{-1}$ より,

$$p(X) + q(X) + p(X)q(X) = 0 = q(X) + p(X) + q(X)p(X) \tag{2.3}$$

を得る. さて, ここで $s(X) = f(X)a$, $t(X) = -s(X) \cdot (1 + q(X))$ とおけば, $p(X) = s(X)X$,

$$q(X) \overset{(2.3)}{=} -p(X) - p(X)q(X) = -s(X) \cdot X \cdot (1 + q(X)) = t(X)X$$

である. これらを (2.3) に代入し, 両辺を X で割れば

$$s(X) + t(X) + Xs(X)t(X) = 0 = t(X) + s(X) + Xt(X)s(X) \tag{2.4}$$

を得る. 実は十分大きな自然数 m に対し $a^m t(X) = 0$ となる.

> 背理法. 任意の自然数 m に対し $a^m t(X) \neq 0$ であると仮定し, $\mu = \min\{\deg a^m t(X) \mid m = 1, 2, \cdots\}$ とおく. $t(X)$ を $t(X) = t_1(X) + X^{\mu+1} t_2(X)$ ($t_1(X), t_2(X) \in R[X]$, $\deg t_1(X) = \mu$) の形に表すと, μ の定義より $a^\ell t_2(X) = 0$ となる自然数 ℓ が存在する. $t_2(X)$ の k 次の係数を b_k とすれば, 各 k に対し $a^\ell b_k = 0$ である. さて, $a^\ell s(X) b_k$ の n 次の係数は $a^\ell \cdot a^2 \cdot b_k = 0$ である. $a^\ell s(X) b_k \in J$ だから, n の最小性より $a^\ell s(X) b_k = 0$ である. よって,
>
> $$a^\ell s(X) t_2(X) = a^\ell s(X)(b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \cdots) = 0$$
>
> を得る. $t(X) = t_1(X) + X^{\mu+1} t_2(X)$ と (2.4) より
>
> $$a^\ell s(X) + a^\ell t_1(X) + X a^\ell s(X) t_1(X) = 0$$
>
> である. さて, $t(X)$ の μ 次の係数を c とする. 上の等式の両辺の $(n + \mu + 1)$ 次の係数を比

較することで $a^{\ell+2}c=0$ を得る．このことから $a^{\ell+2}t(X)=a^{\ell+2}t_1(X)$ の次数は μ より小さいということがわかるが, それは μ の最小性と矛盾する． $\lightning$

そこで $a^m t(X)=0$ となる m をとる．(2.4) に左から a^m をかけると, $a^m s(X)=0$ を得る．この等式の両辺の n 次の係数を比較して $a^{m+2}=0$ を得る．つまり, a は冪零である．以上より, I が nil ideal であることが示された． □

定理 2.15 の証明. R を半素な PI 代数とする．このとき, 定理 2.6 より $\mathrm{Nil}^*(R)=\mathrm{Nil}_*(R)=0$ である．したがって補題 2.5 と補題 2.17 より $R[X]$ は半原始的 PI 代数である．あとは $R[X]$ に対して定理 2.14 を適用すればよい． □

2.5. PI 代数のテンソル積. 本節では, $\Bbbk$ は体とし, 単に代数といえば体 $\Bbbk$ 上の代数のことを意味する．後の章では使わないのだが, 本章の締め括りとして, 次の重要な結果を紹介しておきたい.

定理 2.18 (Regev [Reg71, Reg72])**.** PI 代数のテンソル積は PI 代数である.

この定理の証明のために必要な記号を用意しよう．R を PI 代数とする．自然数 m に対し, 非負整数 $c_m(R)$ を以下のようにして定義する．まず, 可算無限個の不定元 $X_1, X_2, X_3, \cdots$ を用意し, それらで生成される $\Bbbk$ 上の自由代数を $\Bbbk\langle\mathbf{X}\rangle$ で表す．R が満たす $\Bbbk$ 上の多項式全体の集合を $T(R)\subset\Bbbk\langle\mathbf{X}\rangle$ とする．すなわち,

$$T(R)=\bigcup_{m=1}^{\infty}\{f(X_1,\cdots,X_m)\in\Bbbk\langle X_1,\cdots,X_m\rangle \mid f(a_1,\cdots,a_m)=0 \text{ for all } a_1,\cdots,a_m\in R\}$$

である．自然数 m に対し, $X_{\sigma(1)}\cdots X_{\sigma(m)}$ $(\sigma\in\mathfrak{S}_m)$ で張られる $\Bbbk\langle\mathbf{X}\rangle$ の部分空間を P_m とし,

$$T_m(R):=P_m\cap T(R),\quad c_m(R):=\dim_{\Bbbk}P_m/T_m(R)$$

とおく．Regev の定理の証明において重要なのは, $m\to\infty$ のとき, $c_m(R)$ は高々指数関数増大であるという観察である．以下, Latyšev [Lat72] に従ってこのことを示そう (と言いつつも, 筆者が実際に参考にしたのは [Row80, §6.1] である)．m 文字の置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_m$ に対し,

$$d(\sigma)=\max\left\{d=1,2,\cdots \;\middle|\; \begin{array}{c} 1\le i_1<\cdots<i_d\le m \text{ および } \sigma(i_1)>\cdots>\sigma(i_d) \text{ を満たす} \\ i_1,\cdots,i_d\in\{1,\cdots,m\} \text{ が存在する}\end{array}\right\}$$

とおく．すると,

補題 2.19 (Latyšev [Lat72])**.** R を PI 代数とし, $n=\text{PI-deg}(R)$ とするとき,

$$P_m/T_m(R)=\mathrm{span}_{\Bbbk}\{X_{\sigma(1)}\cdots X_{\sigma(m)}+T_m(R)\mid \sigma\in\mathfrak{S}_m, d(\sigma)<n\}. \tag{2.5}$$

証明. R が満たす次数 n の多重線形多項式を $P(X_1,\cdots,X_n)$ とし, それを

$$P(X_1,\cdots,X_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\lambda_\sigma X_{\sigma(1)}\cdots X_{\sigma(m)}\quad(\lambda_\sigma\in\Bbbk)$$

の形に表す. 必要なら P を定数倍したり, 変数の名前を付け替えたりして, $\lambda_e=1$ ($e\in\mathfrak{S}_n$ は単位元) と仮定して良い. 式 (2.5) の右辺を $Q_m(R)$ とおく. この補題を証明するためには, 任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_m$ に対して

$$X_{\sigma(1)}\cdots X_{\sigma(m)}+T_m(R)\in Q_m(R) \tag{2.6}$$

が成り立つことを示せばよい.

> 背理法. 集合 $\mathfrak{S}_m$ に辞書式順序を導入する. すなわち,
>
> $$\sigma<\tau \overset{\text{定義}}{\iff} \text{ある番号 } k \text{ に関して } \sigma(i)=\tau(i)\ (1\le i\le k) \text{ かつ } \sigma(k+1)<\tau(k+1).$$
>
> 置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_m$ であって, (2.6) を満たさないものが存在すると仮定しよう. そのようなもののうちで自書式順序に関して最小のものを $\pi\in\mathfrak{S}_m$ とする. $d(\sigma)<n$ を満たす σ は (2.6) を満たすから, $d(\pi)\ge n$ である. したがって, $i_1<\cdots<i_n$ かつ $\pi(i_1)>\cdots>\pi(i_n)$ を満たす $i_1,\cdots,i_n\in\{1,\cdots,m\}$ が存在する. 便宜上 $i_0=0$, $i_{n+1}=m+1$ とし, $Y_k=X_{\pi(i_k+1)}X_{\pi(i_k+2)}\cdots X_{\pi(i_{k+1}-1)}$ $(k=0,1,\cdots,n)$ とおくと,
>
> $$X_{\pi(1)}X_{\pi(2)}\cdots X_{\pi(m)}=Y_0X_{\pi(i_1)}Y_1X_{\pi(i_2)}Y_2\cdots Y_{n-1}X_{\pi(i_n)}Y_n$$
>
> となる. $\lambda_e=1$ より $Y_0P(X_{\pi(i_1)}Y_1,X_{\pi(i_2)}Y_2,\cdots,Y_{n-1}X_{\pi(i_n)}Y_n)-X_{\pi(1)}\cdots X_{\pi(m)}$
>
> $$=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n\setminus\{e\}}\lambda_\sigma Z_\sigma\quad(Z_\sigma:=Y_0X_{\pi(i_{\sigma(1)})}Y_{\sigma(1)}X_{\pi(i_{\sigma(2)})}Y_{\sigma(2)}\cdots X_{\pi(i_{\sigma(2)})}Y_{\sigma(2)}).$$
>
> さて, $\tau\in\mathfrak{S}_n\setminus\{e\}$ とし, $k=\min\{i=1,\cdots,n\mid\tau(i)\neq i\}$ とおく. 単項式 Z_τ と $X_{\pi(1)}\cdots X_{\pi(m)}$ は, 先頭から (i_k-1) 番目の変数までは共通である. 次の変数については, 前者のそれは $X_{\pi(i_{\tau(k)})}$ であり, 後者のそれは $X_{\pi(i_k)}$ である. $k<\sigma(k)$ より $\pi(i_k)>\pi(i_{\tau(k)})$ である. 以上のことから, $Z_\tau=X_{\sigma(1)}\cdots X_{\sigma(m)}$ を満たす $\sigma\in\mathfrak{S}_m$ は π より小さいということがわかる. π の最小性から
>
> $$(\underset{\sim\sim\sim}{Y_0P(X_{\pi(i_1)}Y_1,X_{\pi(i_2)}Y_2,\cdots,Y_{n-1}X_{\pi(i_n)}Y_n)}-X_{\pi(1)}\cdots X_{\pi(m)})+T_m(R)\in Q_m(R)$$
>
> となるが, 波線部分は $T(R)$ に属するから, $X_{\pi(1)}\cdots X_{\pi(m)}+T_m(R)\in Q_m(R)$ となり, 矛盾に至る. ↯

これでこの補題の証明が完了した. □

$c_m(R)$ の増大度の評価は, 環論的な考察というよりも, むしろ組み合わせ論における Dilworth

の定理から従う. P を有限半順序集合とし, その順序を $\prec$ とする. P の部分集合で, 順序 $\prec$ の制限によって全順序集合となるものを P における**鎖** (chain) と呼ぶ. P の**反鎖** (antichain) とは, P の部分集合であって, その任意の異なる 2 つの要素が比較不可能であるようなもののことをいう (空集合と 1 点集合は反鎖であることに, 一応注意しておく). 以下の定理の証明は省略する.

定理 2.20 (Dilworth)**.** 有限半順序集合 P の極大反鎖の要素数は,

$$\min\{m = 1, 2, \cdots \mid P \text{ は共通部分のない } m \text{ 個の空でない鎖に分割される }\}$$

と等しい (特に, 極大反鎖の要素数は一定である).

A を有限全順序集合とする. 単射 $\sigma : A \to \mathbb{N}$ に対し, A の分割 $\mathfrak{C}(\sigma)$ を以下のようにして構成する. まず, $A = \emptyset$ のときは $\mathfrak{C}(\sigma) = \emptyset$ とせよ (空集合の唯一の分割は空集合である). $A \neq \emptyset$ であるときは, A の要素からなる有限列 $c_1, c_2, \cdots$ を $c_1 = \min A$,

$$c_{j+1} = \min\{x \in A \mid c_j < x \text{ and } \sigma(c_j) < \sigma(x)\} \quad (j = 1, 2, \cdots)$$

によって帰納的に定義する. ただし, 右辺の min の対象となる集合が空となった場合は, それ以降の c_i は定義せず, 列はそこで終わりとする. このようにして得られた A の要素の有限列を $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, \cdots\}$ とし, $\mathfrak{C}(\sigma) = \{\mathbf{c}\} \cup \mathfrak{C}(\sigma|_{A\setminus\mathbf{c}})$ とする. 定義を明確に与えるために一般の有限全順序集合を考えたが, 以降で考えるのは, 置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ を $\{1, 2, \cdots, m\}$ から $\mathbb{N}$ への単射とみなしたときの $\mathfrak{C}(\sigma)$ である.

例 2.21. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 9 & 8 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_9$ に対し $\mathfrak{C}(\sigma) = \{\{1, 3, 4, 5\}, \{2, 6\}, \{7, 9\}, \{8\}\}$.

$[m] := \{1, \cdots, m\}$ とおく. $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ に対し, 集合 $[m]$ 上の半順序 $\prec_\sigma$ を

$$i \prec_\sigma j \iff i < j \text{ かつ } \sigma(i) < \sigma(j)$$

によって定義する. 構成方法から, $\mathfrak{C}(\sigma)$ の要素は $[m]$ の $\prec_\sigma$ に関する鎖である. また, $i_1, \cdots, i_d \in [m]$ (ただし $i_1 < \cdots < i_d$ とする) に対し, $\sigma(i_1) > \cdots > \sigma(i_d)$ であることと $\{i_1, \cdots, i_d\}$ が半順序 $\prec_\sigma$ に関する反鎖であることは同値である. したがって, $d(\sigma)$ は, $[m]$ における反鎖の要素数の最大値に等しい. 以上の観察と Dilworth の定理を組み合わせることで, 以下の等式が得られる.

補題 2.22. $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ に対し, $d(\sigma) = \#\mathfrak{C}(\sigma)$ である.

証明. $k = \#\mathfrak{C}(\sigma)$ とし, $\mathfrak{C}(\sigma)$ の要素を $\mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_k$ と番号付けておく. 各 i に対し, $\mathbf{c}_i$ の要素を小さい順に並べたものを $c_{i1}, c_{i2}, \cdots$ としよう. 必要なら $\mathbf{c}_i$ たちの順番を入れ替え, $c_{i1} < c_{j1}$ $(i < j)$ が成り立つようにしておく. $a_1, \cdots, a_k \in [m]$ を a_k から順番に

$$a_k = \max \mathbf{c}_k, \quad a_{i-1} = \max\{x \in \mathbf{c}_{i-1} \mid x < a_i\} \quad (i = k, k-1, \cdots, 2)$$

で定義する．明らかに $a_1 < \cdots < a_k$ である．さらに $\sigma(a_{i-1}) > \sigma(a_i)$ $(i = 2, \cdots, k)$ が成り立つ．

> 背理法．実際, ある i に対して $\sigma(a_{i-1}) < \sigma(a_i)$ であったと仮定しよう．a_{i-1} が $\mathbf{c}_{i-1}$ の中で小さい方から順に j 番目であったとする (つまり $a_{i-1} = c_{i-1,j}$ である)．分割 $\mathfrak{C}(\sigma)$ の構成方法から
>
> $$c_{i-1,j+1} = \min\{x \in [m] \setminus (\mathbf{c}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{c}_{i-2}) \mid a_{i-1} < x \text{ and } \sigma(a_{i-1}) < \sigma(x)\} \in \mathbf{c}_{i-1}$$
>
> である．仮定より, a_i は右辺の min の対象となっている集合に属する．もし $c_{i-1,j+1} < a_i$ であったとすると, $a_{i-1} < c_{i-1,j+1} < a_i$ かつ $c_{i-1,j+1} \in \mathbf{c}_{i-1}$ であるから, a_{i-1} の最大性に反する．したがって, 最小性より $c_{i-1,j+1} = a_i$ となるが, これは $a_i \notin \mathbf{c}_{i-1}$ に矛盾する． $\lightning$

これにて半順序 $\prec_\sigma$ に関する反鎖 $\mathbf{a} := \{a_1, \cdots, a_k\}$ が構成された．さて, $a \in [m] \setminus \mathbf{a}$ とする．このとき a はいずれかの $\mathbf{c}_i$ に属する．a_i も $\mathbf{c}_i$ に属するから a と a_i は $\prec_\sigma$ に関して比較可能である．よって $\mathbf{a}$ は極大な反鎖である．Dilworth の定理より $d(\sigma) = \#\mathbf{a} = k$ となり, 証明は完了した． □

補題 2.23 (Latyšev [Lat72])**.** R を PI 代数とし, $n = \text{PI-deg}(R)$ とおくとき,

$$c_m(R) \leq (n-1)^{2m} \quad (m = 0, 1, 2, \cdots).$$

証明．補題 2.19 より, $c_m(R)$ は集合 $G_m := \{\sigma \in \mathfrak{S}_m \mid d(\sigma) < n\}$ の要素数以下である．それを補題 2.22 を用いて見積もろう．$\sigma \in G_m$ とし, $\mathfrak{C}(\sigma) = \{\mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_k\}$ とする．補題 2.22 より $k = d(\sigma)$ であるが, $\sigma \in G_m$ であるから, $k < n$ である．さて, 順番を適当に入れ替えて $\min \mathbf{c}_i < \min \mathbf{c}_j$ $(i < j)$ を満たすようにしておき, 写像 $u_\sigma, v_\sigma : [m] \to [n-1]$ を $u_\sigma(i) = j = v_\sigma(\sigma(i))$ $(i \in \mathbf{c}_j)$ によって定義する．このとき, 写像

$$G_m \to \text{Map}([m], [n-1]) \times \text{Map}([m], [n-1]), \quad \sigma \mapsto (u_\sigma, v_\sigma). \tag{2.7}$$

は単射である．実際, (u_σ, v_σ) から, $[m]$ の部分集合 $\mathbf{c}_j$ と $\sigma(\mathbf{c}_j)$ が $\mathbf{c}_j = u_\sigma^{-1}(j)$, $\sigma(\mathbf{c}_j) = v_\sigma^{-1}(j)$ によって復元される．各 $\mathbf{c}_j$ 上では σ は単調増加するから, σ が $\mathbf{c}_j$ 上でどのような値をとるかがわかり, 結果として σ 全体が復元されるのである．

写像 (2.7) の単射性より $\#G_m \leq (\#\text{Map}([m], [n-1]))^2 = (n-1)^{2m}$ となり, 証明が完了した． □

定理 2.18 の証明．R_i $(i = 1, 2)$ を PI 代数とし, $n_i = \text{PI-deg}(R_i)$ とおく．このとき, 補題 2.23 より, 任意の非負整数 m に対して $c_m(R_i) \leq (n_i - 1)^{2m}$ が成り立つ．以下, $c_m(R_1)c_m(R_2) < m!$ を満たす自然数 m をひとつとって固定し, $k_i = c_m(R_i)$ とおく．$F_j^{(i)}(X_1, \cdots, X_m) + T_m(R_i)$ $(j = 1, \cdots, k_i)$ が $P_m/T_m(R_i)$ の基底となるような多項式 $F_j^{(i)}(X_1, \cdots, X_m)$ をとる．各

$\sigma \in \mathfrak{S}_m$ に対して

$$X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(m)} = \sum_{j=1}^{k_i} A^{(i)}_{\sigma,j} F^{(i)}_j (X_1, \cdots, X_m) \quad (\text{in } P_m/T_m(R_i)) \tag{2.8}$$

によって $A^{(i)}_{\sigma,j} \in \Bbbk$ を定め, x_σ $(\sigma \in \mathfrak{S}_m)$ を未知変数とする $\Bbbk$-係数連立一次方程式

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} A^{(1)}_{\sigma,j_1} A^{(2)}_{\sigma,j_2} x_\sigma = 0 \quad (j_1 = 1, \cdots, k_1; j_2 = 1, \cdots, k_2)$$

を考えよう. 我々の仮定より, 式の数 k_1k_2 は変数の数 $m!$ より小さい. したがって, 上の連立方程式は非自明な解を持つ. その解のひとつを $x_\sigma = \xi_\sigma \in \Bbbk$ $(\sigma \in \mathfrak{S}_m)$ とし,

$$P(X_1, \cdots, X_m) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \xi_\sigma X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(m)}$$

とおく. このときテンソル積 $R_1 \otimes R_2$ は $P = 0$ を満たすのである. 以下でこのことを示そう.

式 (2.8) より, 任意の $x_1, \cdots, x_m \in R_i$ に対して $x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)} = \sum_{j=1}^{k_i} A^{(i)}_{\sigma,j} F^{(i)}_j (x_1, \cdots, x_m)$ が成り立つことに注意しよう. $t_1, \cdots, t_m \in R_1 \otimes R_2$ とする. 各 t_i が単純テンソルであるとき, つまり $t_i = x_i \otimes y_i$ $(x_i \in R_1,\, y_i \in R_2)$ のようにあらわされるとき, ξ_σ たちの定義から

$$\begin{aligned} P(t_1, \cdots, t_m) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \xi_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(m)} \otimes y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(m)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \sum_{j_1=1}^{k_1} \sum_{j_2=1}^{k_2} \xi_\sigma A^{(1)}_{\sigma,j_1} A^{(2)}_{\sigma,j_2} F^{(1)}_j (x_1, \cdots, x_m) \otimes F^{(2)}_j (y_1, \cdots, y_m) = 0 \end{aligned}$$

となる. t_i たちが一般の元の場合は, 上の計算と P の多重線形性から $P(t_1, \cdots, t_m) = 0$ が従う. 以上で定理の証明が完了した. □

3　相対ホップ加群の射影性および自由性について

この章を通して, $\Bbbk$ を体とし, 代数といえば $\Bbbk$ 上の代数を意味する. また, 特に断りのない限り, $\otimes$ は $\Bbbk$ 上のテンソル積を意味する. この章の目的は, [Skr06, Skr07] から, Skryabin のいくつかの結果を紹介することである. 3.1 節から 3.3 節は, それらの結果を証明するために必要な環論的準備である. Skryabin の結果は, ホップ代数が弱有限性 (定義 1.3) を満たすことを要求する. 3.1 節では, 弱有限環の基本的な性質を紹介するとともに, 弱有限代数と PI 代数のテンソル積は弱有限であるという Montgomery [Mon83] の結果の証明を解説する. 3.2 節と 3.3 節の内容は簡単に説明することが難しいが, いずれも [Skr07] の内容の一部を詳述したものとなっている.

3.4 節では, 弱有限ホップ代数の対合射は単射であるという Skryabin [Skr06, Theorem A] の結果の証明を解説する. 続く 3.5 節では, 相対ホップ加群の自由性に関する Skryabin [Skr07, Theorem 3.5] の結果の証明を, 少しだけ仮定を強めた形で与える. この結果は, 余加群代数が H-単純性 (定義 1.4) を満たすことを前提とする. 最後の 3.6 節では, [Skr07] から H-単純性の十分条件を紹介し, 特に, 弱有限ホップ代数の有限次元右余イデアル部分代数は H-単純であることを示す.

3.1. 環論的準備 (1) 弱有限環について. 環のデデキント有限性および弱有限性については定義 1.3 で説明した. 以下の命題 3.1, 3.2, 3.3 から察せられるように, 弱有限環は小さくない環のクラスである.

命題 3.1. 可換環は弱有限である.

証明. 行列式を使えばよい. □

命題 3.2. 片側ネーター環は弱有限である.

証明. 以下の証明は [Lam99, §1B] を参考にした. 右でも左でもたいして変わらないので, 以下 R は右ネーター環とする. n を自然数とし, $AB = 1$ を満たす $A, B \in \mathrm{Mat}_n(R)$ をとる. このとき A が逆元を持つことを示したい. そのためには, 写像 $\phi \colon R^{\oplus n} \to R^{\oplus n}$ を $\phi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義し, これが全単射であることを示せばよい. $AB = 1$ から, ϕ が右 R-加群の全射準同型であることがわかる. ϕ の単射性について,

> 背理法. 仮に ϕ が単射でなかったとすれば, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{Ker}(\phi) \setminus \{0\}$ をひとつとり, $\phi^n(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{x}_0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ を満たすように $\boldsymbol{x}_n \in R$ をとることができる. このとき $\boldsymbol{x}_n \notin \mathrm{Ker}(\phi^n)$ かつ $\boldsymbol{x}_n \in \mathrm{Ker}(\phi^{n+1})$ であるため, $R^{\oplus n}$ の部分加群の無限昇鎖 $\mathrm{Ker}(\phi) \subsetneq \mathrm{Ker}(\phi^2) \subsetneq \mathrm{Ker}(\phi^3) \subsetneq \cdots$ が得られる. これは R の右ネーター性に矛盾する. ↯

したがって ϕ は全単射である. □

命題 3.3. PI 代数は弱有限である.

これを証明するために, まず, 以下の事実に注意しておく.

補題 3.4 ([Mon83, Lemma 2])**.** R を環とし, I を R のイデアルとする. もし $I \subset \mathrm{Jac}(R)$ ならば, 環 R の弱有限性と剰余環 R/I の弱有限性は同値である.

証明. $J = \mathrm{Jac}(R)$ とおく. 補題の主張より強く, 任意の自然数 n に対して $\mathrm{Mat}_n(R)$ のデデキント有限性と $\mathrm{Mat}_n(R/I)$ のデデキント有限性が同値であることを示そう. 自然な射影 $\mathrm{Mat}_n(R) \to \mathrm{Mat}_n(R/I)$ の核は $\mathrm{Mat}_n(I)$ であり, $\mathrm{Mat}_n(I) \subset \mathrm{Mat}_n(J) = \mathrm{Jac}(\mathrm{Mat}_n(R))$ だから, $n = 1$ の場合を示せば十分である.

以下, R のデデキント有限性と R/I のデデキント有限性が同値であることを示す. まず

R がデデキント有限であると仮定し, $xy = 1$ in R/I を満たす $x, y \in R$ をとる. このとき $z := 1 - xy \in I \subset J$ であるから $xy = 1 - z \in R^\times$ である. $u = (xy)^{-1}$ とおけば $xyu = 1$ である. R のデデキント有限性より $yux = 1$ を得るが, $u = 1$ in R/I より $yx = 1$ in R/I である.

次に, R/I がデデキント有限であると仮定し, $xy = 1$ を満たす $x, y \in R$ をとる. このとき R/I のデデキント有限性から $z := 1 - yx \in I \subset J$ である. したがって $yx = 1 - z \in R^\times$ である. そこで $y' = (yx)^{-1}y$ とおくと, これは x の左逆元である. したがって x は可逆で, $y\ (= y')$ はその逆元である. □

命題 3.3 の証明. R を PI 代数とし, $N = \mathrm{Nil}_*(R)$ とする. Amitsur の埋め込み定理 (定理 2.16) より, 被約な可換環 C が存在し, R/N は適当な次数の行列環 $\mathrm{Mat}_n(C)$ に埋め込むことができる. C は可換だから, $\mathrm{Mat}_n(C)$ は弱有限であり, したがって R/N もそうである. 補題 3.4 より R は弱有限である. □

次の補題は本当に簡単なことなのだけれども, 考え方がとても大事なので注意しておこう.

補題 3.5. R を代数とする. このとき,

$$R \text{ は弱有限である} \iff R \text{ の任意の有限生成部分代数は弱有限である.}$$

証明. 弱有限代数の部分代数は弱有限であることから, '$\Rightarrow$' は明らかである. 逆を示そう. R の任意の有限生成部分代数が弱有限であると仮定する. n を自然数とし, $XY = 1$ を満たす $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(R)$ をとる. X と Y の成分 (高々有限個である) によって生成される R の部分代数を R' とすれば, $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(R')$ とみなせる. 仮定より R' は弱有限であるから, $XY = 1$ より $YX = 1$ が従う. 以上より R は弱有限である. □

ホップ代数の理論では代数のテンソル積がたくさん出てくるから, ホップ代数への応用にあたっては, 弱有限代数のテンソル積が弱有限となるかどうかが気になるところである. この問題については Montgomery [Mon83] の論文が詳しい (ただしデデキント有限性は [Mon83] では von Neumann finiteness と呼ばれていることに注意されたい). Montgomery によれば, 弱有限代数のテンソル積は弱有限となるとは限らないのだが, 次のようなことは示せる.

定理 3.6 (Montgomery [Mon83, Theorem 1])**.** 弱有限代数と PI 代数のテンソル積は弱有限である.

証明はかなり大変である. まず, 一般的な結果である, 以下の補題を示しておこう.

補題 3.7 ([Mon83, Corollary 2])**.** 環 R の弱有限性と形式的冪級数環 $R[[t]]$ の弱有限性は同値である.

証明. 任意の $a \in R[[t]]$ に対し $(1 + at)^{-1} = 1 - at + a^2t^2 - a^3t^3 + \cdots \in R[[t]]$ だから,

$t \in \mathrm{Jac}(R[[t]])$ である[*2]. I を t で生成される $R[[t]]$ のイデアルとすると, 補題 3.4 より $R[[t]]$ の弱有限性と $R[[t]]/I$ の弱有限性は同値である. 後者は R に同型であるから, この補題の主張が従う. □

次のテクニカルな補題は, [Mon83, Theorem 1] の証明中の議論を抜き出したものである.

補題 3.8. F を体, $g(t) \in F[t]$ を定数でない多項式とする. F の適当な有限次数拡大 F' をとれば, $F(t)$ の部分代数 $F[t, g(t)^{-1}]$ を形式的冪級数環 $F'[[t]]$ に F-代数として埋め込むことができる.

証明. F' を, F の有限次数拡大であって, 集合としての濃度が $g(t)$ の次数より大きなものとする. このとき $g(\alpha) \neq 0$ を満たす $\alpha \in F'$ が存在する. そのような $\alpha \in F'$ をひとつとり, $t \mapsto t + \alpha$ によって定義される F-代数射 $T_\alpha : F[t] \to F'[[t]]$ を考える. $T_\alpha(g(t))|_{t=0} = g(t+\alpha)|_{t=0} = g(\alpha) \neq 0$ であるから, $T_\alpha(g(t))$ は $F'[[t]]$ において可逆である. したがって T_α は F-代数射 $F[t, g(t)^{-1}] \to F'[[t]]$ に拡大される. これが単射であることは, 構成から明らかであろう. □

以上の準備の下, まず, 弱有限代数と $\Bbbk$ の拡大体のテンソル積について議論しよう.

補題 3.9. A を弱有限代数, F を $\Bbbk$ の拡大体とするとき, $A \otimes F$ は弱有限である.

証明. $\Bbbk$ の拡大体 F に対する「体 $\Bbbk$ 上の任意の弱有限代数 A に対し, $A \otimes F$ は弱有限代数である」という命題を $P(F)$ と書くことにする. この補題は, $\Bbbk$ の任意の拡大体 F に対して命題 $P(F)$ が成立するということを主張している.

(1) 命題 $P(F)$ が成立するとき, F の有限次数拡大体 F' に対して $P(F')$ は成立する. 実際, F'/F の拡大次数を n とすれば, F' は $\mathrm{Mat}_n(F)$ に埋め込める. したがって, $\Bbbk$ 上の任意の代数 A に対し, $A \otimes F'$ は $A \otimes \mathrm{Mat}_n(F) \cong \mathrm{Mat}_n(A \otimes F)$ に埋め込める. 今, 命題 $P(F)$ の成立を仮定すれば, 任意の弱有限代数 A に対して $\mathrm{Mat}_n(A \otimes F)$ も弱有限であり, したがって $A \otimes F'$ もそうである.

(2) 命題 $P(F)$ が成立するとき, F の単純超越拡大 $F(t)$ に対して $P(F(t))$ は成立する. A を体 $\Bbbk$ 上の弱有限代数とし, A' を $\Bbbk$-代数 $A \otimes F(t)$ の有限生成部分代数とする. A' の生成元 $x_1, \cdots, x_n$ をとり, それらを $x_i = \sum_j a_{ij} \otimes f_{ij}(t)$ $(a_{ij} \in A,\ f_{ij} \in F(t))$ の形に表示しよう. $f_{ij}(t)$ たちの分母の最大公約多項式を $g(t) \in F[t]$ とし, $h_{ij}(t) := f_{ij}(t)g(t)$ とすれば $h_{ij}(t) \in F[t]$, $f_{ij}(t) = h_{ij}(t)/g(t)$ である. この $g(t)$ に対し, 補題 3.8 の F' をとる. A'' を a_{ij} たちで生成される A の部分代数とすれば,

$$A' \hookrightarrow A'' \otimes (F[t, g(t)^{-1}]) \hookrightarrow A'' \otimes (F'[[t']]) = (A'' \otimes F')[[t']]$$

[*2] 実は $\mathrm{Jac}(R[[t]])$ は t と $\mathrm{Jac}(R)$ で生成されるイデアルになっている [Lam01, Exercise 5.6].

である. (1) より $A'' \otimes F'$ は弱有限, したがって補題 3.7 より $(A'' \otimes F')[[t]]$ は弱有限, そしてその部分環である A' も弱有限である.

(3) $\Bbbk$ の任意の拡大体 F に対し, 命題 $P(F)$ は成立する. 命題 $P(\Bbbk)$ は自明に成立する. (1) と (2) より, $\Bbbk$ の任意の有限生成拡大体 F' に対して命題 $P(F')$ は成立する. さて, A を $\Bbbk$ 上の弱有限代数, F を $\Bbbk$ の任意の拡大体とし, A' を $\Bbbk$-代数 $A \otimes F$ の有限生成部分代数とする. A' の生成元 $x_1, \cdots, x_n$ をとり, それらを $x_i = \sum_j a_{ij} \otimes c_{ij}$ $(a_{ij} \in A,\ c_{ij} \in F)$ の形に表示しよう. A'' を a_{ij} たちで生成される A の部分代数, F' を $\Bbbk$ の要素と c_{ij} たちで生成される F の部分体とすれば $A' \subset A'' \otimes F'$ である. F' は $\Bbbk$ の有限生成拡大体であるから, $A'' \otimes F'$ は弱有限, したがってその部分環である A' も弱有限である. □

次に, 弱有限代数と被約な可換代数のテンソル積について議論する.

補題 3.10. A を弱有限代数, C を被約な可換代数とするとき, $A \otimes C$ は弱有限である.

証明. (1) C が $\Bbbk$ 上で有限生成の場合. このとき C はネーター的である. したがって, C の極小素イデアルは高々有限個である [Stacks, Lemma 00FR]. それらを $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ とし, F_i を C の $\mathfrak{p}_i$ による局所化とする. C の被約性より, 各 F_i は体であり, C は $\prod_{i=1}^n F_i$ に埋め込まれる [Stacks, Lemma 00EW]. したがって $A \otimes C$ は $\prod_{i=1}^n A \otimes F_i$ に埋め込まれる. 上の補題より各 $A \otimes F_i$ は弱有限である. 弱有限代数の直積はまた弱有限であるから, $A \otimes C$ は弱有限である.

(2) 一般の場合. n を自然数とし, $XY = 1$ を満たす $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(A \otimes C)$ をとる. X と Y の成分を $a \otimes c$ $(a \in A,\ c \in C)$ の形の要素の和として表すとき, 必要となる C の要素は高々有限個である. それらで生成される C の部分代数を C' とすれば $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(A \otimes C')$ である. C' は有限生成だから, (1) より $YX = 1$ となる. 以上より, $A \otimes C$ は弱有限である. □

定理 3.6 の証明. A を弱有限代数, B を PI 代数とし, $N = \mathrm{Nil}_*(B)$ とする. このとき B/N は半素 PI 代数であることに注意しておく. N の局所冪零性より, $A \otimes N$ は $A \otimes B$ の nil ideal であることがわかる. 特に, $A \otimes N$ は $\mathrm{Jac}(A \otimes B)$ に含まれる. 補題 3.4 より, $A \otimes B$ の弱有限性と $A \otimes (B/N) \cong (A \otimes B)/(A \otimes N)$ の弱有限性は同値であるから, 後者のほうを考えよう. Amitsur の埋め込み定理 (定理 2.16) より, 自然数 r と被約可換代数 C が存在し, B/N は $\mathrm{Mat}_r(C)$ に埋め込むことができる. ここで,

$$A \otimes \mathrm{Mat}_r(C) \cong \mathrm{Mat}_r(A \otimes C) \cong \mathrm{Mat}_r(A) \otimes C$$

であり, $\mathrm{Mat}_r(A)$ は弱有限だから, 補題 3.10 より $A \otimes \mathrm{Mat}_r(C)$ も弱有限である. 弱有限代数の部分代数は弱有限であるから, $A \otimes \mathrm{Mat}_r(C)$ の部分代数である $A \otimes (B/N)$ も弱有限である. □

3.2. 環論的準備 (2) Fitting イデアルの類似. R を可換環とし, M を有限生成 R-加群とする. 非負整数 s に対し, R のイデアル $\mathrm{Fitt}_s(M)$ を以下のようにして定義する. まず M は有限生成

であるから, 適当な自然数 n に対して全射準同型 $\pi : R^{\oplus n} \to M$ が存在する. $\mathrm{Ker}(\pi)$ の生成元 $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i\in I}$ を選ぶ (添字集合 I は有限とは限らないが問題ない). 各 $i \in I$ に対し, $\boldsymbol{a}_i$ の第 j 成分を a_{ij} とおく. $s = 0, 1, \cdots, n-1$ に対し, $\mathrm{Fitt}_s(M)$ を行列 $(a_{ij})_{i\in I, j\in\{1,\cdots,n\}}$ の $(n-s)$ 次小行列式の全体から生成されるイデアルとして定める. $s \geq n$ の場合は, $\mathrm{Fitt}_s(M) = R$ とする. 実はイデアル $\mathrm{Fitt}_s(M)$ は M や $\mathrm{Ker}(\pi)$ の生成元の取り方に依存しない. このようにして定義されるイデアルは Fitting イデアルと呼ばれる [Stacks, Section 07Z6]. これは可換環論や代数幾何学において様々な応用を持つが, ここでは触れない.

Skryabin [Skr07, Section 1] は, Fitting イデアルを用いて可換ホップ代数上の余加群代数 (言い換えればアフィン代数群の作用する代数) に対する結果を示している. 同様の議論の可換とは限らないホップ代数への適用を願うにあたり, まず Fitting イデアルの定義が問題となる. Fitting イデアルは行列式を使って定義されているが, 仮に非可換代数の要素からなる正方行列の行列式を安直に考えたとしても, 良い性質を持つかどうか甚だ疑問である. ところが, M が n 個の要素からなる生成系を持つ場合の $\mathrm{Fitt}_{n-1}(M)$ の定義には行列式が必要ない. そこで以下の定義を導入する.

定義 3.11 (*cf.* [Skr07, Section 2])**.** R を環, M を有限生成左 R-加群とする. M の生成系 $e_1, \cdots, e_n$ に対し, 線形結合 $x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = 0$ $(x_1, \cdots, x_n \in R)$ に現れ得る x_i たちの全体から生成される R のイデアルを $\mathcal{I}_{e_1,\cdots,e_n}$ と書く.

誤解のないようにもう少し形式的に書けば, $\mathcal{I}_{e_1,\cdots,e_n}$ は R の部分集合

$$\{x \in R \mid {}^{\exists}x_1, \cdots, x_n \in R \text{ such that } x \in \{x_1, \cdots, x_n\} \text{ and } x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = 0\}$$

から生成されるイデアルである. もし R が可換環である場合は, これは $\mathrm{Fitt}_{n-1}(M)$ と一致する. さて, 可換の場合と同様に, イデアル $\mathcal{I}_{e_1,\cdots,e_n}$ は M の不変量となっているのであろうか. 環 R に何も条件がない場合は [Skr07] でも考察されていないし, 反例などはわからないものの, 筆者としても “不変性” の成立は望めないのではないかと考える. しかしながら, 以下の補題 3.12 で示すような弱い意味での不変性が成立することは示されている. 補題の主張のためにひとつ用語を導入しておこう. I を (可換とは限らない) 環 R のイデアルとする. 剰余環 R/I が弱有限となるとき, I は**弱余有限**であるということにする.

補題 3.12 (*cf.* [Skr07, Lemma 2.3])**.** M を有限生成左 R-加群とし, $e_1, \cdots, e_n$ と $f_1, \cdots, f_n$ を同じ数の要素からなる二組の M の生成系とする. I が R の弱余有限イデアルであるとき, 以下のことが成り立つ.

$$\mathcal{I}_{e_1,\cdots,e_n} \subset I \iff \mathcal{I}_{f_1,\cdots,f_n} \subset I.$$

この補題の証明を与える前に, この補題のわかりやすい帰結を与えておく. ネーター環は弱有限であり, ネーター環の剰余環は再びネーター環であるから, ネーター環のイデアルはすべて弱

余有限である．したがって, R がネーター環である場合は, 補題 3.12 における I として $\mathcal{I}_{e_1,\cdots,e_n}$ や $\mathcal{I}_{f_1,\cdots,f_n}$ をとれる．これより,

補題 3.13. 補題 3.12 において, もし R がネーター環なら, $\mathcal{I}_{e_1,\cdots,e_n}=\mathcal{I}_{f_1,\cdots,f_n}$ である．

同様に, PI 代数は弱有限であり, PI 代数の剰余環は再び PI 代数であるから,

補題 3.14. 補題 3.12 において, もし R が PI 代数なら, $\mathcal{I}_{e_1,\cdots,e_n}=\mathcal{I}_{f_1,\cdots,f_n}$ である．

したがって, R をネーター環や PI 代数とするとき, n 個の要素 $e_1,\cdots,e_n$ で生成される左 R-加群 M に対して生成系の取り方に依存しないイデアル $\mathrm{Fitt}_{n-1}(M):=\mathcal{I}_{e_1,\cdots,e_n}$ を定義することができる．この '非可換 Fitting イデアル' については, [Skr07] の他には [Skr08] などの Skryabin の他の論文に多少記述がある程度で, ほとんど研究されていないように思われる．少なくともネーター環を含むようなクラスの環の上の有限生成加群 M と非負整数 s に対して Fitting イデアル $\mathrm{Fitt}_s(M)$ を上手く定義できるかどうかは興味深い問題であろう．

補題 3.12 の証明. 記号は補題の主張にあるとおりとする．対称性より, '$\Rightarrow$' のみ示せば十分である．補題の仮定より, $e_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}f_j$, $f_i=\sum_{j=1}^n b_{ij}e_j$ $(a_{ij},b_{ij}\in R)$ と表せる．これより $e_i=\sum_{j,k=1}^n a_{ij}b_{jk}e_k$ となる．イデアル $\mathcal{I}_{e_1,\cdots,e_n}$ の定義より

$$\sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj}-\delta_{ij}1_R\in\mathcal{I}_{e_1,\cdots,e_n}\quad(i,j=1,\cdots,n)\tag{3.1}$$

である．さて, I を $\mathcal{I}_{e_1,\cdots,e_n}$ を含み R/I が弱有限であるようなイデアルとする．このとき $X,Y\in\mathrm{Mat}_n(R/I)$ を $X=(a_{ij}+I)$, $Y=(b_{ij}+I)$ で定義すると, (3.1) より $XY=1$ である．今 R/I は弱有限であるから, $YX=1$ も成り立つ．このことを成分で書けば,

$$\sum_{s=1}^n b_{is}a_{sj}-\delta_{ij}1_R\in I\quad(i,j=1,\cdots,n).\tag{3.2}$$

さて, $c_1,\cdots,c_n\in R$ が $\sum_{i=1}^n c_if_i=0$ を満たすと仮定する．$f_i=\sum_{j=1}^n b_{ij}e_j$ より

$$\sum_{i=1}^n c_ib_{ij}\in\mathcal{I}_{e_1,\cdots,e_n}\subset I\quad(i=1,\cdots,n)\tag{3.3}$$

であることがわかる．(3.2) と (3.3) より, 各 $k=1,\cdots,n$ に対して

$$c_k=\sum_{j=1}^n\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n c_ib_{ij}\right)}_{\in I}a_{jk}-\sum_{i=1}^n c_i\underbrace{\left(\sum_{j=1}^n b_{ij}a_{jk}-\delta_{ik}1_R\right)}_{\in I}\in I$$

が成り立つ．これより $\mathcal{I}_{f_1,\cdots,f_n}\subset\mathcal{I}_{e_1,\cdots,e_n}$ が示された． □

3.3. 環論的準備 (3) 半局所環上の加群の自由性基準. $R/\mathrm{Jac}(R)$ が半単純環となるような環 R を**半局所環** (semilocal ring) と呼ぶのであった. ここでは半局所環上の加群が自由加群となるための条件を考察する. 我々は左加群のみ考察する. R が半局所環であるとき, R^{op} もそうであるから, 左加群に関する結果はただちに右加群に関する結果に読み替えられる.

さて, しばらくの間, R を一般の環とし, $J = \mathrm{Jac}(R)$ とする. 以下の 2 つの補題は基本的である.

補題 3.15. P と Q を有限生成射影的左 R-加群とする. このとき,

$$P \cong Q \quad \Longleftrightarrow \quad P/JP \cong Q/JQ.$$

証明. '$\Rightarrow$' は明らかである. 逆を示そう. 自然な射影 $\pi : P \to P/JP$ を考える. $\mathrm{Ker}(\pi) = JP$ であるから, 中山の補題より $N + \mathrm{Ker}(\pi) = P$ となる部分加群 $N \subset P$ は $N = P$ に限る. これは $\pi : P \to P/JP$ が射影被覆であるということを意味する. 同様に Q も Q/JQ の射影被覆である. もし $P/JP \cong Q/JQ$ ならば, 射影被覆の一意性より, $P \cong Q$ である. □

補題 3.16. 非負整数 n と有限生成射影的左 R-加群 P に対し,

$$P \text{ は階数 } n \text{ の自由 } R\text{-加群} \quad \Longleftrightarrow \quad P/JP \text{ は階数 } n \text{ の自由 } (R/J)\text{-加群}.$$

証明. '$\Rightarrow$' は明らかである. 逆を示そう. P/JP が階数 n の自由 (R/J)-加群であると仮定する. $Q = R^{\oplus n}$ とすれば Q/JQ も階数 n の自由 (R/J)-加群であり, 特に $P/JP \cong Q/JQ$ である. 前の補題より $P \cong Q$ となり, P は階数 R の自由 R-加群であるとわかる. □

可換環上の有限生成射影加群の階数について思い出そう [Lam99, Chapter 1, §2D]. R を可換環, $\mathfrak{p}$ を R の素イデアルとする. P を有限生成射影的 R-加群とする. このとき $R_{\mathfrak{p}} \otimes_R P$ は $\mathfrak{p}$ による局所化 $R_{\mathfrak{p}}$ の上の有限生成射影加群となる. $R_{\mathfrak{p}} \otimes_R P$ は可換な局所環上の有限生成射影加群として自由 $R_{\mathfrak{p}}$-加群となるので, その階数を $\mathrm{rank}_{\mathfrak{p}}(P) := \mathrm{rank}_{R_{\mathfrak{p}}}(R_{\mathfrak{p}} \otimes_R P)$ と書くことにしよう. 対応 $\mathfrak{p} \mapsto \mathrm{rank}_{\mathfrak{p}}(P)$ によって $\mathrm{Spec}(R)$ 上の関数が定義されるが, これが定数関数であるとき, その値を P の階数と呼ぶのであった.

実は用があるのは階数そのものではなく, その定義に用いられている $\mathrm{rank}_{\mathfrak{p}}(P)$ という値のほうである. 我々は類似の数値的不変量を, 可換とは限らない環の上の有限生成射影加群に対して定義したい. 非可換環上の局所化は技術的に難しいことが多いから, 上の定義を少々書き換えておく. $Q(D)$ で整域 D の分数体を表す (なお, この記号はここでしか使わない). 剰余体 $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ は $Q(R/\mathfrak{p})$ と同一視できることに注意しよう. 簡単のため $\mathfrak{p}$ は極大イデアルであるとし, あくまで雰囲気のためだが $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{m}$ と書き直す. このとき, R-加群として

$$R/\mathfrak{m} = Q(R/\mathfrak{m}) \cong R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}} \cong (R/\mathfrak{m}) \otimes_R R_{\mathfrak{m}}$$

である. したがって, $n = \mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(P)$ とするとき,

$$P/\mathfrak{m}P \cong (R/\mathfrak{m}) \otimes_R P \cong (R/\mathfrak{m}) \otimes_R R_{\mathfrak{m}} \otimes_R P \cong (R/\mathfrak{m}) \otimes_R (R_{\mathfrak{m}}^{\oplus n}) \cong (R/\mathfrak{m})^{\oplus n}$$

となる. そこで我々は, R が可換とは限らない場合に, '加群 $P/\mathfrak{m}P$ が加群 $R/\mathfrak{m}$ のいくつ分であるか' を以って $\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(P)$ という量を再定義することにする. 記法上の便利のため, P が有限生成射影的であるという条件も外しておこう. 詳しくは以下のとおりである.

定義 3.17 (*cf.* [Skr07])**.** R を環, $\mathfrak{m} \subset R$ を極大イデアルとする. 左 R-加群 P に対し,

$$\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(P) := \frac{\ell_R(P/\mathfrak{m}P)}{\ell_R(R/\mathfrak{m})} \in \mathbb{Q} \tag{3.4}$$

とおく. ただし, ℓ_R は R-加群としての長さであり, 分子と分母が有限であることは前提とする.

どのようなときに (3.4) の分子と分母が有限となるのかについて調べておこう. $R/\mathfrak{m}$ や $P/\mathfrak{m}P$ の R-加群としての長さは, $(R/\mathfrak{m})$-加群としての長さと同じであることに注意しておく. 分母の $\ell_R(R/\mathfrak{m})$ が有限であるということは, $R/\mathfrak{m}$ がアルチン環であることと同値である. $R/\mathfrak{m}$ がアルチン環であるとき, $\ell_R(P/\mathfrak{m}P)$ の有限性は $P/\mathfrak{m}P$ が有限生成であることと同値である. 話をまとめておくと,

補題 3.18. R を環, $\mathfrak{m}$ を R の極大イデアル, P を左 R-加群とする. $R/\mathfrak{m}$ がアルチン環であり, P が R-加群として有限生成であれば, $\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(P)$ は定義される.

そこで R, $\mathfrak{m}$, P は上の補題の仮定を満たすとする. このとき $R/\mathfrak{m}$ はアルチン的単純環であるから, 同型を除きただ一つの単純加群を持つ. それを V とすれば, $R/\mathfrak{m}$ と $P/\mathfrak{m}P$ は $R/\mathfrak{m}$ 上有限生成であるため,

$$R/\mathfrak{m} \cong V^{\oplus r}, \quad P/\mathfrak{m}P \cong V^{\oplus s} \quad (r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, r \neq 0) \tag{3.5}$$

の形に分解される. この r と s を用いれば, $\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(P) = s/r$ である. もし $R/\mathfrak{m}$ が体であれば, 必ず $r = 1$ となり, $\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(P)$ は体 $R/\mathfrak{m}$ 上のベクトル空間 $P/\mathfrak{m}P$ の次元と一致する. 特に, R が可換の場合は, はじめに与えた定義と同じになる.

一般の場合は $n := s/r$ は整数とは限らない. 式 (3.5) より, n が整数であることと, $P/\mathfrak{m}P$ が $R/\mathfrak{m}$ 上の自由加群であることは同値である. さらに, n が整数であるとき, n は $R/\mathfrak{m}P$ の $(R/\mathfrak{m})$-加群としての階数と等しい. 後で使うため, この結果を次の補題の形でまとめておこう.

補題 3.19. R を環, $\mathfrak{m}$ を $R/\mathfrak{m}$ がアルチン環となるような R の極大イデアル, n を非負整数とする. このとき, 任意の有限生成左 R-加群 P に対し,

$$\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(P) = n \iff P/\mathfrak{m}P \text{ は階数 } n \text{ の自由 } (R/\mathfrak{m})\text{-加群である.}$$

環 R に対し, その極大イデアル全体の集合を $\mathrm{Max}(R)$ で表す. 実は, 半局所環というのは, $\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(P)$ という不変量を用いた議論をするためにとても都合の良い設定になっている. それを説明するために, まず, 以下の事実に注意しておこう.

補題 3.20. R を環とし, $J = \mathrm{Jac}(R)$ とする. 標準的全射 $\pi : R \to R/J$ によって誘導される写像

$$\mathrm{Max}(R/J) \to \mathrm{Max}(R), \quad \mathfrak{m} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{m})$$

は全単射である.

証明. 対応 $I \mapsto \pi^{-1}(I)$ は, R/J のイデアル全体の集合と, R のイデアルで J を含むようなもの全体の集合との間に, 包含関係を保つ全単射を引き起こす. したがって, この補題を証明するためには, R の任意の極大イデアルが J を含むということを示せばよい. $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ とする. このとき, 極大性より $\mathfrak{m} + J$ は $\mathfrak{m}$ または R のいずれかとなるが, もし後者となるならば中山の補題より $\mathfrak{m} = R$ となり, $\mathfrak{m}$ が極大イデアルであることと矛盾する. したがって $\mathfrak{m} + J = \mathfrak{m}$, すなわち $J \subset \mathfrak{m}$ である. □

上の補題を用いて, 半局所環の極大イデアルに関する次の事実を証明しよう.

補題 3.21. R を半局所環とし, $J = \mathrm{Jac}(R)$ とおく. このとき,

(1) $\mathrm{Max}(R)$ は有限集合である.
(2) R の極大イデアルたちの共通部分は J と一致する.
(3) 任意の $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ に対し, $R/\mathfrak{m}$ はアルチン的単純環である.
(4) R の任意の真イデアルに対し, それを含む R の極大イデアルが存在する.
(5) 左 R-加群 P に対し, 以下の自然な同型がある：

$$\phi_P : P/JP \to \prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)} P/\mathfrak{m}P, \quad (a + JP) \mapsto (a + \mathfrak{m}P)_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)}. \tag{3.6}$$

証明. R/J は半単純環であるから, Artin-Wedderburn の定理が適用できる. 既約左 (R/J)-加群の同型類の完全代表系を $V_1, \cdots, V_n$ としよう. 各 V_i の annihilator を $\mathfrak{m}_i$ とすれば, $\mathrm{Max}(R/J) = \{\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_n\}$ であり, $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i = 0$ である. (1) と (2) は, もはや補題 3.20 より明らかである. (3) は $R/\mathfrak{m}$ が R/J の商であることから従う.

(4) $\pi : R \to R/J$ を標準的な全射とする. I を R の真のイデアルとすると, 中山の補題より $I + J \subsetneq R$ である. Artin-Wedderburn の定理より, R/J のイデアル $\pi(I + J)$ を含む R/J の極大イデアルが存在する. それを $\mathfrak{m}$ とすれば, $\pi^{-1}(\mathfrak{m})$ は R の極大イデアルであり, $I \subset I + J \subset \pi^{-1}(\mathfrak{m})$ が成り立つ.

(5) $\widetilde{\mathfrak{m}}_i = \pi^{-1}(\mathfrak{m}_i)$ とおく．Artin-Wedderburn の定理から同型写像

$$R/J \to \prod_{i=1}^{n}(R/J)/\mathfrak{m}_i \cong \prod_{i=1}^{n} R/\widetilde{\mathfrak{m}}_i, \quad (a+J) \mapsto (a+\widetilde{\mathfrak{m}}_i)_{i=1}^{n} \quad (a \in R)$$

を得る．これは (3.6) において $P = R$ としたものに他ならない．したがって ϕ_R は同型である．一般の P に対する ϕ_P は, ϕ_R に関手 $(-)\otimes_R P$ を適用して得られるから, これも同型である．$\square$

以上の議論を踏まえて, $\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}$ を用いた有限生成射影加群の自由性の基準を与える．

補題 3.22. R を半局所環, P を有限生成射影的左 R-加群, k を非負整数とする．このとき,

$P^{\oplus k}$ は自由 R-加群である $\iff$ $k \cdot \mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(P)$ は $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ に依存しない整数である．

証明. $Q := P^{\oplus k}$ が自由 R-加群であると仮定する．補題 3.16 より, Q/JQ は自由 (R/J)-加群である．そこで Q/JQ の (R/J)-加群としての階数を n とすれば, 同型 (3.6) より, すべての $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ に対して $Q/\mathfrak{m}Q$ は階数 n の自由 $(R/\mathfrak{m})$-加群であることがわかる．補題 3.19 より $k \cdot \mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(P) = \mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(Q) = n \in \mathbb{Z}$ となり, ‘$\Rightarrow$’ の証明が完了した．逆も同様にして証明できる．$\square$

以下, R を半局所環とし, 左 R-加群のクラス $\mathfrak{V}$ を

$\mathfrak{V} = \{P \mid P$ は有限生成射影的左 R-加群であり, ある自然数 k に対して $P^{\oplus k}$ は自由 R-加群となる $\}$

で定義する．補題 3.19 と補題 3.22 より,

補題 3.23 (*cf.* [Skr07, Lemma 2.4])**.** $P \in \mathfrak{V}$ に対し,

P は自由 R-加群である $\iff$ ある $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ に対し, $\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(P) \in \mathbb{Z}$ である
$\iff$ ある $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ に対し, $P/\mathfrak{m}P$ は自由 $(R/\mathfrak{m})$-加群である．

最後に, クラス $\mathfrak{V}$ についての技術的な補題を与えておく．

補題 3.24 (*cf.* [Skr07, Lemma 2.4])**.** ある $U \in \mathfrak{V}$ が存在し, クラス $\mathfrak{V}$ に属する任意の加群は U の有限直和と同型になる．

証明. $V \in \mathfrak{V}$ とする．補題 3.22 より, $\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(V)$ は $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ に依存しない有理数である．そこで, その共通の値を $r(V)$ で表すことにする．$\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}$ の定義より, $\ell = \gcd\{\ell_R(R/\mathfrak{m}) \mid \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)\}$ とおけば, $r(V) \in \frac{1}{\ell}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ である．$\frac{1}{\ell}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ は整列集合であるから, 関数 r の値を最小にするような $U \in \mathfrak{V} \setminus \{0\}$ をとることができる．実はこの U が条件を満たす．以下, そのことを示そう．

まず, $r(V) \geq r(W)$ を満たす $V, W \in \mathfrak{V}$ に対し, R-加群の全射 $V \to W$ が存在することに注意する．実際, 長さに関する考察から, 各 $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ に対して R-加群の全射 $V/\mathfrak{m}V \to W/\mathfrak{m}W$ があることがわかる．同型 (3.6) により, この全射たちから全射 $\overline{\xi} : V/JV \to W/JW$ が誘導される．V は射影的だから, この全射は準同型写像 $\xi : V \to W$ に持ち上がる．$\overline{\xi}$ の全射性は $\xi(V) + JW = W$ を意味する．中山の補題より, $\xi(V) = W$ である．すなわち, ξ は全射である．

さて, $V \in \mathfrak{V}$ とする．n を $n \cdot r(U) \leq r(V)$ を満たすような非負整数のうちで最大のものとする．このとき, 上の議論より, $U^{\oplus n}$ は V の全射像である．$U^{\oplus n}$ は射影加群であるから, $V \cong T \oplus U^{\oplus n}$ となる R-加群 T が存在する． この T に関して $\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(T) = \mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(V) - n \cdot \mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(U) = r(V) - n \cdot r(U)$ であり, これは $\mathfrak{m}$ に依存しない．補題 3.22 より, T は $\mathfrak{V}$ に属する．n の最大性より $r(T) < r(U)$ となる．したがって, U の最小性より, $r(T) = 0$ である．これは $T = 0$ を意味する．よって $V \cong U^{\oplus n}$ である． □

3.4. 弱有限ホップ代数の対合射の単射性． 本節では, 弱有限ホップ代数に関する以下の結果を示す．

定理 3.25 (Skryabin [Skr06, Theorem A])**.** 弱有限ホップ代数の対合射は単射である．

余代数と余加群に関する記法は 1.1 説の冒頭で導入している． この定理の証明のために, 余加群に関する基本的なことについて注意しておく． H をホップ代数とし, M を有限次元右 H-余加群とする． $e_1, \cdots, e_n$ を M の基底とするとき, 行列 $\mathbf{c} = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(H)$ を $\delta_M(e_j) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes c_{ij}$ $(j = 1, \cdots, n)$ によって定義できる． この行列 $\mathbf{c}$ を M の基底 $e_1, \cdots, e_n$ に関する**行列成分**と呼ぶことにしよう．余加群の公理より $\Delta(c_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \otimes c_{kj}$, $\varepsilon(c_{ij}) = \delta_{ij}$ が成り立つ．このことから, 行列 $\mathbf{c}$ は可逆で, その逆行列は $S(\mathbf{c})$ で与えられることが分かる (ただし, 行列 A に対する $S(A)$ は, A の各成分に S を適用して得られる行列を意味する).

さて, 対合射 S は反余代数射であるから, 右 H-余加群 U は

$$U \to H \otimes_{\Bbbk} U, \quad u \mapsto S(u_{(1)}) \otimes u_{(0)} \quad (u \in U)$$

によって左 H-余加群とみることができる．この左 H-余加群を U_S と書くことにする．

補題 3.26 (*cf.* Skryabin [Skr06, Lemma 1.1])**.** U を有限次元右 H-加群とし, $U = V \oplus W$ と部分空間 V と W の直和に分解されていると仮定する．このとき,

$$V \text{ と } W \text{ は } U \text{ の部分余加群である} \iff V \text{ と } W \text{ は } U_S \text{ の部分余加群である．}$$

証明. '$\Rightarrow$' は明らかである．逆を示そう．U の基底 $e_1, \cdots, e_n$ を, $e_1, \cdots, e_m$ が V の基底であり, 残りが W の基底となるように選ぶ．この基底に関する U の行列成分を $\mathbf{c} = (c_{ij})$ とし, 行

列 $\mathbf{c}_{ij}$ $(i,j=1,2)$ を

$$\mathbf{c}=\begin{pmatrix}\mathbf{c}_{11} & \mathbf{c}_{12}\\ \mathbf{c}_{21} & \mathbf{c}_{22}\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_n(H),\quad \mathbf{c}_{11}\in \mathrm{Mat}_m(H),\quad \mathbf{c}_{22}\in \mathrm{Mat}_{n-m}(H) \tag{3.7}$$

で定義する．さて, V と W が U_S の部分余加群なら, $S(\mathbf{c}_{12})=S(\mathbf{c}_{21})=0$ である．したがって

$$\mathbf{c}^{-1}=S(\mathbf{c})=\begin{pmatrix}S(\mathbf{c}_{11}) & 0\\ 0 & S(\mathbf{c}_{22})\end{pmatrix}$$

となり, これより

$$\begin{pmatrix}\mathbf{c}_{11}S(\mathbf{c}_{11}) & \mathbf{c}_{12}S(\mathbf{c}_{22})\\ \mathbf{c}_{21}S(\mathbf{c}_{11}) & \mathbf{c}_{22}S(\mathbf{c}_{22})\end{pmatrix}=\mathbf{c}S(\mathbf{c})=1=S(\mathbf{c})\mathbf{c}=\begin{pmatrix}S(\mathbf{c}_{11})\mathbf{c}_{11} & S(\mathbf{c}_{11})\mathbf{c}_{12}\\ S(\mathbf{c}_{22})\mathbf{c}_{21} & S(\mathbf{c}_{22})\mathbf{c}_{22}\end{pmatrix}$$

を得る．対角部分のブロックを見れば $\mathbf{c}_{ii}$ $(i=1,2)$ は可逆であることがわかり, その結果, 非対角部分から $\mathbf{c}_{12}$ と $\mathbf{c}_{21}$ がともに 0 であることがわかる．これは V と W が U の部分余加群であることを意味する． □

補題 3.27 (*cf.* Skryabin [Skr06, Lemma 1.2])**.** ホップ代数 H に対し, 以下の条件は同値である．

1. H の対合射 S は単射である．
2. 任意の単純右 H-余加群 U に対し, U_S は単純である．
3. 任意の右 H-余加群 U に対し, U_S の部分余加群はいつも U の部分余加群である．

証明. (1) ⇒ (2). U を単純右 H-余加群とする (余加群の基本定理より, U は有限次元である)．W を U_S の部分余加群とする．W の基底 $e_1,\cdots,e_m$ をとり, これを拡張して U の基底 $e_1,\cdots,e_n$ とする．この基底に関する U の行列表示を $\mathbf{c}=(c_{ij})$ とすると, W は U_S の部分余加群であるため, $m<i\le n$ かつ $1\le j\le m$ のとき $S(c_{ij})=0$ となる．S は単射であるから, 同範囲の i と j に対して $c_{ij}=0$ となるが, これは W が U の部分余加群であることを意味する．U は単純だから, $W=0$ または $W=U$ である．以上より, U_S は単純余加群である．

(2) ⇒ (3). U を右 H-余加群, W を U_S の部分余加群とする．以下, W が U の部分余加群であることを示そう．まず, U が有限次元のとき, 主張を U の次元に関する帰納法で示す．$U=0$ の場合は, 主張は明らかに成り立つ．そこで $U\neq 0$ であると仮定し, U の極大部分余加群 V をとる．もし $W\subset V$ ならば, 帰納法の仮定より W は U の部分余加群である (注意しておくと, W は U_S の部分余加群だから, $W\subset V$ となるように V をとれるかどうかはわからないのである)．以下では $W\not\subset V$ であるとしよう．

帰納法の仮定を V_S の部分余加群 $V_S\cap W$ に対して適用することにより, $V\cap W$ は V の, したがって U の部分余加群であることがわかる．V の極大性より U/V は単純余加群だから, (2) より $U_S/V_S=(U/V)_S$ も単純余加群である．つまり, V_S は U_S の極大部分余加群である．今

$W \not\subset V$ だから, 極大性より $U_S = V_S + W$ である. これより, ベクトル空間としての直和分解 $U/(V \cap W) = V/(V \cap W) \oplus W/(V \cap W)$ を得る. この分解は $(U/(V \cap W))_S$ の左 H-余加群としての分解であるため, 補題 3.26 より, $W/(V \cap W)$ が $U/(V \cap W)$ の部分余加群であるとわかる. これは W が U の部分加群であることを意味する.

以上で U が有限次元の場合の証明が完了した. 次に U が無限次元の場合を考えよう. 余加群の基本定理より, $W = \sum_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ となる U_S の有限次元部分加群の族 $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在する. 再び余加群の基本定理より, 各 λ に対し, 部分空間 $W_\lambda \subset U$ を含む有限次元部分余加群 U_λ が存在する. W_λ は $(U_\lambda)_S$ の部分余加群であるから, 有限次元の場合の議論より, W_λ は U_λ の, したがって U の部分余加群である. これより, それらの和である $W = \sum_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ も U の部分余加群であることになる.

<u>(3) ⇒ (1)</u>. H を余積によって H-余加群とみるとき, 対合射 $S : H_S \to H$ は左 H-余加群の射であるから, その核 $\mathrm{Ker}(S)$ は H_S の部分余加群である. したがって, (3) より, $\mathrm{Ker}(S)$ は右 H-余加群 H の部分余加群となる. さて, $h \in \mathrm{Ker}(S)$ とすると, 上の議論より $\Delta(h) = \sum_i k_i \otimes h_i$ ($k_i \in \mathrm{Ker}(S)$, $h_i \in H$) の形で表せることになる. これより $h = S(h_{(1)})h_{(2)}h_{(3)} = \sum_i S(k_i)h_{i(1)}h_{i(2)} = 0$ となる. ゆえに S は単射である. □

定理 3.25 の証明. 補題 3.27 より, 任意の既約な右 H-余加群 U に対し, U_S が既約であることを示せばよい. U を既約な右 H-余加群とし, V を U_S の部分余加群とする. U の基底 $e_1, \cdots, e_n$ を, $e_1, \cdots, e_m$ が V の基底となるように選ぶ. この基底に関する U の行列成分を $\mathbf{c} = (c_{ij})$ とし, 行列 $\mathbf{c}_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$ を (3.7) で定義する. V は U_S の部分加群であるから, $S(\mathbf{c}_{21}) = 0$ である. $S(\mathbf{c}) = \mathbf{c}^{-1}$ より,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_{11}S(\mathbf{c}_{11}) & \mathbf{c}_{11}S(\mathbf{c}_{12}) + \mathbf{c}_{12}S(\mathbf{c}_{22}) \\ \mathbf{c}_{21}S(\mathbf{c}_{11}) & \mathbf{c}_{21}S(\mathbf{c}_{12}) + \mathbf{c}_{22}S(\mathbf{c}_{22}) \end{pmatrix} = \mathbf{c}S(\mathbf{c}) = 1$$

を得る. 両辺の左上のブロックを比較することで $\mathbf{c}_{11}S(\mathbf{c}_{11}) = 1$ を得るが, H は弱有限であるから, 実は $\mathbf{c}_{11}$ と $S(\mathbf{c}_{11})$ は互いに逆元であるとわかる. したがって, 両辺の左下のブロックを比較することで $\mathbf{c}_{21} = 0$ を得る. これは V が U の部分余加群であることを意味する. U の既約性より $V = 0$ または $U = 0$ となる. 以上のことから U の既約性がしたがう. □

3.5. 相対ホップ加群の射影性. H をホップ代数, A を右 H-余加群代数とする. 1.1 節で, 相対ホップ加群の圏 ${}_A\mathfrak{M}^H$ および $\mathfrak{M}^H_A$ を導入した. 本節の目標は, 次の定理を証明することである.

定理 3.28 (*cf.* Skryabin [Skr07, Theorem 3.5])**.** $\mathcal{C}$ を ${}_A\mathfrak{M}^H$ と $\mathfrak{M}^H_A$ のいずれかとする. 以下, $\mathcal{C} = {}_A\mathfrak{M}^H$ の場合は 'A-加群' は左 A-加群を, そうでない場合は 'A-加群' は右 A-加群を意味することとする. H は弱有限, A は H-単純 (定義 1.4) かつ半局所 PI であると仮定する. このとき,

(a) A-加群として有限生成であるような任意の $\mathcal{C}$ の対象は, A-加群として射影的である. さらに, A-加群として有限生成であるような対象 $M \in \mathcal{C}$ に対し, 以下の条件は同値である.
  (1) M は A-加群として自由である.
  (2) $M/\mathfrak{m}M$ が $(A/\mathfrak{m})$-加群として自由であるような $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$ が存在する.

(b) もし $M \in \mathcal{C}$ が A-加群として有限生成でないならば, それは自由 A-加群である.

はじめに, この定理の重要な系を与えておく. 斜体上の加群はすべて自由だから,

系 3.29 (*cf.* Skryabin [Skr07, Corollary 3.6])**.** 定理 3.28 の仮定に加えて, さらに, $A/\mathfrak{m}$ が斜体となるような極大イデアル $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$ が存在すると仮定する. このとき, ${}_A\mathfrak{M}^H$ および $\mathfrak{M}_A^H$ のすべての対象は, A-加群として自由である.

証明に入る前に, オリジナルとの仮定の違いについて説明しておきたい. Skryabin は,

$$A \text{ は } H\text{-単純な半局所代数であり, 任意の } \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A) \text{ に対して } (A/\mathfrak{m}) \otimes H \text{ は弱有限である} \tag{3.8}$$

という仮定のもとで, $\mathfrak{M}_A^H$ に関して定理 3.28 と同様の結果を示した [Skr07, Theorem 3.5]. PI 代数の商は PI であるという事実と Montgomery の定理 3.6 より, 定理 3.28 の仮定のもとでは (3.8) も満たされる. このような意味で, 定理 3.28 はオリジナルのものよりも仮定が強くなっていると思われる. しかし, 本稿での応用に限っては定理 3.28 でも十分であり, 仮定を強めたことにより議論の流れがはっきりと分かるようにも思えるため, この形で紹介することにした.

次に, ${}_A\mathfrak{M}^H$ に関する結果についての注意を述べておく. Skryabin の定理 [Skr07, Theorem 3.5] では, $\mathfrak{M}_A^H$ のみが取り扱われている. A^{op} は H^{op}-余加群代数となるが, H^{op} はホップ代数になるかどうか分からないから, ${}_A\mathfrak{M}^H$ に関する結果と $\mathfrak{M}_A^H$ に関する結果を相互に読み替えることはできない. つまり, ${}_A\mathfrak{M}^H$ の場合も同様に, というわけにはいかないのである. さて, 仮に H^{op} がホップ代数でないとすれば, どのような問題が生じるのであろうか. このことを考えるため, [Skr07, Theorem 3.5] の証明中で対合射が用いられている箇所を点検してみたところ, 実は次の補題の証明のみであった.

補題 3.30 (Skryabin [Skr07, Lemma 3.1])**.** $M \in \mathfrak{M}_A^H$ が左 A-加群として $e_1, \cdots, e_n \in M$ で生成されているとき, $M \otimes H$ は右 $(A \otimes H)$-加群として $\delta_M(e_1), \cdots, \delta_M(e_n)$ で生成される.

${}_A\mathfrak{M}^H$ の場合に同様のことを証明しようとすると上手くいかない. その代わりに, この補題の主張を S^2 で捻ったものが証明できる (補題 3.32). 今, H は弱有限であるとしているため, 定理 3.25 より対合射は単射である. そのことを使って A の H-イデアルに関する補題 3.33 を得た後は, ${}_A\mathfrak{M}^H$ の場合も $\mathfrak{M}_A^H$ の場合も議論は変わらない.

さて, 前置きが長くなってしまったが, 定理 3.28 の証明に入る. 本稿では ${}_A\mathfrak{M}^H$ の場合を証明することにする ($\mathfrak{M}_A^H$ の場合は [Skr07] を参照せよ). 3.2 節で, 加群の生成系 $e_1, \cdots, e_n$ に対し

イデアル $\mathcal{I}_{e_1,\cdots,e_n}$ を導入した (定義 3.11). A と B を代数とし, M を左 A-加群とする. M が $e_1,\cdots,e_n \in M$ で生成されるとき, 左 $(A\otimes B)$-加群 $M\otimes B$ は $e_1\otimes 1,\cdots,e_n\otimes 1$ で生成されるから, $A\otimes B$ のイデアル $\mathcal{I}_{e_1\otimes 1,\cdots,e_n\otimes 1}$ を考えることができる. まず, 次の簡単な補題に注意しておこう.

補題 3.31. 上の記号のもと, $\mathcal{I}_{e_1\otimes 1,\cdots,e_n\otimes 1} = \mathcal{I}_{e_1,\cdots,e_n}\otimes B$ が成り立つ.

証明. $x_1,\cdots,x_n \in A\otimes B$ が $\sum_{i=1}^n x_i(e_i\otimes 1)=0$ を満たすと仮定する. 各 x_i を $a\otimes b$ ($a\in A$, $b\in B$) の形の要素の有限和で表しておき, その表示に現れる B の要素たちによって張られる B の有限次元部分空間の基底を $b_1,\cdots,b_m$ とする. このとき各 x_i は $x_i=\sum_{j=1}^m a_{ij}\otimes b_j$ ($a_{ij}\in A$) の形で表すことができる. $\sum_{i=1}^n x_i(e_i\otimes 1)=0$ より $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_{ij}e_i\otimes b_j=0$ を得るが, b_j たちは一次独立だから, $\sum_{i=1}^n a_{ij}e_i=0$ ($j=1,\cdots,m$) である. これは, 各 a_{ij} が $\mathcal{I}_{e_1,\cdots,e_n}$ に属することを意味する. したがって各 x_i は $\mathcal{I}_{e_1,\cdots,e_n}\otimes B$ に属する. これで '$\subset$' が示された. 逆の包含関係は明らかであろう. □

右 H-余加群 M に対し, $\delta'_M=(\mathrm{id}_M\otimes S^2)\circ\delta_M$ とおく. 以下, A を右 H-余加群代数とする.

補題 3.32. $M\in {}_A\mathfrak{M}^H$ が左 A-加群として $e_1,\cdots,e_n\in M$ で生成されているとき, 左 $(A\otimes H)$-加群 $M\otimes H$ は $\delta'_M(e_1),\cdots,\delta'_M(e_n)$ で生成される.

証明. 任意の $m\in M$ に対し, $m\otimes 1$ が $\delta'_M(e_1),\cdots,\delta'_M(e_n)$ の $A\otimes H$ 上の線形結合で表されることを示せばよい. $m\in M$ とし, $\delta_M(m)$ を $\delta_M(m)=\sum_{i,k}a_{ik}e_i\otimes h_k$ ($a_{ik}\in A$, $h_k\in H$) の形で表示すれば,

$$m_{(0)}\otimes m_{(1)}\otimes m_{(2)}=(\delta_M\otimes\mathrm{id}_H)\delta_M(m)=\sum_{i,k}a_{ik(0)}e_{i(0)}\otimes a_{ik(1)}e_{i(1)}\otimes h_k$$

である. したがって, $m\otimes 1=m_{(0)}\otimes S(m_{(2)})S^2(m_{(1)})$

$$=\sum_{i,k}a_{ik(0)}e_{i(0)}\otimes S(h_k)S^2(a_{ik(1)})S^2(e_{i(1)})\in\sum_i(A\otimes H)\cdot\delta'_M(e_i).$$ □

補題 3.33. H は弱有限, A は半局所 PI 代数であると仮定する. 相対ホップ加群 $M\in {}_A\mathfrak{M}^H$ が左 A-加群として $e_1,\cdots,e_n\in M$ で生成されているとき, イデアル $\mathcal{I}_{e_1,\cdots,e_n}$ は H-イデアルである.

証明. $\delta_A : A\to A\otimes H$ は代数射だから, $J:=\delta_A^{-1}(I\otimes H)$ は A のイデアルである. 定義より $\delta_A(J)\subset I\otimes H$ だから, $I\subset J$ を示せば, I が H-イデアルであることが示される. 補題 3.32 より $\delta'_M(e_1),\cdots,\delta'_M(e_n)$ は左 $(A\otimes H)$-加群 $M\otimes H$ を生成する. $a_1,\cdots,a_n\in A$ が $a_1e_1+\cdots+a_ne_n=0$ を満たすとき,

$$\delta'_A(a_1)\delta'_M(e_1)+\cdots+\delta'_A(a_1)\delta'_M(e_1)=\delta'_M(a_1e_1+\cdots+a_ne_n)=0$$

である．これは $\delta'_A(a_i)$ たちがイデアル $\mathcal{I}_{\delta'_M(e_1),\cdots,\delta'_M(e_1)}$ に属することを意味する．したがって，定理 3.6 および補題 3.14 から

$$\delta'_A(a_i) \in \mathcal{I}_{\delta'_M(e_1),\cdots,\delta'_M(e_1)} = \mathcal{I}_{e_1\otimes 1,\cdots,e_1\otimes 1} = I \otimes H \quad (i = 1, \cdots, n)$$

を得る．ここで S の単射性 (定理 3.25) より, $\delta_A(a_i) \in I \otimes H$ $(i = 1, \cdots, n)$ であることがわかる．すなわち, 各 a_i は J に属する．これで $I \subset J$ が示され, 証明は完了した． □

補題 3.34. H は弱有限, A は半局所 PI 代数であると仮定する．P を左 A-加群として有限生成であるような ${}_A\mathfrak{M}^H$ の対象とし, 次の条件を満たす $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$ が存在すると仮定する．

1. $\mathfrak{m}$ は非自明な H-イデアルを含まない．
2. $\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(P) \geq \mathrm{rank}_{\mathfrak{n}}(P)$ for all $\mathfrak{n} \in \mathrm{Max}(A)$.

このとき, $P^{\oplus k}$ が左 A-加群として自由となるような自然数 k が存在する． さらに, もし $\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(P)$ が整数なら, 実は M 自身が左 A-加群として自由である．

証明. $r = \mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(P)$ とし, k を $kr \in \mathbb{Z}$ となるような最小の自然数とする．このとき $Q := P^{\oplus k}$ が左 A-加群として自由であることを示せば十分である．$s = \mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(Q)$ $(= kr \in \mathbb{Z})$ とおく．条件 (2) より不等式

$$\ell_A(Q/\mathfrak{n}Q) = \mathrm{rank}_{\mathfrak{n}}(Q) \cdot \ell_A(A/\mathfrak{n}) \leq s \cdot \ell_A(A/\mathfrak{n}) \quad (\mathfrak{n} \in \mathrm{Max}(A))$$

が成り立つ．この不等式より, $Q/\mathfrak{n}Q$ は $(A/\mathfrak{n})$-加群として s 個以下の要素で生成されることがわかる．そこで, $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{m}$ であるような $\mathfrak{n} \in \mathrm{Max}(A)$ に対し, $(A/\mathfrak{n})$-加群 $Q/\mathfrak{n}Q$ の生成元 $e_i^{\mathfrak{n}}$ $(i = 1, \cdots, s)$ を何でも良いから選ぶ．$\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$ のとき, 上の不等式の等号が成立するから, 実は $(A/\mathfrak{m})^{\oplus s} \cong Q/\mathfrak{m}Q$ である．そこで $e_i^{\mathfrak{m}} \in Q/\mathfrak{m}Q$ $(i = 1, \cdots, s)$ を $(A/\mathfrak{m})$-加群 $Q/\mathfrak{m}Q$ の基底となるように選ぶ．

ここで $J = \mathrm{Jac}(A)$ とし, (3.6) の同型 $\phi_Q : Q/JQ \to \prod_{\mathfrak{n}\in\mathrm{Max}(A)} Q/\mathfrak{n}Q$ を考えよう．$e_i \in Q$ $(i = 1, \cdots, s)$ を $\phi_Q(e_i + JQ) = (e_i^{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}\in\mathrm{Max}(A)}$ となるように選ぶ．$e_i^{\mathfrak{n}}$ たちの選び方により, $e_i + JQ$ たちは Q/JQ を左 R-加群として生成することがわかる．中山の補題より, e_i たちは Q の生成元である．

実は, 生成元 $e_1, \cdots, e_s$ は Q の基底となっている．実際, $a_1, \cdots, a_s \in R$ が $a_1e_1 + \cdots + a_se_s = 0$ を満たすと仮定する． このとき $a_1e_1^{\mathfrak{m}} + \cdots + a_se_s^{\mathfrak{m}} = 0$ である． $e_i^{\mathfrak{m}}$ たちは $(R/\mathfrak{m})$-加群 $Q/\mathfrak{m}Q$ の基底であるから, $a_1, \cdots, a_s \in \mathfrak{m}$ である．以上の議論から, §3.2 で導入したイデアル $I := \mathcal{I}_{e_1,\cdots,e_s}$ について, $I \subset \mathfrak{m}$ であることがわかった．補題 3.33 より, このイデアル I は H-イデアルである．今 A は H-単純で $I \subset \mathfrak{m} \subsetneq A$ だから $I = 0$ である．これは e_i たちが A 上で一次独立であることを意味する．以上で証明が完了した． □

定理 3.28 の証明. (a) k を $\ell_A(A/\mathfrak{m})$ $(\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A))$ の最小公倍数とする. M を A-加群として有限生成であるような ${}_A\mathfrak{M}^H$ の対象とする. k の定義から, 任意の $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$ に対して $\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(M^{\oplus k})$ が整数となることがわかる. したがって, 補題 3.34 より, $M^{\oplus k}$ は自由 A-加群である. M 自身は, その直和因子として射影的である. 条件 (1) と (2) の同値性は補題 3.23 より従う.

(b) $M \in {}_A\mathfrak{M}^H$ とする. 補題 3.24 の U をとり, 集合 Ω を以下のように定める. $X \subset \mathrm{Hom}_A(U, M)$ と $x \in X$ に対し, x-成分への入射を $i_x : U \to U^{\oplus X}$ で表す. 左 A-加群の準同型写像 $\theta_X : U^{\oplus X} \to M$ を, 任意の $x \in X$ に対して $\theta_X \circ i_x = x$ となるように定義する. 以上の記号のもと,

$$\Omega := \left\{ (N, X) \;\middle|\; \begin{array}{c} N \text{ は } M \text{ の部分対象}, X \subset \mathrm{Hom}_A(U, M), \\ \theta_X : U^{\oplus X} \to M \text{ は単射で, その像は } N \text{ である} \end{array} \right\}.$$

$(N, X), (N', X') \in \Omega$ に対し, $N \subset N'$ かつ $X \subset X'$ であるとき $(N, X) \leq (N', X')$ であるとすれば, Ω は空でない帰納的順序集合である. Zorn の補題より, Ω は極大元を持つから, それを $(N, X) \in \Omega$ としよう. 実は $M = N$ である.

> <u>背理法</u>. $M \neq N$ であると仮定し, $m \in M \setminus N$ をとる. 余加群の基本定理より, m を含む M の有限次元部分 H-余加群が存在する. L を, その部分余加群で生成される M の部分 A-加群とすれば, L は $M \in {}_A\mathfrak{M}^H$ の部分対象となっており, しかも A-加群として有限生成である. $m \notin N$ かつ $m \in L$ だから $N' := N + L$ は N より真に大きい. ここで左 A-加群の完全列 $0 \to N \to N' \to V \to 0$ $(V := N'/N)$ を考えよう. $V \in {}_A\mathfrak{M}^H$ は A-加群として有限生成であり, 定理 3.28 の証明中で示されているように $V^{\oplus r}$ は自由加群だから, $V \cong U^{\oplus n}$ となる自然数 n が存在する. 特に, V は射影的だから, 先ほどの完全列は分裂する. $\iota : V \to N'$ を splitting map とし, 各 $i = 1, \cdots, n$ に対して写像 $\theta_i : U \to M$ を
>
> $$\theta_i : U \xrightarrow{i \text{ 番目への入射}} U^{\oplus n} \xrightarrow{\cong} V \xrightarrow{\iota} N' \hookrightarrow M \quad (i = 1, \cdots, n)$$
>
> で定義する. $X' = X \cup \{\theta_1, \cdots, \theta_n\}$ とすれば, $(N, X) \leq (N', X')$ かつ $(N', X') \in \Omega$ である. これは (N, X) の極大性に反する. $\lightning$

以上より, A-加群として $M = N \cong U^{\oplus X}$ である. さて, M は A-加群として有限生成ではないと仮定しよう. このとき X は無限集合となるから, 任意の自然数 r に対して $X \times \{1, \cdots, r\}$ と X の濃度は等しい. 定理 3.28 の証明中の議論より, $U^{\oplus r}$ が自由 A-加群となるような r が存在する. この r に対して,

$$M \cong U^{\oplus X} \cong (U^{\oplus r})^{\oplus X} \cong (\text{free } A\text{-module})^{\oplus X}$$

となる. 以上で M が自由加群であることが示された. $\square$

3.6. ***H*-単純性の基準.** 前節で証明した定理 3.28 は, 余イデアル部分代数が H-単純性であるということを仮定する. H-単純性の確認は難しいため, それを保証する以下の結果を与えておこう.

定理 3.35 (*cf.* Skryabin [Skr07, Proposition 3.7])**.** 以下の 3 つの条件が成り立つと仮定する.

(1) H は弱有限ホップ代数, A は半局所 PI 右 H-余加群代数である.
(2) A は左 A-加群として有限生成であるような極小 H-イデアルを持つ.
(3) A の極大イデアルで, 非自明な H-イデアルを含まないものが存在する.

このとき, A は H-単純である (したがって (2) の極小 H-イデアルは A と一致する).

証明. M を左 A-加群として有限生成であるような A の極小 H-イデアルとする. まず, A の任意の H-イデアル $I \neq 0$ に対し $IM \neq 0$ であることに注意しておこう. 実際, (3) より, 非自明な H-イデアルを含まない A の極大イデアル $\mathfrak{m} \subsetneq A$ が存在する. 極大性より $\mathfrak{m}+I = \mathfrak{m}+M = A$ となるから,

$$A = AA = (\mathfrak{m}+I)(\mathfrak{m}+M) \subset \mathfrak{m}+IM$$

である. これより $IM \neq 0$ であるとわかる.

以下, M を ${}_A\mathfrak{M}^H$ の対象とみなす. 記号の簡単のため, 非自明な H-イデアルを含むような A の極大イデアル全体の集合を Ω とする. $\mathfrak{m} \in \Omega$ のとき, 実は $\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ である. 実際, Ω の定義より, $\mathfrak{m}$ は非自明な H-イデアル I を含む. このとき IM は M に含まれる H-イデアルであるが, 上の議論より $IM \neq 0$ であるから, M の極小性より $IM = M$ となる. これより $M = IM \subset \mathfrak{m}M \subset M$ となり, 結局 $M/\mathfrak{m}M = 0$ を得る. したがって, $\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ である.

さて, $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)$ を $\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(M)$ の値が最大となるようにとる. もし $\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ ならば, 最大性より任意の $\mathfrak{n} \in \mathrm{Max}(A)$ に対して $\mathrm{rank}_{\mathfrak{n}}(M) = 0$ となり, $M = 0$ となってしまう. したがって $\mathrm{rank}_{\mathfrak{m}}(M) > 0$ であり, 上の議論より, $\mathfrak{m} \notin \Omega$ であるとわかる. 以上のことと補題 3.34 より, $M^{\oplus k}$ が自由 A-加群となるような自然数 k が存在するということがわかる.

仮に $\Omega \neq \emptyset$ であるならば, 上の議論と補題 3.22 より, すべての $\mathfrak{n} \in \mathrm{Max}(A)$ に対して $\mathrm{rank}_{\mathfrak{n}}(M) = 0$ となる. したがって $M = 0$ となるが, これは矛盾である. 以上のことから $\Omega = \emptyset$, すなわち, A のすべての極大イデアルは非自明な H-イデアルを含まないということがわかった. さて, $I \subsetneq A$ を A の任意の H-イデアルとする. 補題 3.21 より I を含む極大イデアルが存在するが, 上の議論より, それは非自明な H-イデアルを含まない. 結局 $I = 0$ である. □

上の定理の応用として,

定理 3.36. H を弱有限ホップ代数, A を H の有限次元右余イデアル部分代数とする. このとき A は H-単純である. したがって, 系 3.29 より, $\mathfrak{M}_A^H$ および ${}_A\mathfrak{M}^H$ の任意の対象は A-加群として自由である.

証明. 以下の議論は [Skr07, Theorem 6.1] の証明の一部である. A を H の有限次元右余イデアル部分代数とする. A の有限次元性より, A は, 左 A-加群として有限生成であるような極小 H-イデアルを持つ. さて, I を極大イデアル $A^+ := \mathrm{Ker}(\varepsilon : A \to \Bbbk)$ に含まれる H-イデアルとする. このとき IH は H の $\mathfrak{M}_H^H$ における部分対象となる. ホップ加群の基本定理 $\mathfrak{M}_H^H \approx \mathrm{Vec}$ より, IH は 0 か H のいずれかであるが, $IH \subset H^+$ より後者であることは有り得ない. したがって $IH = 0$ である. 以上より $I = 0$ を得る. まとめると, A^+ に含まれる非自明な H-イデアルは存在しないということがわかった. 定理 3.35 より, A は H-単純である. □

4 有限次元右余イデアル部分代数の拡大のフロベニウス性

4.1. フロベニウス拡大. 本章では, $\Bbbk$ を体とし, 代数といえば $\Bbbk$-代数のことを意味する. A/B を代数の拡大とする (つまり A を代数とし, B をその部分代数とする). A および B を右 B-加群とみたものを, それぞれ, A_B および B_B で表す. 右 A-加群準同型写像の空間 $\mathrm{Hom}_B(A_B, B_B)$ は

$$(b \cdot \xi \cdot a)(x) = b\xi(ax) \quad (\xi \in \mathrm{Hom}_B(A_B, B_B), a, x \in A, b \in B) \tag{4.1}$$

によって B-A-双加群となる.

定義 4.1. A が右 B-加群として有限生成射影的であり, $\mathrm{Hom}_B(A_B, B_B)$ が B-A-双加群として A と同型であるとき, A/B は**フロベニウス拡大** (Frobenius extension) であるという. 拡大 $A/\Bbbk$ がフロベニウス拡大であるとき, A は**フロベニウス代数** (Frobenius algebra) であるという.

Fischman, Montgomery, Schneider は, 有限次元ホップ代数の拡大がフロベニウス拡大となるための条件について調べた [FMS97]. 本章では, 弱有限ホップ代数の有限次元右余イデアル部分代数に対する類似の結果を紹介したい. そのために, まずは Fischman らの結果を簡単に振り返っておこう. H を有限次元ホップ代数とする. $h\Lambda = \varepsilon(h)\Lambda$ を満たす $\Lambda \in H$ を H の**左積分** (left integral) と呼ぶ. 有限次元ホップ代数はフロベニウス代数であることが知られているが, そのことを用いると, H の左積分は定数倍を除いて一意的に存在することがわかる (詳しくは 4.2 節で解説する). このことから, 線形写像 $\alpha_H : H \to \Bbbk$ を

$$\alpha_H(h)\Lambda = \Lambda h \quad (h \in H)$$

によって定義できる. 容易にわかるように, α_H は代数射である. これは局所コンパクト群の理論におけるモジュラー関数の代数的類似になっているので, α_H を H の**モジュラー関数**と呼ぶことにする.

定理 4.2 (Fischman et al [FMS97]). A/B を有限次元ホップ代数の拡大とする (つまり A は有

限次元ホップ代数で, B はその部分ホップ代数とする). このとき,

$$A/B \text{ はフロベニウス拡大} \iff \alpha_A|_B = \alpha_B.$$

さて, H を弱有限ホップ代数とする. Skryabin [Skr08] によれば, H の有限次元右余イデアル部分代数はフロベニウス代数となる (これについては 4.3 節で解説する). このことを使って, H の有限次元右余イデアル部分代数 A に対して左積分およびモジュラー関数 $\alpha_A : A \to \Bbbk$ を定義できる. A と B を $B \subset A$ であるような H の有限次元右余イデアル部分代数としよう. 4.6 節では, A/B がフロベニウス拡大となるための必要十分条件をモジュラー関数などの積分と関連する概念を使って与える (定理 4.19). $A = H$ であり, B が H の部分ホップ代数である場合が Fischman らの結果となる. 一般の場合, $\alpha_A|_B = \alpha_B$ は A/B がフロベニウス拡大であるための必要条件であるが, 十分条件ではない. 最後に我々の結果と土井 [Doi97a, Doi97b] の結果の関係を述べた後, いくつかの例を与える.

4.2. フロベニウス代数. まず, フロベニウス代数に関する基本的なことをまとめておく. そのために, いくつかの記号を導入しておこう. ベクトル空間 X に対し, その双対空間を X^* で表す. $f \in X^*$ と $x \in X$ に対し, $f(x)$ を $\langle f, x\rangle$ と書くことがある. A と B を代数とする. M が A-B-双加群であるとき, M^* は以下の式で定義される次の作用によって B-A-双加群となる.

$$\langle b \rightharpoonup f \leftharpoonup a, m\rangle = \langle f, amb\rangle \quad (f \in M^*, a \in A, b \in B, m \in M)$$

さて, A を有限次元代数とする. A 上の**フロベニウス形式**とは, A 上の双線形形式 $A \times A \to \Bbbk$, $(a, b) \mapsto \langle \lambda, ab\rangle$ が非退化となるような線形写像 $\lambda : A \to \Bbbk$ のことである. フロベニウス形式の与えられている有限次元代数を**フロベニウス代数**と呼ぶ. この定義は, 定義 4.1 と同値である. 実際, A 上のフロベニウス形式 $\lambda_A : A \to \Bbbk$ から右 A-加群の同型

$$\theta_A : A \to A^*, \quad \theta_A(a) = \lambda_A \leftharpoonup a \quad (a \in A) \tag{4.2}$$

が作られる. 逆に右 A-加群の同型 $\theta_A : A \to A^*$ が与えられれば, $\lambda_A = \theta_A(1)$ は A 上のフロベニウス形式となる.

記法 4.3. 以降, フロベニウス代数 A にはあらかじめフロベニウス形式が与えられているとし, そのフロベニウス形式を λ_A と書く. θ_A は, フロベニウス形式 λ_A を用いて (4.2) で定義される同型写像とする.

A の**中山自己同型**は, $\nu_A(a) = \theta_A^{-1}(a \rightharpoonup \lambda_A)$ $(a \in A)$ で定義される線形写像 $\nu_A : A \to A$ である. 中山自己同型は等式 $\langle \lambda_A, ba\rangle = \langle \lambda_A, \nu_A(a)b\rangle$ $(a, b \in A)$ によって特徴づけられる. この等式から, ν_A が実際には A の代数としての自己同型になっていることがわかる. さて, A の基底 $\{a_i\}_{i=1}^r$ をとり, $a^i = \theta_A^{-1}(f^i)$ とおく (ただし $\{f^i\}_{i=1}^r$ は基底 $\{a_i\}_{i=1}^r$ の双対基底である).

補題 4.4. 上の記号の元, 任意の $x \in A$ に対して

$$\langle \lambda_A, a^i \rangle a_i = 1 = \langle \lambda_A, a_i \rangle a^i, \quad a^i \otimes x a_i = a^i x \otimes a_i, \quad a^i \otimes a_i x = \nu_A(x) a^i \otimes a_i \tag{4.3}$$

が成り立つ. ただし, Einstein 規約により, $\sum_{i=1}^r$ を省略している (以降もこの規約を採用する).

証明. 標準的な同型 $A^* \otimes A \cong \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A, A)$ と θ_A を組み合わせることで, 同型

$$\widetilde{\theta}_A : A \otimes A \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A, A), \quad a \otimes b \mapsto \langle \theta_A(a), - \rangle b \quad (a, b \in A)$$

が得られる. 中山自己同型と a^i たちの定義より, 任意の $y \in A$ に対して

$$\widetilde{\theta}_A(a^i \otimes x a_i)(y) = xy = \widetilde{\theta}_A(a^i x \otimes a_i)(y), \quad \widetilde{\theta}_A(a^i \otimes a_i x)(y) = yx = \widetilde{\theta}_A(\nu_A(x) a^i \otimes a_i)$$

が成り立つ. これで (4.3) の後ろの 2 つの等式が示された. ここで $x = y = 1$ とすれば $\langle \lambda_A, a^i \rangle a_i = 1$ が得られる. さらに, 任意の $x \in A$ に対して $\langle \theta_A(\langle \lambda_A, a_i \rangle a^i), x \rangle = \langle \lambda_A, a_i \rangle \langle \lambda_A, a^i x \rangle = \langle \lambda_A, x \rangle = \langle \theta_A(1), x \rangle$ となるから, $\langle \lambda_A, a_i \rangle a^i = 1$ である. □

なお, 中山自己同型はフロベニウス形式の取り方に依存している. λ' を A のもうひとつのフロベニウス形式としよう. 写像 $\theta' : A \to A^*$ を $\theta'(a) = \lambda' \leftharpoonup a$ $(a \in A)$ で定義すれば, $\xi := \theta_A^{-1} \circ \theta'$ は右 A-加群の射であるから, $x = \xi(1)$ とおけば $\xi(a) = xa$ $(a \in A)$ である. これより $\lambda' = \theta'(1) = \theta_A(\xi(1)) = \lambda_A \leftharpoonup x$ となる. この関係式を使えば, λ' に関する中山自己同型 ν' が

$$\nu'(a) = x^{-1} \nu_A(a) x \quad (a \in A) \tag{4.4}$$

で与えられるとわかる.

さて, 代数射 $\varepsilon_A : A \to \Bbbk$ が与えられているとしよう (これは A が余イデアル部分代数で ε_A がホップ代数の余単位の制限であるような場合を想定している). 左 A-加群 V に対し,

$$I(V) = \{ v \in V \mid av = \varepsilon_A(a) v \text{ for all } a \in A \}$$

とおく. ホップ代数に関する用語法にならい, $I(A)$ の要素を A の**左積分**と呼ぶことにする. A の左積分は定数倍を除いて一意的である. これを示すため, 次の補題に注意しておく.

補題 4.5. 右 A-加群 X に対し, ベクトル空間の自然な同型 $\mathrm{Hom}_A(X, A) \cong X^*$ がある.

証明. 線形写像 $\psi_X : \mathrm{Hom}_A(X, A) \to X^*$ を $\psi_X(f) = \lambda_A \circ f$ で定義する. $\{a_i\}$ を A の基底とし, $\{a^i\}$ を上で導入したものとすると, ψ_X の逆写像は $\psi_X^{-1}(\xi)(x) = \langle \xi, x a_i \rangle a^i$ $(\xi \in X^*, x \in X)$ で与えられる. □

$\Bbbk$ を ε_A によって右 A-加群としてみるとき, $I(A)$ は $\mathrm{Hom}_A(\Bbbk, A)$ と同一視できる. 上の補題より,

補題 4.6. $\dim_{\Bbbk} I(A) = 1$.

基底 $\{a_i\}$ と $\{a^i\}$ を使えば, 以下のように左積分を明示的に表示することができる (基底 $\{a^i\}$ が簡単に計算できるとは限らないから, 明示的というのは少々語弊があるかもしれないけれども).

補題 4.7. $\Lambda := \langle \varepsilon_A, a^i \rangle a_i$ は, $\langle \lambda_A, \Lambda \rangle = 1$ を満たす A の左積分である.

証明. 等式 $\langle \lambda_A, \Lambda \rangle = 1$ は (4.3) より得られる. 再び (4.3) より, 任意の $x \in A$ に対して,

$$x\Lambda = \langle \varepsilon_A, a^i \rangle x a_i = \langle \varepsilon_A, x a^i \rangle a_i = \langle \varepsilon_A, x \rangle \langle \varepsilon_A, a^i \rangle a_i = \varepsilon_A(x)\Lambda. \qquad \square$$

補題 4.6 を踏まえて, ホップ代数の場合と同様に, 以下の関数を導入する.

定義 4.8. $\Lambda \neq 0$ を A の左積分とする. $\Lambda a = \alpha_A(a)\Lambda$ $(a \in A)$ によって定義される線形写像 $\alpha_A : A \to \Bbbk$ を A の**モジュラー関数**と呼ぶ.

実は, モジュラー関数は, 中山自己同型を用いて以下のように表示できる.

補題 4.9. $\alpha_A = \varepsilon_A \circ \nu_A$.

証明. Λ を補題 4.7 で与えられた左積分とする. (4.3) より, 任意の $x \in A$ に対して

$$\Lambda x = \langle \varepsilon_A, a^i \rangle a_i x = \langle \varepsilon_A, \nu_A(x) a^i \rangle a_i = \varepsilon_A(\nu_A(x))\Lambda$$

となるから, モジュラー関数の定義より $\alpha_A = \varepsilon_A \circ \nu_A$ である. $\square$

$\Lambda a = \varepsilon_A(a)\Lambda$ を満たす $\Lambda \in A$ を A の**右積分**と呼ぶことにする. ここまでの議論を A^{op} に対して適用することで, (i) ゼロでない右積分が存在し, 定数倍を除いて一意的であること, (ii) $\langle \lambda_A, \Lambda \rangle = 1$ を満たす右積分 Λ が一意的に存在すること, (iii) 右積分 Λ に対し $a\Lambda = \overline{\alpha}_A(a)\Lambda$ $(a \in A)$ が成り立つことが分かる. ただし, $\overline{\alpha}_A = \varepsilon_A \circ \nu_A^{-1}$ である.

4.3. 有限次元右余イデアル部分代数のフロベニウス性. 前節でフロベニウス代数についての基本的な結果を述べた. これらの結果が我々の考察対象に対して適用できることを確認しよう. すなわち, [Skr07, Theorem 6.1] の一部である, 次の定理を証明する.

定理 4.10. 弱有限ホップ代数の有限次元右余イデアル部分代数はフロベニウス代数である.

証明. まず, 一般に, H をホップ代数とする. M を有限次元右 H-余加群とする. M の基底 $\{m_i\}$ をとり, $\{f^i\}$ を M^* の双対基底とすれば, M^* は

$$\delta_{M^*}(f) = \langle f, m_{i(0)} \rangle f^i \otimes S(m_{i(1)}) \quad (f \in M^*) \tag{4.5}$$

によって与えられる右 H-余作用によって右 H-余加群となる．この余作用は,

$$\langle f_{(0)}, m\rangle f_{(1)} = \langle f, m_{(0)}\rangle S(m_{(1)}) \quad (f \in M^*, m \in M) \tag{4.6}$$

によって特徴づけることもできる．ここで A を右 H-余加群代数とし, M は ${}_A\mathfrak{M}^H$ の対象であったとする．このとき M^* は作用 $\leftharpoonup$ によって $\mathfrak{M}^H_A$ の対象となる．実際, $f \in M^*$, $m \in M$, $a \in A$ に対して

$$\begin{aligned}\langle (f \leftharpoonup a)_{(0)}, m\rangle (f \leftharpoonup a)_{(1)} &= \langle f \leftharpoonup a, m_{(0)}\rangle S(m_{(1)}) = \langle f, a_{(0)} m_{(0)}\rangle S(m_{(1)}) S(a_{(1)}) a_{(2)} \\ &= \langle f, (a_{(0)}m)_{(0)}\rangle S((a_{(0)}m)_{(1)}) a_{(1)} = \langle f_{(0)}, a_{(0)} m\rangle f_{(1)} a_{(1)} = \langle f_{(0)} \leftharpoonup a_{(0)}, m\rangle f_{(1)} a_{(1)}\end{aligned}$$

となるから, $(f \leftharpoonup a)_{(0)} \otimes (f \leftharpoonup a)_{(1)} = (f_{(0)} \leftharpoonup a_{(0)}) \otimes f_{(1)} a_{(1)}$ である．

さて, ここで H は弱有限ホップ代数, A は H の右余イデアル部分代数であると仮定する．定理 3.36 より, 任意の $\mathfrak{M}^H_A$ の対象は A-加群として自由である．上の議論により $A^* \in \mathfrak{M}^H_A$ となるから, 次元の比較により, 右 A-加群として $A \cong A^*$ であるとわかる．したがって, A はフロベニウス代数である． □

4.4. コモジュラス. A を H の有限次元右余イデアル部分代数とする．前節で確認したように, A はフロベニウス代数である．したがって, 補題 4.7 より, $\langle \lambda_A, \Lambda\rangle = 1$ を満たす A の左積分 Λ が存在する．

定義 4.11. $\mathbf{g}_A := \langle \lambda_A, \Lambda_{(1)}\rangle S(\Lambda_{(2)}) \in H$ を**コモジュラス** (comodulus) と呼ぶ.

なお, A の基底 $\{a_i\}$ をとり, $\{a^i\}$ を 4.2 節で定義したものとすれば, 補題 4.7 より,

$$\mathbf{g}_A = \varepsilon(a_i) S(a^i \leftharpoonup \lambda_A). \tag{4.7}$$

コモジュラスは, λ_A の取り方に依存する．もし λ' も A のフロベニウス形式であるとすれば, 4.2 節の議論より, $\lambda' = \lambda_A \leftharpoonup x$ を満たす可逆元 $x \in A$ が存在する．そこで $\Lambda' = \varepsilon(x)^{-1}\Lambda$ とおけば, これは $\langle \lambda', \Lambda'\rangle = 1$ を満たす A の左積分である．したがって, フロベニウス形式を λ' としたときのコモジュラスは

$$\begin{aligned}\langle \lambda', \Lambda'_{(1)}\rangle S(\Lambda'_{(2)}) &= \varepsilon(x)^{-1}\langle \lambda, x\Lambda_{(1)}\rangle S(\Lambda_{(2)}) = \varepsilon(x)^{-1}\langle \lambda, x_{(1)}\Lambda_{(1)}\rangle S(x_{(2)}\Lambda_{(2)}) x_{(3)} \\ &= \varepsilon(x)^{-1}\langle \lambda, \Lambda_{(1)}\rangle S(\Lambda_{(2)}) \cdot x = \varepsilon(x)^{-1}\mathbf{g}_A \cdot x\end{aligned} \tag{4.8}$$

で与えられる．後で説明するが, コモジュラスは実は可逆元である．したがって, 上の計算より, コモジュラスはフロベニウス形式の取り方に依存しない $H^\times/A^\times$ の要素を定めると言える．

我々が $\mathbf{g}_A$ を "コモジュラス" と名づけた理由について記しておく．しばらくの間, A は有限次元ホップ代数であると仮定する．このとき A^* も有限次元ホップ代数となる．有限次元ホップ代数の理論において良く知られているように, ゼロでない A^* の左積分は A のフロベニウ

ス形式となる．そこで, λ_A として, ゼロでない A^* の左積分をとろう．A^* のモジュラー関数を標準的な同型 $A^{**} \cong A$ を通して A の要素とみなしたものを $g_A \in A$ と書くことにすると, $\langle \lambda_A, a_{(1)} \rangle a_{(2)} = \langle \lambda_A, a \rangle g_A$ $(a \in A)$ である．したがって,

$$\mathbf{g}_A = \langle \lambda_A, \Lambda_{(1)} \rangle S(\Lambda_{(2)}) = \langle \lambda_A, \Lambda \rangle S(g_A) = g_A^{-1} \tag{4.9}$$

となる．この意味で, コモジュラスは双対ホップ代数 A^* のモジュラー関数を A が余イデアル部分代数でしかない場合に対して一般化するものであると言える．

さて, 一般の場合に戻ろう．$\{a_i\}$ を A の基底とし, $\{a^i\}$ を 4.2 節で導入したものとする．

補題 4.12. コモジュラス $\mathbf{g}_A$ は可逆で, その逆元は $\mathbf{g}_A^{-1} = a^i S^2(a_i \leftharpoonup \lambda_A)$ で与えられる．

まず, 相対ホップ加群についての簡単な考察から始めよう．4.3 節で見たように, 有限次元であるような ${}_A\mathfrak{M}^H$ の対象の双対空間は, 式 (4.6) によって定義される H-余作用によって $\mathfrak{M}_A^H$ の対象となる．M が ${}_A\mathfrak{M}_A^H$ の対象であるとき, $M^* \in \mathfrak{M}_A^H$ は ${}_A\mathfrak{M}_A^H$ の対象となるとは限らないのだが, 実は等式

$$(a \rightharpoonup f)_{(0)} \otimes (a \rightharpoonup f)_{(1)} = (a_{(1)} \rightharpoonup f_{(0)}) \otimes S^2(a_{(2)}) f_{(1)} \quad (a \in A, f \in M^*) \tag{4.10}$$

を満たす．実際, 任意の $a \in A$, $f \in M^*$, $m \in M$ に対して

$$\begin{aligned}\langle a_{(1)} \rightharpoonup f_{(0)}, m \rangle S^2(a_{(2)}) f_{(1)} &= \langle f_{(0)}, m a_{(1)} \rangle S^2(a_{(2)}) f_{(1)} = \langle f, (m a_{(1)})_{(0)} \rangle S^2(a_{(2)}) S((m a_{(1)})_{(1)}) \\ &= \langle f, m_{(0)} a_{(1)} \rangle S(m_{(1)} a_{(2)} S(b_{(2)})) = \langle f, m_{(0)} b \rangle S(m_{(1)}) = \langle a \rightharpoonup f, m_{(0)} \rangle S(m_{(1)})\end{aligned}$$

である．ここで $B = A$ とし, これを右 H-余作用 $\delta_B = (\mathrm{id}_A \otimes S^2) \circ \Delta : B \to B \otimes H$ によって右 H-余加群代数とみる．等式 (4.10) は, M^* が圏 ${}_B\mathfrak{M}_A^H$ の対象であると言っている．

以上の考察を $A \in {}_A\mathfrak{M}_A^H$ に対して適用することで, 対象 $A^* \in {}_B\mathfrak{M}_A^H$ を得る．さて, ベクトル空間 $N := A$ を (4.2) で与えられる同型 $\theta_A : A \to A^*$ を通して ${}_B\mathfrak{M}_A^H$ の対象とする．すなわち, N への左 B-作用 $\triangleright$, 右 A-作用 $\triangleleft$, 右 H-余作用 δ_N を

$$b \triangleright n \triangleleft a = \theta_A^{-1}(b \rightharpoonup \theta_A(n) \leftharpoonup a), \quad \delta_N = (\theta_A^{-1} \otimes \mathrm{id}_H) \circ \delta_{A^*} \circ \theta_A \quad (a \in A, b \in B, n \in N) \tag{4.11}$$

で定義するのである．これらの (余) 作用を明示的に書き下す．

補題 4.13. $a, b \in A$ および $n \in N$ に対し,

$$b \triangleright n \triangleleft a = \nu_A(b) n a, \quad \delta_N(n) = a^i n_{(1)} \otimes S(a_i \leftharpoonup \lambda_A) n_{(2)}. \tag{4.12}$$

証明．中山自己同型の定義より, $a, b \in A$ および $n \in N$ に対して

$$\theta_A(b \triangleright n \triangleleft a) = b \rightharpoonup \theta_A(n) \leftharpoonup a = \lambda_A \leftharpoonup \nu_A(b) n a = \theta_A(\nu_A(b) n a)$$

となる．両辺に θ_A^{-1} を施し, (4.12) のはじめの式を得る．2 番目の式は, 以下のようにして得られる．$\{f_i\}$ を $\{a_i\}$ の双対基底とするとき, 任意の $n \in N$ に対して,

$$\begin{aligned}\delta_N(n) &\overset{(4.5)}{=} \langle \theta_A(n), a_{i(1)} \rangle \theta_A^{-1}(f^i) \otimes S(a_{i(2)}) = \langle \lambda_A, n_{(1)} a_{i(1)} \rangle a^i \otimes S(n_{(2)} a_{i(2)}) n_{(3)} \\ &= a^i \otimes S((n_{(1)} a_i) \leftharpoonup \lambda_A) n_{(2)} \overset{(4.3)}{=} a^i n_{(1)} \otimes S(a_i \leftharpoonup \lambda_A) n_{(2)}.\end{aligned}$$ □

補題 4.12 の証明. 表記の簡単のために $b_i = S(a_i \leftharpoonup \lambda_A)$ とおく．余結合律と (4.12) より,

$$a^i a^j_{(1)} \otimes b_i a^j_{(2)} \otimes b_j = (\delta_N \otimes \mathrm{id}_H)\delta_N(1) = (\mathrm{id}_N \otimes \Delta)\delta_N(1) = a^i \otimes \Delta(b_j)$$

を得る．この両辺に $\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H \otimes \mathrm{id}_H$ を適用すると, $\mathbf{g} := \mathbf{g}_A$ の定義より

$$\mathbf{g} a^j \otimes b_j = \Delta(\mathbf{g}) \tag{4.13}$$

を得る．この式の両辺に $x \otimes y \mapsto xS(y)$ で定義される写像 $H \otimes H \to H$ を適用すれば

$$\mathbf{g} \cdot a^j S(b_j) = \varepsilon(\mathbf{g}) 1_H = 1_H$$

を得る．これは, $a^j S(b_j) = a^j S^2(a_j \leftharpoonup \lambda_A)$ が $\mathbf{g}$ の右逆元であることを意味する．今, H は弱有限であると仮定しているから, これは実際には $\mathbf{g}$ の両側逆元である． □

補題の証明で導入した対象 $N \in {}_B\mathfrak{M}_A^H$ は, 次の節でも用いる．式 (4.12) と (4.13) から得られる, 余作用 δ_N の以下の表示に注意しておこう．

補題 4.14. $\delta_N(n) = (\mathbf{g}^{-1} \otimes 1)\Delta(\mathbf{g}n)$ $(n \in N)$.

$\Delta(g) = g \otimes g$ および $\varepsilon(g) = 1$ を満たす $g \in H$ を群的元 (grouplike element) と呼ぶのであった．もしコモジュラス $\mathbf{g}$ が群的元ならば, δ_N は $\delta_N(n) = n_{(0)} \otimes \mathbf{g} n_{(1)}$ $(n \in N)$ のように簡単な式で表される．そこで, コモジュラスが群的元となるための十分条件を与えておこう．

補題 4.15. g を H の群的元とする．フロベニウス形式 λ_A が $\langle \lambda_A, a_{(0)} \rangle a_{(1)} = \langle \lambda_A, a \rangle g$ $(a \in A)$ を満たすとき, A のコモジュラスは g^{-1} である．

証明は, (4.9) と同様に計算すれば良い．この補題の主張にある等式を満たす λ_A は A 上の g-cointegral と呼ばれ, 存在性や一意性 (up to scalar) などは, Kasprzak [Kas18] によって調べられている．

4.5. 有限次元右余イデアル部分代数の中山自己同型. H を弱有限ホップ代数, A を H の有限次元右余イデアル部分代数とし, B を補題 4.12 の証明の中で導入したものとする．前節での議論はおおよそ以下のように要約される．まず A^* は自然な構造によって圏 ${}_B\mathfrak{M}_A^H$ の対象となる．フロベニウス形式 λ_A から誘導される同型 $\theta_A : A \to A^*$ を通して, ベクトル空間 $N := A$ を

${}_B\mathfrak{M}^H_A$ の対象にすることができる (その構造射は補題 4.13 で与えた). ここで N への H-余作用が余結合的であるということを実際に数式として書き, それを変形するとコモジュラス $\mathbf{g} := \mathbf{g}_A$ を含んだ式が得られる. その結果, $\mathbf{g}$ の可逆性がわかるのであった.

振り返ってみれば, 補題 4.12 の証明には, N が ${}_B\mathfrak{M}^H_A$ の対象となるという事実の一部分しか用いられていない. N が B-A-双加群であるということや, $N \in \mathfrak{M}^H_A$ であることからは, 自明な結果しか得られないようである. しかし, $N \in {}_B\mathfrak{M}^H$ であるという事実を使うと, 次のような結果が見いだされる.

定理 4.16. A の中山自己同型 ν_A は, コモジュラス $\mathbf{g}$ とモジュラー関数 $\alpha_A \in A^*$ を用いて,

$$\nu_A(a) = \mathbf{g}^{-1} S^2(a \leftharpoondown \alpha_A)\mathbf{g} \quad (a \in A)$$

で与えられる.

証明. 余積と区別するため, $n \in N$ に対し, $\delta_N(n) = n_{[0]} \otimes n_{[1]}$ と表すことにする. $N \in {}_B\mathfrak{M}^H_A$ だから,

$$(b \triangleright n)_{[0]} \otimes (b \triangleright n)_{[1]} = (b_{(1)} \triangleright n_{[0]}) \otimes S^2(b_{(2)}) n_{[1]} \quad (b, n \in A = B = N)$$

が成り立つ. $a \in A$ を任意にとり, $b = a$, $n = 1_A$ の場合を考えると, 補題 4.14 より,

$$\mathbf{g}^{-1}\mathbf{g}_{(1)}\nu_A(a)_{(1)} \otimes \mathbf{g}_{(2)}\nu_A(a)_{(2)} = \nu_A(a_{(1)})\mathbf{g}^{-1}\mathbf{g}_{(1)} \otimes S^2(a_{(2)})\mathbf{g}_{(2)} \tag{4.14}$$

という等式を得る. あとは, 両辺に $\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H$ を適用し, 補題 4.9 を使えばよい. □

定理 4.16 について, いくつかの注意を与えておく.

(1) 中山自己同型とコモジュラスは, ともにフロベニウス形式 λ_A の取り方に依存する. フロベニウス形式を取り替えたとき, 中山自己同型は式 (4.4) によって変化するが, 一方でコモジュラスも式 (4.8) によって変化するため, 中山自己同型が上の式で与えられるということは変わらない.

(2) H を有限次元ホップ代数とし, $\lambda_H : H \to \Bbbk$ を H 上の右余積分 (つまり H^* の右積分) とする. H のフロベニウス形式として λ_H をとるとき, 補題 4.15 よりコモジュラスは 1_H である. 定理 4.16 は, 既知の中山自己同型の公式 $\nu_H(h) = S^2(h \leftharpoondown \alpha_H)$ $(h \in H)$ [FMS97, Lemma 1.5] を導く.

4.6. 有限次元右余イデアル部分代数の拡大のフロベニウス性. H を弱有限ホップ代数とする. 本章のはじめに予告したように, H の有限次元右余イデアル部分代数 A と B が $B \subset A$ を満たすとき, 拡大 A/B がいつフロベニウスになるのかという問題を考えたい. 定理 4.10 より, A と

B はフロベニウス拡大である．そこで, まずフロベニウス代数の拡大がいつフロベニウス拡大となるのかという問題を考えることにしよう．

一般に, A/B を代数の拡大とし, A と B はフロベニウス代数であると仮定する．B から A への代数射全体の集合を $\mathrm{Alg}(B,A)$ とする．この集合の上の同値関係 $\sim$ を

$$f \sim g \iff g = \xi \circ f \text{ を満たす } A \text{ の内部自己同型 } \xi \text{ が存在する}$$

で定義する．簡単にわかるように, この同値関係は次のような加群論的な解釈を持つ．

補題 4.17. $f \in \mathrm{Alg}(B,A)$ に対し, A を $b \cdot x \cdot a = f(b)xa$ $(a, x \in A,\ b \in B)$ によって B-A-双加群としてみたものを ${}_{(f)}B$ と書くことにする．$f, g \in \mathrm{Alg}(B,A)$ に対し,

$$f \sim g \iff {}_{(f)}A \cong {}_{(g)}A \text{ as } B\text{-}A\text{-bimodules.}$$

さて, $i_{A/B} : B \to A$ を包含写像とする．

補題 4.18. 記号は上の通りとする．このとき,

$$\mathrm{Hom}_B(A_B, B_B) \cong {}_B A_A \text{ as } B\text{-}A\text{-bimodules} \iff i_{A/B} \circ \nu_B \sim \nu_A \circ i_{A/B}. \tag{4.15}$$

証明. $\{a_i\}$ を A の基底とし, $a^i \in A$ を 4.2 節と同様にして定義する．補題 4.5 の同型 $\psi_A : \mathrm{Hom}_B(A_B, B_B) \to A^*$ と θ_A^{-1} を合成することにより, ベクトル空間の同型

$$\phi_A = \theta_A^{-1}\psi_A : \mathrm{Hom}_B(A_B, B_B) \to A, \quad \phi_A(f) = \langle \lambda, f(a_i) \rangle a^i \quad (f \in \mathrm{Hom}_B(A_B, B_B))$$

を得る．ここで $\mu = \nu_A \circ i_{A/B} \circ \nu_B^{-1}$ とおく．$a \in A$, $b \in B$, $f \in \mathrm{Hom}_B(A_B, B_B)$ に対して

$$\begin{aligned} \phi_A(b \cdot f \cdot a) &= \langle \lambda_B, bf(aa_i) \rangle a^i = \langle \lambda_B, f(a_i)\nu_B(b) \rangle a^i a \\ &= \langle \lambda_B, f(a_i \nu_B^{-1}(b)) \rangle a^i a = \langle \lambda_B, f(a_i) \rangle \mu(b) a^i a = \mu(b)\phi_A(f)a \end{aligned}$$

となるから, B-A-双加群として $\mathrm{Hom}_B(A_B, B_B) \cong {}_{(\mu)}A_A$ である． 補題 4.17 より, $\mathrm{Hom}_B(A_B, B_B) \cong {}_B A_A$ となるための必要十分条件は $\mu \sim i_{A/B}$ である．後は明らかであろう． □

定理 4.19. H を弱有限ホップ代数とし, A と B を $B \subset A$ を満たす H の有限次元右余イデアル部分代数とする．A/B がフロベニウス拡大であるための必要十分条件は

$$\text{(i) } \alpha_A|_B = \alpha_B \quad \text{および} \quad \text{(ii) } \mathbf{g}_B^{-1}\mathbf{g}_A \in C_H(B)^\times \cdot A^\times$$

が成り立つことである．ただし, $C_H(B) = \{h \in H \mid hb = bh \text{ for all } b \in B\}$ である．

証明. $A_B \in \mathfrak{M}_B^H$ であるから, 系 3.29 より, A は有限生成自由 B-加群であることがわかる．したがって, 補題 4.18 より, A/B がフロベニウス拡大であることと, $\nu_A \circ i_{A/B} \sim \nu_B \circ i_{A/B}$ であ

ることは同値である. さて, A/B がフロベニウス拡大であると仮定する. このとき, 上の議論より, ある $a \in A^\times$ が存在し, 任意の $b \in B$ に対して $\nu_B(b) = a\nu_A(b)a^{-1}$ を満たす. 両辺に ε を適用すれば, 補題 4.9 より $\alpha_A|_B = \alpha_B$ であるとわかる. したがって, 定理 4.16 より, 任意の $b \in B$ に対して

$$a\nu_B(b)a^{-1} = \nu_A(b) = \mathbf{g}_A^{-1}S^2(b \leftharpoonup \alpha_A)\mathbf{g}_A = \mathbf{g}_A^{-1}S^2(b \leftharpoonup \alpha_B)\mathbf{g}_A = \mathbf{g}_A^{-1}\mathbf{g}_B\nu_B(b)\mathbf{g}_B^{-1}\mathbf{g}_A$$

となる. ν_B は B の自己同型だから, $\mathbf{g}_B^{-1}\mathbf{g}_A a \in C_H(B)^\times$ である. したがって $\mathbf{g}_B^{-1}\mathbf{g}_A \in C_H(B)^\times \cdot A^\times$ である. 以上より, (i) および (ii) が成立することが示された.

次に, (i) および (ii) が成り立つと仮定する. 仮定 (ii) より $\mathbf{g}_B^{-1}\mathbf{g}_A = ca$ を満たす $c \in C_H(B)^\times$ および $a \in A^\times$ が存在する. 定理 4.16 より, 任意の $b \in B$ に対して

$$a\nu_A(b)a^{-1} = a\mathbf{g}_A^{-1}S^2(b \leftharpoonup \alpha_A)\mathbf{g}_A a^{-1} = c^{-1}\mathbf{g}_B^{-1}S^2(b \leftharpoonup \alpha_B)\mathbf{g}_A c^{-1} = c^{-1}\nu_B(b)c = \nu_B(b)$$

である. したがって, 証明の冒頭の議論より, A/B はフロベニウス拡大である. □

有限次元ホップ代数の拡大の場合 [FMS97] と違い, 条件 (i) だけではフロベニウス性は判定できない. 実際, 条件 (i) を満たすが, (ii) を満たさないような余イデアル部分代数の拡大がある (例 4.22). しかし, $H = A$ である場合, 定理における条件 (ii) は常に成り立つ. したがって,

系 4.20. 有限次元ホップ代数 H の右余イデアル部分代数 B に対し,

$$H/B \text{ はフロベニウス拡大} \iff \alpha_H|_B = \alpha_B.$$

土井 [Doi97a, Doi97b] は, β-Frobenius extension という, フロベニウス拡大よりも一般的な設定を考えている. この系の '⇐' の部分は, [Doi97b, Theorem 1] の特別な場合であることを説明したい. H を有限次元ホップ代数, B を右余イデアル部分代数とし, $F := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{M}_B^H}(H, B)$ とおく. 以下に土井 [Doi97a, Doi97b] の結果で, 我々の結果と関連するところを要約して与える. まず, F は 1 次元であり,

$$(b \triangleright f)(h) = b_{(1)}f(S(b_{(2)})h) \quad (b \in B, f \in F, h \in H)$$

で与えられる作用によって左 B-加群となる. そこで 0 でない元 $f \in F$ をとり, $b \triangleright f = \tau(b)f$ $(b \in B)$ によって代数射 $\tau : B \to \Bbbk$ を定義する. もし τ が余単位の B への制限と一致するなら, H/B はフロベニウス拡大である.

土井 [Doi97a] は, B が H の部分ホップ代数である場合に F の 0 でない要素を構成し, それを用いて τ を具体的に決定した. 同様の構成は B が右余イデアル部分代数でしかない場合も可能である. t と u を, それぞれ, H と B のゼロでない右積分とする. H 上の右余積分 λ_H を $\langle \lambda_H, t \rangle = 1$ となるようにとり,

$$\psi : H \to B, \quad \psi(h) = \langle \lambda_H, h_{(1)}S^{-1}(u) \rangle h_{(2)} \quad (h \in H)$$

で線形写像 ψ を定義する．$\Delta(u) \in B \otimes H$ であるから, 任意の $h \in H$ に対して

$$\psi(h) = \langle \lambda_H, h_{(1)} S^{-1}(u_{(3)}) \rangle h_{(2)} S^{-1}(u_{(2)}) u_{(1)} = \langle \lambda_H, h S^{-1}(u_{(2)}) \rangle u_{(1)} \in B$$

となり, ψ は well-defined である．土井 [Doi97a] の 9 ページあたりと同様の計算により, $\psi \in F \setminus \{0\}$ であることがわかる．ここで $\overline{\alpha}_B = \varepsilon \circ \nu_B^{-1}$ とすると, 任意の $b \in B$ と $h \in H$ に対して

$$\begin{aligned}
(b \triangleright \psi)(h) &= \langle \lambda_H, S(b_{(2)}) h S^{-1}(u_{(2)}) \rangle b_{(1)} u_{(1)} \\
&= \langle \lambda_H, h S^{-1}(u_{(2)}) \nu_H^{-1}(S(b_{(2)})) \rangle b_{(1)} u_{(1)} && \text{(中山自己同型の定義)} \\
&= \langle \lambda_H, h S^{-1}(b_{(2)} u_{(2)}) \rangle \langle \alpha_H, b_{(3)} \rangle b_{(1)} u_{(1)} && \text{(中山自己同型の公式)} \\
&= \langle \lambda_H, h S^{-1}(u_{(2)}) \rangle \langle \overline{\alpha}_B, b_{(1)} \rangle \langle \alpha_H, b_{(2)} \rangle u_{(1)} && \text{(補題 4.9 の後の注意)} \\
&= \langle \overline{\alpha}_B, b_{(1)} \rangle \langle \alpha_H, b_{(2)} \rangle \psi(h)
\end{aligned}$$

となることがわかる (ここの計算も [Doi97a] と同じだが, [Doi97a] と違って B が余イデアル部分代数になっているため, 多少の注意を要する)．よって, $\tau(b) = \langle \overline{\alpha}_B, b_{(1)} \rangle \langle \alpha_H, b_{(2)} \rangle$ である．

さて, $\mathbf{g}$ を B のコモジュラスとする．定理 4.16 の証明の中の式 (4.14) より, $b \in B$ に対して

$$\begin{aligned}
\langle \tau, \nu_B(b) \rangle &= \langle \overline{\alpha}_B \otimes \alpha_H, \Delta(\mathbf{g}^{-1}) \cdot (\mathbf{g} \nu_B(b) \mathbf{g}^{-1} \otimes S^2(b_{(2)})) \cdot \Delta(\mathbf{g}) \rangle \\
&= \langle \overline{\alpha}_B, \nu_B(b_{(1)}) \rangle \langle \alpha_H, S^2(b_{(2)}) \rangle = \langle \alpha_H, b \rangle
\end{aligned}$$

である．つまり $\tau \circ \nu_B = \alpha_H|_B$ である．さて, $\alpha_H|_B = \alpha_B$ が成り立つと仮定しよう．このとき, $\tau = \varepsilon$ となるから, 土井 [Doi97a, Doi97b] の結果より, H/B はフロベニウス拡大である．これが系 4.20 の '$\Leftarrow$' の部分である．

4.7. 例. 基礎体 $\Bbbk$ は標数 0 の代数閉体とし, $N > 1$ を整数, ω を 1 の原始 N 乗根とする．

例 4.21 (Taft algebra)**.** H を 1 の冪根 ω における Taft algebra とする．すなわち, H は生成元 x, g と関係式 $x^N = 0$, $g^N = 1$, $gx = \omega xg$ で定義される N^2 次元の代数であり, $\Delta(x) = x \otimes g + 1 \otimes x$, $\Delta(g) = g \otimes g$ で決定されるホップ代数構造を持つ．

- N の約数 d に対し, A_d を x と g^d で生成される H の部分代数とする (なお, $H = A_1$ である)．A_d は H の右余イデアル部分代数である．$\Lambda = \sum_{i=0}^{m-1} g^{di} x^{N-1}$ $(m = N/d)$ は A_d の左積分であり, モジュラー関数 α_d は $\alpha_d(g^d) = \omega^{-d}$, $\alpha_d(x) = 0$ で与えられる．これは H $(= A_1)$ のモジュラー関数の制限と一致している．系 4.20 より, H/A_d はフロベニウスス拡大である．
- $\beta \in \Bbbk^\times$ に対し, B_β を $t_\beta := x + \beta g$ で生成される H の部分代数とする．B_β は H の右余イデアル部分代数である．B_β は可換だから, モジュラー関数は H の余単位の制限によって与えられる．これは H のモジュラー関数 α_1 の B_β への制限と一致しない (実際

$\alpha_1(t_\beta) = \omega^{-1}\beta \neq \beta = \varepsilon(t_\beta)$ である). したがって, 系 4.20 より, H/B_β はフロベニウス拡大ではない.

例 4.22. H を生成元 x, y, g と関係式 $x^N = y^N = 0$, $g^N = 1$, $gx = \omega xg$, $gy = \omega^{-1}yg$, $xy = \omega yx$ で定義される代数とする. この代数 H は $\Delta(x) = x\otimes g + 1\otimes x$, $\Delta(y) = y\otimes g + 1\otimes y$, $\Delta(g) = g\otimes g$ で決定されるホップ代数構造を持つ. A を x と y で, B を x で生成される H の部分代数とする. A と B は H の右余イデアル部分代数である. $\Lambda_A = x^{N-1}y^{N-1}$ と $\Lambda_B = x^{N-1}$ は, それぞれ A と B の左積分である. これにより, A と B のモジュラー関数は, 双方ともに, H の余単位の制限によって与えられるとわかる. よって, 拡大 A/B は, 定理 4.19 の条件 (i) を満たす. しかし, A/B はフロベニウス拡大ではない. これを示すため, まず A と B のコモジュラスを計算しよう.

- $YX = qXY$ $(q \in \Bbbk)$ を満たす不定元 X, Y に対し,

$$(X+Y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}_q X^i Y^{n-i}, \quad \binom{n}{i}_q = \frac{(n)_q(n-1)_q\cdots(n-i+1)_q}{(i)_q(i-1)_q\cdots(1)_q}, \quad (\ell)_q = \sum_{i=0}^{\ell-1} q^i$$

  が成り立つ (q-二項定理). A は x^iy^j $(i,j = 0,1,\cdots,N-1)$ を基底に持つ. この基底に関して, 線形写像 $\lambda_A : A \to \Bbbk$ を $\langle \lambda_A, x^iy^j\rangle = \delta_{i,N-1}\delta_{j,N-1}$ で定義する. q-二項定理を用いて計算すると, 任意の $a \in A$ に対して $\langle \lambda_A, a_{(1)}\rangle = a_{(2)} = \langle \lambda_A, a\rangle g^{-2}$ が成り立つということがわかる ([Shi19, Section 5] に類似の計算がある). 補題 4.15 より, $\mathbf{g}_A = g^2$ である.
- B は基底 x^i $(i = 0,\cdots,N-1)$ を持つ. 線形写像 $\lambda_B : B \to \Bbbk$ を $\langle \lambda_B, x^i\rangle = \delta_{i,N-1}$ で定義すると, 任意の $b \in B$ に対して $\langle \lambda_B, b_{(1)}\rangle b_{(2)} = \langle \lambda_B, b\rangle g^{-1}$ が成り立つ. 補題 4.15 より, $\mathbf{g}_B = g$ を得る.

以上より $\mathbf{g}_B^{-1}\mathbf{g}_A = g$ である. 実は $g \notin C_H(B)^\times \cdot A^\times$ である.

<u>背理法</u>. $g = ca$ を満たす $c \in C_H(B)^\times$ および $a \in A^\times$ が存在したと仮定する. A は $\deg(x) = \deg(y) = 1$ によって次数付き代数となっていることに注意しよう. $x \in B$ だから, $a^{-1}xa = g^{-1}xg = \omega^{-1}x$ となる. ここで $a = \sum_{i,j=0}^{N-1} c_{ij}x^iy^j$ $(c_{ij} \in \Bbbk)$ とおくと, $ax = \omega xa$ の両辺の係数を比較することで $c_{00} = \omega c_{00}$ が得られる. これより $c_{00} = 0$ となるが, これは $a \in A^\times$ であることに矛盾する. $\lightning$

定理 4.19 より, A/B はフロベニウス拡大ではないとわかる.

参考文献

[Ami51] S. A. Amitsur. Nil PI-rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2:538–540, 1951.
[Ami52] S. A. Amitsur. An embedding of PI-rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3:3–9, 1952.

[CW14] M. Cohen and S. Westreich. Character tables and normal left coideal subalgebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 218(10):1845–1866, 2014.

[Doi97a] 土井 幸雄. ホップ代数と環論 —フロベニウス拡大を巡って—. 数理解析研究所講究録 (1997), 997: 1-16.

[Doi97b] Y. Doi. A note on Frobenius extensions in Hopf algebras. *Comm. Algebra*, 25(11):3699–3710, 1997.

[FMS97] D. Fischman, S. Montgomery, and H.-J. Schneider. Frobenius extensions of subalgebras of Hopf algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(12):4857–4895, 1997.

[Kap48] I. Kaplansky. Rings with a polynomial identity. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54:575–580, 1948.

[Kas18] P. Kasprzak. Generalized (co)integrals on coideal subalgebras. `arXiv:1810.07114`.

[Lam99] T. Y. Lam. *Lectures on modules and rings*, volume 189 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999.

[Lam01] T. Y. Lam. *A first course in noncommutative rings*, volume 131 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2001.

[Lam03] T. Y. Lam. *Exercises in classical ring theory*. Problem Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 2003.

[Lam05] T. Y. Lam. *Introduction to quadratic forms over fields*, volume 67 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[Lat72] V. N. Latyšev. On Regev's theorem on identities in a tensor product of PI-algebras. *Uspehi Mat. Nauk*, 27(4(166)):213–214, 1972.

[Lev50] J. Levitzki. A theorem on polynomial identities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1:334–341, 1950.

[LS69] R. G. Larson and M. E. Sweedler. An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras. *Amer. J. Math.*, 91:75–94, 1969.

[Mon83] S. Montgomery. von Neumann finiteness of tensor products of algebras. *Comm. Algebra*, 11(6):595–610, 1983.

[MS99] E. F. Müller and H.-J. Schneider. Quantum homogeneous spaces with faithfully flat module structures. *Israel J. Math.*, 111:157–190, 1999.

[NZ89] W. D. Nichols and M. B. Zoeller. A Hopf algebra freeness theorem. *Amer. J. Math.*, 111(2):381–385, 1989.

[Reg71] A. Regev. Existence of polynomial identities in $A \otimes_F B$. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77:1067–1069, 1971.

[Reg72] A. Regev. Existence of identities in $A \otimes B$. *Israel J. Math.*, 11:131–152, 1972.

[Row80] L. H. Rowen. *Polynomial identities in ring theory*, volume 84 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980.

[Shi19] K. Shimizu. Relative Serre functor for comodule algebras. `arXiv:1904.00376`, March 2019.

[Skr06] S. Skryabin. New results on the bijectivity of antipode of a Hopf algebra. *J. Algebra*, 306(2):622–633, 2006.

[Skr07] S. Skryabin. Projectivity and freeness over comodule algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(6):2597–2623, 2007.

[Skr08] S. Skryabin. Projectivity of Hopf algebras over subalgebras with semilocal central localizations. *J. K-Theory*, 2(1):1–40, 2008.

[Stacks] The Stacks project. `https://stacks.math.columbia.edu`

[Tak72] M. Takeuchi. A correspondence between Hopf ideals and sub-Hopf algebras. *Manuscripta Math.*, 7:251–270, 1972.

[Tak79] M. Takeuchi. Relative Hopf modules — equivalences and freeness criteria. *J. Algebra*, 60(2):452–471, 1979.

低次元ホップ代数の余イデアル部分代数の分類について

杉谷礼 (芝浦工業大学理工学研究科 M2)

本稿では $\Bbbk$ を体とする．また特に注意の無い場合は代数等を全て $\Bbbk$ の上で考えるものとする．

1　量子群と余イデアル部分代数

ホップ代数の余イデアル部分代数とは次のように定義される代数であり，E. F. Müller と H. J. Schneider らが指摘するように "量子等質空間" のモデルとされている．[MS99].

Definition. 代数 $H\,(\cdot,u)$ が余結合律と余単位律を満たす代数射 $\Delta : H \to H \otimes H$, $\varepsilon : H \to \Bbbk$ を持ち，さらに

$$f * g := \cdot\,(f \otimes g)\,\Delta \quad (f, g \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}\,(H,H))$$

で定まる $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}\,(H,H)$ 上の積において $\mathrm{id}_H \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}\,(H,H)$ の逆元となる $S \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}\,(H,H)$ をもつとき，$H\,(\cdot,u,\Delta,\varepsilon,S)$，または単に H をホップ代数といい，Δ, ε, S をそれぞれ，余積，余単位，対合射という．

ホップ代数 H の部分代数 A が，右余イデアル，すなわち

$$\Delta(A) \subset A \otimes H$$

を満たすとき，A を右余イデアル部分代数という．

1980 年代後半，V. G. Drinfel'd と M. Jimbo によって量子群の概念が見出された．量子群はホップ代数の枠組みで説明され，また可換ホップ代数は米田の補題によりアフィン群スキームと 1 対 1 に対応することから，量子群やホップ代数は群の一般化とみなされている．

さらに量子群の研究の進展とともに量子等質空間，つまり量子群が上手く作用する空間が考え始められた．例えば Podlés の量子球面と呼ばれる，球面 S^2 の "量子化" にあたる， 1 パラメータの族がある [Pod87]．また M. Dijkhuizen と M. Noumi はより一般的な，量子射影空間と呼ばれる族を定義した [DN98]．これらの他にも [Dij96] では古典的なコンパクト対称空間の類似に関することが言及されている．この様に，量子等質空間とみなされるものが q-多項式や直交多項式系の研究から具体的なものとして現れた．そこで Müller と Schneider は量子等質空間を抽象的に扱う枠組みが考えられるために次の定理に着目した：

Theorem ([Tak79]，[Mas94])**.** H を体上のホップ代数とするとき次の 2 つは同値である：

(1) H の右余イデアル部分代数 A で，H が A 上左忠実平坦加群となるもの．

(2) H の商左 H-加群余代数 C で，H が右忠実余平坦 C-余加群となるもの．

Müller と Schneider はこの定理を踏まえて，これまでに現れていた量子等質空間の例，例えば上述した Podlés の量子球面たちの，忠実平坦性などの性質を調べている [MS99]．この様な経緯からホップ代数の，上の定理の (1) の性質を満たす余イデアル部分代数は量子等質空間とみなされている．

2 有限次元ホップ代数の余イデアル部分代数の分類について

有限群 G 上の等質空間 (つまり推移的な G-集合) は G の部分群による剰余類の集合と同型である．また有限群の群環やその双対の余イデアル部分代数はその群の部分群と対応している．よって有限次元ホップ代数の余イデアル部分代数を分類することは，与えられた有限群に対してその部分群を分類することのように基本的な問題であると考えられる．そこで与えられた有限次元ホップ代数の余イデアル部分代数の分類を行うことにした．

以下，$\Bbbk$ を標数 0 の代数閉体とし，H を $\Bbbk$ 上有限次元ホップ代数，A を H の右余イデアル部分代数とする．有限次元ホップ代数の余イデアル部分代数の分類について，先行研究として次の結果がある：

- [Mas92] と [Skr07] より，H の余イデアル部分代数と，H^* の余イデアル部分代数には 1 対 1 の対応がある．
- [Skr07] より，H は自由 A-加群である．特に $\dim A$ は $\dim H$ を割り切る．例えば $\dim H$ が素数のとき A は，$\Bbbk$ または H となり余イデアル部分代数の分類問題は解決される．
- [Chi20] と [Bur15] により，それぞれタフト代数と余中心カッツ代数の余イデアル部分代数は分類されている．

これらの結果と [BG13] の有限次元ホップ代数の分類表を照らしあわせると，余イデアル部分代数の分類が未解決な最も低い次元のホップ代数は 8 次元であることがわかる．

そこで 8 次元のホップ代数の余イデアル部分代数の分類について考える．8 次元の半単純ホップ代数の余イデアル部分代数の分類については [Mas95] と [Bur15] の結果から分かるため，8 次元の非半単純ホップ代数の余イデアル部分代数の分類を行う．8 次元非半単純ホップ代数は [Şte99] によって分類済みである．

3 8 次元非半単純ホップ代数の余イデアル部分代数の分類

以降，H を 8 次元ホップ代数とし，さらに $A^+ := \mathrm{Ker}\,(\varepsilon|_A : A \to \Bbbk)$，$A^\Diamond := (H/A^+H)^*$ とおく．まず H/A^+H は H の商余代数として右 H-加群代数になっておりその双対空間 $A^\Diamond$ は H^* の余イデアル部分代数とみなせる．[Mas92]，[Skr07] の結果より対応 $A \to A^\Diamond$ は H の右余イデアル部分代数と H^* の右余イデアル部分代数の間の全単射を与える．さらにこのとき $\dim(A^\Diamond) = \dim(H)/\dim(A)$ が成り立つ．さて [Skr07] よ

り A の次元は H の次元を割り切る．従って A の次元は 1，2，4，8 のいずれかであり，$\dim A = 1$ または $\dim A = 8$ の場合はそれぞれ $A = H$ または $A = \Bbbk$ である．$\dim A = 4$ の場合，$B := A^{\Diamond}$ は H^* の 2 次元の余イデアル部分代数であり，H と H^{**} を同一視するならば $A = A^{\Diamond\Diamond} = B^{\Diamond}$ となる．従って A は，適当な 2 次元の右余イデアル部分代数 $B \subset H^*$ を用いて $A = B^{\Diamond}$ と表される．以上をまとめると，8 次元ホップ代数の各々に対し 2 次元の右余イデアル部分代数 B が全てわかっていれば，対応 $B \mapsto B^{\Diamond}$ により 4 次元の右余イデアル部分代数もすべてわかり，8 次元ホップ代数余イデアル部分代数の分類が完了したことになる．すなわち 8 次元ホップ代数の余イデアル部分代数の分類は，8 次元ホップ代数の 2 次元の右余イデアル部分代数を決定すること及び，対応 $B \mapsto B^{\Diamond}$ を具体的に構成することで完了する．

2 次元の余イデアル部分代数の決定について

$$
\begin{aligned}
G(H) &= \{g \in H | \Delta(g) = g \otimes g,\ g \neq 0\} \\
P_{g,h}(H) &= \{x \in H | \Delta(x) = x \otimes g + h \otimes x\} \quad (g, h \in G(H))
\end{aligned}
$$

とおく．2 次元の余イデアル部分代数は $G(H)$ の元，または $P_{g,1}(H)$ の元で生成されることが示される．従って 2 次元の余イデアル部分代数を決定するためには $G(H)$ と $P_{g,1}(H)$ を決定し，それらの各元で生成される代数が 2 次元か否かを調べればよい．

$G(H)$ については，H^* の 1 次元表現を調べればわかり，さらに 8 次元非半単純ホップ代数の表現については [Wak04] で既によく調べられている．また，$P_{g,1}(H)$ については， Taft-Wilson の定理 [Mon93] 等を用いることでわかる．

対応 $B \mapsto B^{\Diamond}$ の具体的な構成について

L を 8 次元ホップ代数，$\mathcal{C}(H)$ を H の右余イデアル部分代数全体とする．ホップ代数の同型射 $\phi : L \to H^*$ が与えられたとする．このとき，1 対 1 の対応 $B \mapsto B^{\Diamond}$ と同型写像 $\phi : L \to H^*$ を組み合わせて得られる写像 $\mathcal{C}(L) \to \mathcal{C}(H), B \mapsto \phi^{-1}\left(B^{\Diamond}\right)$ は全単射である．以降 $\phi^{-1}\left(B^{\Diamond}\right) := B^{\blacklozenge}$ とおく．また H は自然な右 H^*-加群の構造を持つため，同型 $\phi : L \to H^*$ を通して右 L-加群になる．その L-作用を $\leftharpoonup$ と書くとき，$B^{\blacklozenge} = \{h \in H | h \leftharpoonup b = \epsilon(b) h \text{ for all } b \in B\}$ が成り立つ．すなわちホップ代数の同型射 $\phi : L \to H^*$ を与えることで，$B \mapsto B^{\blacklozenge}$ で定まる全単射 $\mathcal{C}(L) \to \mathcal{C}(H)$ が得られる．$B^{\blacklozenge}$ の次元は $\dim(H)/\dim(B)$ であり，さらに $B^{\blacklozenge}$ は上の公式によって計算することができる．

4 分類結果

さて，8 次元の非半単純ホップ代数は以下の 6 つである [Şte99]：

H	生成元	関係式	ホップ代数構造	双対	備考
A'_{C_4}	g, x	$g^4=1,\ x^2=0,$ $xg=-gx$	$g\in G\left(A'_{C_4}\right),$ $x\in P_{g,1}\left(A'_{C_4}\right)$	A'''_{C_4}	pointed
A'''_{C_4}	g, x	$g^4=1,\ x^2=0,$ $xg=\omega gx$	$g\in G\left(A'''_{C_4}\right),$ $x\in P_{g^2,1}\left(A'''_{C_4}\right)$	A'_{C_4}	pointed
A''_{C_4}	g, x	$g^4=1,\ x^2=g^2-1,$ $xg=-gx$	$g\in G\left(A''_{C_4}\right),$ $x\in P_{g,1}\left(A''_{C_4}\right)$	$\left(A''_{C_4}\right)^*$	pointed
$\left(A''_{C_4}\right)^*$	g, x	$g^4=1,\ x^2=0,$ $xg=\omega gx$	$\Delta(g)=g\otimes g-2gx\otimes g^3x$ $x\in P_{g^2,1}\left(\left(A''_{C_4}\right)^*\right)$	A''_{C_4}	NOT pointed
A_{C_2}	g, x, y	$g^2=1,\ x^2=y^2=0$ $gx=-xg,\ gy=-yg,$ $xy=-yx$	$g\in G\left(A_{C_2}\right),$ $x,y\in P_{g,1}\left(A_{C_2}\right)$	A_{C_2}	pointed
$A_{C_2\times C_2}$	g, h, x	$g^2=h^2=1,\ x^2=0$ $gh=hg,\ gx=-xg,$ $hx=-hx$	$g,h\in G\left(A_{C_2\times C_2}\right),$ $x\in P_{g,1}\left(A_{C_2\times C_2}\right)$	$A_{C_2\times C_2}$	pointed

但し，ω は 1 の原始 4 乗根.

例えば $A_{C_2\times C_2}$ の場合，2 次元の右余イデアル部分代数は

$$\langle g+\beta x\rangle\ (\beta\in \Bbbk),\ \langle h\rangle,\ \langle gh\rangle,\ \langle x\rangle$$

のみである．さらに $\chi_1,\chi_2\in G\left({A_{C_2\times C_2}}^*\right)$，$\xi\in P_{\chi_1,\epsilon}\left({A_{C_2\times C_2}}^*\right)$ をそれぞれ

$$\chi_1(g)=\chi_1(h)=-1,\ \chi_1(x)=0,$$
$$\chi_2(g)=1,\ \chi_2(h)=-1,\ \chi_2(x)=0,$$
$$\xi(g)=\xi(h)=0,\ \xi(x)=1$$

とし，$\phi\colon A_{C_2\times C_2}\to {A_{C_2\times C_2}}^*$ を

$$g\mapsto\chi_1,\ h\mapsto\chi_2,\ x\mapsto\xi$$

で定めれば，ϕ はホップ代数の同型射になる．そして section 3 の議論により，2 次元の右余イデアル部分代数と 4 次元の右余イデアル部分代数の対応は次のようになることがわかった：

$$\langle g+\beta x\rangle^{\blacklozenge}=\left\langle\frac{\beta}{2}g+x, gh\right\rangle,\ \langle h\rangle^{\blacklozenge}=\langle h,x\rangle,\ \langle gh\rangle^{\blacklozenge}=\langle g,x\rangle,\ \langle x\rangle^{\blacklozenge}=\langle g,h\rangle.$$

以上が $A_{C_2\times C_2}$ の非自明な右余イデアル部分代数の全てである．残りの 5 つの 8 次元非半単純ホップ代数についても同様に決定した：

$H \backslash A$	$\dim A = 2$	$\dim A = 4$
$A'_{C_4} \cong (A'''_{C_4})^*$	$\langle g^2 \rangle$, $\langle x \rangle$.	$\langle g^2, x \rangle$, $\langle g \rangle$, $\langle \frac{\alpha}{2}g + x \rangle$.
$A'''_{C_4} \cong (A'_{C_4})^*$	$\langle g^2 \rangle$, $\langle x \rangle$, $\langle g^2 + \alpha x \rangle$.	$\langle g^2, x \rangle$, $\langle g \rangle$.
A''_{C_4}	$\langle g^2 \rangle$, $\langle g \pm \omega x \rangle$.	$\langle g^2, x \rangle$, $\langle g \rangle$, $\langle \frac{\alpha}{2}g + x \rangle$.
$(A''_{C_4})^*$	$\langle g^2 \rangle$, $\langle x \rangle$, $\langle g^2 + \alpha x \rangle$.	$\langle g^2, x \rangle$, $\langle g^3 \pm (1 \mp \omega) gx \rangle$.
$A_{C_2 \times C_2} \cong (A_{C_2 \times C_2})^*$	$\langle x \rangle$, $\langle g + \beta x \rangle$, $\langle h \rangle$, $\langle gh \rangle$.	$\langle g, h \rangle$, $\left\langle \frac{\beta}{2}g + x, gh \right\rangle$, $\langle x, h \rangle$, $\langle g, x \rangle$.
$A_{C_2} \cong (A_{C_2})^*$	$\langle g + \beta x + \gamma y \rangle$, $\langle \beta x + \gamma y \rangle$.	$\left\langle \frac{\beta}{2}g + x, \frac{\gamma}{2}g + y \right\rangle$, $\langle g, \gamma x - \beta y \rangle$.

但し $\alpha \in \Bbbk^\times$, $\beta, \gamma \in \Bbbk$, ω は 1 の原始 4 乗根.

参考文献

[BG13] M. Beattie and G. A. Garcia, Classifying Hopf algebras of a given dimension, Contemp. Math., 585, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.

[Bur15] S. Burciu, On coideal subalgebras of abelian cocentral extensions and a generalization of Wall's conjecture, J. Algebra Appl. 14 (2015), no. 2.

[Chi20] A. Chirvasitu, P. Kasprzak and P. Szulim, Integrals in Left Coideal Subalgebras and Group-Like Projections, Algebras and Representation Theory (2020) 23:1499–1522.

[Dij96] M. Dijkhuizen, Some remarks on the construction of quantum symmetric spaces, Acta Applicandae Mathematicae 44 (1996), 59-80.

[DN98] M. Dijkhuizen, M. Noumi, A family of quantum projective spaces and related q-hypergeometric orthogonal polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), no. 8, 3269–3296.

[Mas92] A. Masuoka, Freeness of Hopf algebras over coideal subalgebras, Comm. Algebra 20 (1992), no. 5, 1353–1373.

[Mas94] A. Masuoka, Quotient theory of Hopf algebras, Advances in Hopf algebras (Chicago, IL, 1992), 107–133, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 158, Dekker, New York, 1994.

[Mas95] A. Masuoka, Semisimple Hopf algebras of dimension 6,8. Israel J. Math. 92 (1995), no. 1-3, 361–373.

[Mon93] S. Montgomery, Hopf algebras and their actions on rings, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 82. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1993. xiv+238 pp. ISBN: 0-8218-0738-2.

[MS99] E. F. Müller, H. -J. Schneider, Quantum homogeneous spaces with faithfully flat module structures, Israel Journal of Mathematics volume 111, pages 157–190 (1999).

[Pod87] P. Podlés, Quantum spheres, Letters in Mathematical Physics 14 (1987), 193- 202.

[Skr07] S. Skryabin, Projectivity and freeness over comodule algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), no. 6, 2597–2623.

[Şte99] D. Ştefan, Hopf algebras of low dimension, J. Algebra 211 (1999), 343–361.

[Tak79] M. Takeuchi, Relative Hopf modules—equivalences and freeness criteria, J. Algebra 60 (1979), no. 2, 452–471.

[Wak04] M. Wakui, Various structures associated to the representation categories of eight- dimensional nonsemisimple Hopf algebras, Algebr. Represent. Theory 7 (2004), no. 5, 491–515.

Structures of Frobenius Kernels of Algebraic Supergroups

柴田 大樹

岡山理科大学 理学部 応用数学科 (shibata@ous.ac.jp)

目次

本稿を通して基礎体 $\Bbbk$ は $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ をみたすものとし，フロベニウス核の話を扱うときは，$\Bbbk$ は正標数 $p := \mathrm{char}(\Bbbk) > 2$ かつ完全体である（これはフロベニウス写像で p 乗を考えるときに必要）としておく.

1 はじめに

群は図形や操作を考察するうえで重要な代数的対象であるが，その中でも一般線型群 GL_n や特殊線型群 SL_n をはじめとする “行列群” は代数多様体の構造を持ち数学の様々な場面で活躍している．特にこれらはアフィンであり，座標環である（有限生成かつ可換な）ホップ代数によって完全にコントロールされる．そこで逆に（有限生成）可換ホップ代数を座標環に持つアフィン（代数群）群スキームの構造論や表現論を，純粋なホップ代数的手法を用いることで研究していくということは古くから盛んになされてきた．この手法は環論的な抽象度が上がる一方で，これまで群ごとになされていた議論を統一することができたり，基礎体の標数を任意にとることができたりといった，見通しがよくなるという利点がある．

近年になり，既存の理論のスーパー化が積極的に考えられてきている．スーパーの理論では，位数 2 の群 $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ で次数付けられた対象たちとその間の「スーパー対称性」と呼ばれる非自明な対称性が考慮されたものを研究する．例えばスーパー・ベクトル空間とは，単に $\mathbb{Z}_2$-graded なベクトル空間 $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ のことである．スーパー対称性は，パリティー写像

$$(V_{\bar{0}} \cup V_{\bar{1}}) \setminus \{0\} \longrightarrow \{0,1\}; \quad v \longmapsto |v| := \begin{cases} 0 & \text{if } v \in V_{\bar{0}} \\ 1 & \text{if } v \in V_{\bar{1}} \end{cases}$$

を用いて，$V \otimes W \to W \otimes V;\ v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v$ で与えられる．ここで元 v, w はもちろん homogeneous として扱っている（以降パリティー写像を使うときはいつもそう仮定する）．

可換スーパー代数 $R = R_{\bar{0}} \oplus R_{\bar{1}}$ とは $\mathbb{Z}_2$-graded 代数であって，スーパー可換性 $ab = (-1)^{|a||b|} ba$ for $0 \neq a, b \in R_{\bar{0}} \cup R_{\bar{1}}$ をみたすもののことをいう．スーパーの状況ではスーパー対称性が自明にならないように基礎体は標数は 2 ではないと仮定するので，特に可換スーパー代数では $a^2 = 0$ for all $a \in R_{\bar{1}}$ が成立する．ホップ代数の概念において余積が代数射である箇所には対称性が用いられているので，そこをスーパー対称性に置換えることでスーパー・ホップ代数の概念が得られる．例えばグラスマン代数は可換スーパー・ホップ代数の代表例である．

最近になり，ホップ代数的手法がスーパー代数群の研究にも有効であることが分かりつつある [Mas1, Mas2, MasShiShi, Shi1, Shi2]．ここで，スーパー代数群とは可換スーパー代数の圏 SAlg から群の圏への表現可能関手 $\mathbf{G}$ であり，座標環にあたる表現対象 $\mathcal{O}(\mathbf{G})$ がスーパー代数として有限生成であるもののとこである．米田の補題で行先の群構造を $\mathcal{O}(\mathbf{G})$ に移植すると，これは有限生成な可換スーパー・ホップ代数になる．プレプリント [Shi3] ではホップ代数的アプローチを用いることで，正標数のスーパー代数群の表現論を展開した．特に既約表現を p-制限ウェイトの既約表現のテンソル積に分解する「スタインバーグのテンソル積定理」のスーパー版が成立していることを，やや技術的だが適当な仮定のもと確かめた．これまでは具体的ないくつかのスーパー代数群に対して成立していることが知られていた [Kuj, BruKle, ShuWan, CheShuWan] のでその一般化を得たことになる．詳しい証明は [Shi3] をご覧いただくことにして，本稿では非スーパーの場合の証明を詳しくつけ，プレプリントでは詳しく書かなかった反例などを具体的に構成してみる．

謝辞

本研究集会「第 37 回リー代数サマーセミナー」において，講演の機会を与えて下さった世話人の福井大学の古閑義之先生と松本拓也先生の両氏にこの場を借りて御礼申し上げます．本研究は JSPS KAKENHI (19K14517, 22K13905) の助成を受けたものです．

2　非スーパーのときのスタインバーグのテンソル積定理

このセクションでは通常の（= 非スーパーの）代数群に対するスタインバーグのテンソル積定理の証明のアウトラインを，スーパー化する際にどの様な所に気を付けなければならないか注意しつつ追ってみることにする．

扱う代数群のクラスは（$\mathbb{Z}$ 上定義された）連結・分裂簡約代数群（スキーム） G である．この G には分裂極大トーラス T が存在しており，その指標群 $X(T) = \mathsf{Hom}(T, G_{\mathsf{m}})$ は G のランクを ℓ とかくとき $\mathbb{Z}^\ell$ と同型である．ここで G_{m} は一次元の乗法群スキーム．

付随するルート系 $\triangle$ に順序を任意に入れ

$$\triangle \ = \ \triangle^+ \sqcup \triangle^- \quad \text{with} \quad -\triangle^+ := \{-\alpha \mid \alpha \in \triangle^+\} = \triangle^-$$

とちょうど半分半分に非交和に分解しておく．この分解に伴って構成される正・負のボレル部分群をそれぞれ B^+, B^- と書いておく．また，体拡大 $\Bbbk'/\Bbbk$ に対して，$G_{\Bbbk'}$ を G の係数拡大とする．すなわち $\mathcal{O}(G_{\Bbbk'}) = \mathcal{O}(G) \otimes \Bbbk'$ とする．

2.1　G の既約表現

任意に $\lambda \in X(T)$ をとり固定する．このときにできる T の 1 次元表現を $\Bbbk^\lambda$ とかいておく．これは自然な全射 $B^- \to T$ によって B^- の 1 次元既約表現となるが，さらに B^- がユニポテント群と T とで構成されていることに注意すると，この誘導された $\Bbbk^\lambda$ たちが B^- の既約表現をすべて尽くしていることが分かる．

言葉として G の表現 := 左 G-加群（= 右 $\mathcal{O}(G)$-余加群）ということにする．するとこの B^- の既約表現 $\Bbbk^\lambda$ から G の表現が次のようにして誘導される：

$$H^0_G(\lambda) := \mathsf{ind}^G_{B^-}(\Bbbk^\lambda) := \Bbbk^\lambda \Box_{\mathcal{O}(B^-)} \mathcal{O}(G).$$

ただし，コテンサーに出てくる $\mathcal{O}(G)$ は B^- の G への自然な積で左 $\mathcal{O}(B^-)$-余加群とみている．

群の積から誘導される $B^- \times B^+ \to G$ の像が “稠密” である（代数的にいえば対応する $\mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(B^-) \otimes \mathcal{O}(B^+)$ が単射である）ことから次が従う（例えば [Jan, Part II, Cor. 2.3] を参照）．

定理 2.1.

もし $H^0_G(\lambda) \neq 0$ ならば，その G-socle である $L_G(\lambda) := \mathsf{soc}_G(H^0_G(\lambda))$ は，最高ウェイトが λ

の G の既約表現である．さらに $L_G(\lambda)$ の λ-ウェイト空間は $L_G(\lambda)^\lambda = \Bbbk^\lambda$ である．

さらにこれらが G の既約表現全体を尽くしていることも知られている．つまり

$$X(T)^+ := \{\lambda \in X(T) \mid H^0_G(\lambda) \neq 0\} \longrightarrow \{G \text{ の既約表現 }\}/\cong; \quad \lambda \longmapsto L_G(\lambda) \tag{2.1}$$

は全単射である．

2.2　絶対既約性

代数群の既約表現 $L_G(\lambda)$ の構成は基礎体 $\Bbbk$ を固定してなされたが，実はこれらは $\Bbbk$ の任意の拡大体上でも既約，すなわち**絶対既約**であることがいえる．このセクションではこの事実を証明する（系 2.8）．現状のスタインバーグのテンソル積定理の証明では，いちど代数閉体を経由する必要があり，この絶対既約性が key になる．

もし $\Bbbk$ が代数閉体ならば，いわゆるシューアの補題より $\mathsf{End}_G(L_G(\lambda)) \cong \Bbbk$ であることはよいのであった．実は代数閉でなくても，代数群の場合はこれは言えている：

命題 2.2.
各 $\lambda \in X(T)^+$ に対して，$\mathsf{End}_G(L_G(\lambda)) \cong \Bbbk$.

Proof. 一般にフロベニウス相互律から「任意の G 表現 V と，任意の B^- 表現 M に対して，同型 $\mathsf{Hom}_G(V, \mathsf{ind}^G_{B^-}(M)) \cong \mathsf{Hom}_{B^-}(\mathsf{res}^G_{B^-}(V), M)$ が成立」していることに注意する．ここで $\mathsf{res}^G_{B^-}(V) := V$ は包含 $B^- \subset G$ による自然な作用の制限．このことから，

$$\begin{aligned}
\mathsf{End}_G(L_G(\lambda)) = \mathsf{Hom}_G(L_G(\lambda), L_G(\lambda)) &\subset \mathsf{Hom}_G(L_G(\lambda), H^0_G(\lambda)) \\
&\cong \mathsf{Hom}_{B^-}(L_G(\lambda), \Bbbk^\lambda) \quad (\because \text{ フロベニウス相互律}) \\
&\subset \mathsf{Hom}_T(L_G(\lambda), \Bbbk^\lambda) \\
&= \mathsf{Hom}_T(L_G(\lambda)^\lambda, \Bbbk^\lambda) \\
&= \mathsf{Hom}_T(\Bbbk^\lambda, \Bbbk^\lambda) \cong \Bbbk.
\end{aligned}$$

一方で，もちろん $\mathsf{id} \in \mathsf{End}_G(L_G(\lambda))$ であるから主張が従う．□

さらに議論を続けるために，以下で環上の加群の一般論からの準備をする（[Jan, Mil] なども同様）．次は Jacobson density theorem （の一部）と呼ばれる標準的な結果であり，証明はややテクニカルなのでここでは与えない（例えば [山崎, p.501] を参照）：

事実 2.3.
（可換とは限らない）$\Bbbk$-代数 A をとり固定する．半単純 A-加群 M について．その反対加群 M^{op} が有限生成ならば，

$$\mathsf{Image}(\rho_M : A \to \mathsf{End}_\Bbbk(M)) \;=\; \mathsf{End}_D(M), \qquad D \;:=\; \mathsf{End}_A(M). \tag{2.2}$$

ここで $\rho_M : A \to \mathsf{End}_{\Bbbk}(M)$ は作用から誘導される射．特に，$D = \mathsf{End}_A(M) \cong \Bbbk$ ならば ρ_M は全射．

次の補題もややテクニカルだが良く知られている：

補題 2.4.

（可換とは限らない）$\Bbbk$-代数 A と，A-加群 $M \neq 0$ について．作用の射 $\rho_M : A \to \mathsf{End}_{\Bbbk}(M)$ が全射ならば，M は単純 A-加群であり，さらに M は絶対既約.

Proof. まず M は単純 $\mathsf{End}_{\Bbbk}(M)$-加群である．実際，任意に $0 \neq v \in M$ をとり固定するとき $M = \mathsf{End}_{\Bbbk}(M).v := \{f(v) \mid f \in \mathsf{End}_{\Bbbk}(M)\}$ がいえたらよい．任意の $m \in M$ に対して，$f : M \to M$ として $f(v) = m$ をみたすような $\Bbbk$-線型写像を作ることが（基底を延長することで）可能なのでよろしい.

一方で，全射性の仮定から $\mathsf{End}_{\Bbbk}(M) \cong A/\mathsf{Ker}(\rho_M)$ となるので，上記の議論から M は $A/\mathsf{Ker}(\rho_M)$-加群として単純，つまり A-加群として単純である.

任意の体拡大 $\Bbbk'/\Bbbk$ に対して，$M \otimes \Bbbk'$ の構造射は

$$(\rho_M)_{\Bbbk'} : A \otimes \Bbbk' \to \mathsf{End}_{\Bbbk}(M) \otimes \Bbbk' \cong \mathsf{End}_{\Bbbk'}(M \otimes \Bbbk')$$

なので，仮定からこれはまた全射．よって上記の議論を再び使うことにより，$M \otimes \Bbbk'$ は単純 $A \otimes \Bbbk'$-加群. □

これらの事実 2.3 と補題 2.4 を合わせれば，絶対既約性の分かりやすい判定方法を得る：

命題 2.5.

（可換とは限らない）$\Bbbk$-代数 A と，有限次元の既約 A-加群 L について．もし $\mathsf{End}_A(L) \cong \Bbbk$ ならば，L は絶対既約.

この準備の下，代数群の既約表現の絶対既約性を示すことができる．その前に，準備では代数の加群の話だったので，代数群スキームの表現（余加群）との関連を明確にしておかねばならない.

一般に（適当な良い）リー群 $\mathfrak{G}$ の表現が，そのリー代数 $\mathsf{Lie}(\mathfrak{G})$ の普遍包絡環 $\mathcal{U}(\mathsf{Lie}(\mathfrak{G}))$ の可積分表現と対応してるという事実を思い出す．実は（適当な良い）代数群スキーム G のカテゴリーでも同様の枠組みがあり，この場合は $\mathcal{U}(\mathsf{Lie}(\mathfrak{G}))$ の代わりとして，**ハイパー代数** $\mathsf{hy}(G)$ $(\subset \mathcal{O}(G)^*)$ と呼ばれる余可換ホップ代数が用いられる（定義や性質，各種 “利用” 方法などは [Tak1, Tak2, Tak3] を参照）．ここで $\mathcal{O}(G)$ は G に対応する可換ホップ代数．基礎体が標数ゼロの場合は $\mathcal{U}(\mathsf{Lie}(G)) = \mathsf{hy}(G)$ となっており，いまのところ正標数でも上手く機能するような普遍包絡環のある種の refinement という認識で十分である.

さて，G の表現は局所有限（余加群を考える）でありさらに T-ウェイト分解があるが，一般の $\mathsf{hy}(G)$-加群はこれらの性質をみたすことはない．実はこれらの性質を持つようなよいものに制限することにより，次が成立することが知られている．例えば [Jan, Part II, Section 1.20] に詳しい（ただし，この本の中では $\mathsf{hy}(G)$ は $\mathsf{Dist}(G)$ と書かれ distribution と呼ばれている）.

事実 2.6.

任意の G 表現 V に対して，次の作用で V には左 $\mathsf{hy}(G)$-加群構造が入る：

$$u.v \;:=\; \sum_i v_i \otimes u(a_i), \quad u \in \mathsf{hy}(G),\; v \in V.$$

ここで $v \mapsto \sum_i v_i \otimes a_i$ は V の右 $\mathcal{O}(G)$-余加群構造．この対応で，G 表現の圏と，局所有限な良い T-ウェイト分解をもつ $\mathsf{hy}(G)$-加群の圏は圏同値になる．

この同値性とこれまでの加群の議論を合わせることにより，次の結果を得る：

定理 2.7.

任意の $\lambda \in X(T)^+$ に対して，$L_G(\lambda)$ は絶対既約である．すなわち任意の体拡大 $\Bbbk'/\Bbbk$ に対して，$L_G(\lambda) \otimes \Bbbk'$ は $G_{\Bbbk'}$ の既約表現である．

Proof. まず既約表現 $L_G(\lambda)$ が有限次元である（余加群の一般論より）ことに注意する．次に事実 2.6 から

$$\mathsf{End}_{\mathsf{hy}(G)}(L_G(\lambda)) \;=\; \mathsf{End}_G(L_G(\lambda)) \;=\; \Bbbk \qquad (\because \text{命題 } 2.2)$$

と分かる．従って，命題 2.5 から主張が従う． □

系として次を得る：

系 2.8.

任意の G 表現 M について．任意の体拡大 $\Bbbk'/\Bbbk$ に対して，「M は G 加群として半単純 $\Longleftrightarrow$ $M \otimes \Bbbk'$ は $G_{\Bbbk'}$ 加群として半単純」．

注意 2.9.

上記の議論では，環の加群の一般論を用いるという手法をとることで $L_G(\lambda)$ の中身に触れずに定理 2.7 を示した．これを加群論を用いず $L_G(\lambda)$ の具体性から直接証明しようとしても，ウェイトがとこまで伸びているかなど既約表現の構造が不明なので難しい．

2.3 フロベニウス核

正標数の表現論を展開するにあたり，G の特別な閉部分群であるフロベニウス核が重要な役割を果たすのであった．ここではフロベニウス核の定義や性質についてまとめる．

2.3.1 定義

非負整数 r をとり固定する．可換代数 R に対して，$R^{(r)}$ を，環としては $R^{(r)} = R$ でありスカラー倍が $c.a := c^{p^{-r}}a$ $(c \in \Bbbk, a \in R)$ で与えられているものとする．この記号のもとで

$G^{(r)}(R) := G(R^{(r)})$ とおき，射 $\mathsf{Fr}_G^r : G \to G^{(r)}$ を

$$\mathsf{Fr}_G^r(R) : G(R) \longrightarrow G^{(r)}(R) = \mathsf{Alg}(\mathcal{O}(G), R^{(r)}); \quad g \longmapsto (a \mapsto g(a^{p^r}))$$

で定義する．ここで $\mathcal{O}(G)$ は G に対応する可換ホップ代数であり，$\mathsf{Alg}(\mathcal{O}(G), R)$ は $\mathcal{O}(G)$ から R への代数射全体.

定義 2.10.

核 $G_r := \mathsf{Ker}(\mathsf{Fr}_G^r)$ を G の r-**フロベニウス核 (Frobenius kernel)** という.

定義からこれは有限かつ正規閉部分群であり，フィルトレーション $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \to G$ が入っており，$\mathcal{O}(G_r) = \mathcal{O}(G)/\mathfrak{m}_G^{p^r}$ となっている．ここで $\mathfrak{m}_G := \mathsf{Ker}(\varepsilon : \mathcal{O}(G) \to \Bbbk; g \mapsto g(1))$ は $\mathcal{O}(G)$ の余単位の核であり，いわゆる augmentation イデアルである.

フロベニウス核による作用の引き戻しを考えることができる．いま G 表現 V（右 $\mathcal{O}(G)$-余加群）に対して，$\mathsf{Fr}_G^r : G \to G$ により作用を捻った G 表現 V を，区別のために $V^{[r]}$ と書くことにする．具体的には，V の右 $\mathcal{O}(G)$-余加群構造を $v \mapsto \sum_i v_i \otimes a_i$ と表示すれば，$V^{[r]}$ の右 $\mathcal{O}(G)$-余加群構造は

$$V^{[r]} \longrightarrow V^{[r]} \otimes \mathcal{O}(G); \quad v \longmapsto \sum_i v_i \otimes a_i^{p^r}$$

で与えられる.

もし G 表現 M 上にフロベニウス核 G_r が自明に作用している場合，M は自然に G/G_r 表現とみなすことができ，(余) 構造射は $M \to M \otimes \mathcal{O}(G) \to M \otimes \mathcal{O}(G/G_r)$ となる．いま構成から $\mathcal{O}(G/G_r) \cong \{a^{p^r} \in \mathcal{O}(G) \mid a \in \mathcal{O}(G)\}$ なので，M の（余）構造射は $M \to M \otimes \mathcal{O}(G)^{p^r}$ とみなしてよい．そこで M のオリジナルの左 $\mathcal{O}(G)$-余加群構造を $m \mapsto \sum_i m_i \otimes a_i$ と表示するとき，M には新しい左 $\mathcal{O}(G)$-余加群構造

$$M \longrightarrow M \otimes \mathcal{O}(G); \quad m \longmapsto \sum_i m_i \otimes a_i^{p^{-r}}$$

が入ることが分かる．これを $M^{[-r]}$ と書くことにすると，記号的に $(M^{[-r]})^{[r]} = M$ が成立することに注意する.

2.3.2 既約表現

次にフロベニウス核 G_r の既約表現に関してまとめる．まずスキームの "共通部分" を考えることにより $T_r := T \cap G_r, B_r^{\pm} := B^{\pm} \cap G_r$ という G_r の良い部分群たちを得る．これらを用いると，G の場合と全く同様に（稠密な big cell がとれる）して T_r の既約表現 $\Bbbk^{\lambda}$ $(\lambda \in X(T))$ たちから G_r の既約表現 $L_{G_r}(\lambda)$ たちを作ることができる．ただしこの場合は，G_r が有限であることから

$$\mathsf{ind}_{B_r^-}^{G_r}(\Bbbk^{\lambda}) \;=\; \Bbbk^{\lambda} \square_{\mathcal{O}(B_r^-)} \mathcal{O}(G_r) \;\cong\; \Bbbk^{\lambda} \otimes \mathcal{O}(U_r^+) \;\neq\; 0$$

であることが従う．ここで U_r^+ は B^+ のユニポテント・ラジカル U^+ の G_r への制限である.

さらに作用の入れ方から $\Bbbk^{\lambda+p^r\mu} = \Bbbk^{\lambda}$ $(\lambda, \mu \in X(T))$ であることに注意すると，

$$X(T_r) \cong X(T)/p^r X(T) \longrightarrow \{G_r \text{ の既約表現 }\}/\cong; \quad \lambda \longmapsto L_{G_r}(\lambda)$$

は全単射であると分かる．特に $\lambda, \mu \in X(T)$ に対して，$L_{G_r}(\lambda + p^r\mu) = L_{G_r}(\lambda)$ が成立する．

さて，各 $\lambda \in X(T)$ に対して，

$$M_{G_r}(\lambda) := \mathsf{hy}(G_r) \otimes_{\mathsf{hy}(B_r^+)} \Bbbk^{\lambda}$$

とかいておく．もちろんこれは G_r 表現になている（例えば事実 2.6 の G_r 版を考えればよい）．この $M_{G_r}(\lambda)$ は G_r の場合の Verma 加群ということで，**baby Verma** とよく呼ばれており，PBW 型定理（セクション 2.4 参照）から

$$\mathsf{dim}(M_{G_r}(\lambda)) \;=\; p^{r\cdot\#\triangle^+}$$

と有限次元であることがわかる（$\#\triangle^+ = \#\triangle^-$ にも注意する）．リー代数のときと同様にして，ラジカルで割ったものがちゃんと既約表現になっている：

命題 2.11.

各 $\lambda \in X(T)$ について，G_r 表現として $M_{G_r}(\lambda)/\mathsf{rad}\big(M_{G_r}(\lambda)\big) \cong L_{G_r}(\lambda)$ が成立．

Proof. 標準的な議論により $\mathsf{ind}_{B_r^-}^{G_r}(\Bbbk^{\lambda})$ の部分表現である $L_{G_r}(\lambda)$ の最高ウェイトは λ であるから，$\mathsf{Hom}_{B_r^+}(\Bbbk^{\lambda}, L_{G_r}(\lambda)) \neq 0$ である．するとフロベニウス相互律から

$$\mathsf{Hom}_{G_r}\big(M_{G_r}(\lambda), L_{G_r}(\lambda)\big) \;=\; \mathsf{Hom}_{B_r^+}(\Bbbk^{\lambda}, L_{G_r}(\lambda)) \;\neq\; 0$$

とわかる．従って $0 \neq \exists\varphi \in \mathsf{Hom}_{G_r}\big(M_{G_r}(\lambda), L_{G_r}(\lambda)\big)$ がとれる．いま $L_{G_r}(\lambda)$ は G_r の既約表現なので φ は全射である．

もちろん $M_{G_r}(\lambda)$ は有限次元なので，$M_{G_r}(\lambda)/\mathsf{rad}\big(M_{G_r}(\lambda)\big)$ は半単純であることに注意する．さらに $\mathsf{ind}_{B_r^-}^{G_r}(\Bbbk^{\lambda})$ が単純 socle を持つことと，線型双対が

$$\exists\mu \in X(T) \quad \text{s.t.} \quad \mathsf{ind}_{B_r^-}^{G_r}(\Bbbk^{\lambda})^* \;\cong\; \mathsf{ind}_{B_r^-}^{G_r}(\Bbbk^{\mu-\lambda})$$

であることより（具体的には [Jan, Part I, Corollary 8.18] から $\mu = (p^r - 1)\sum_{\alpha\in\triangle^+}\alpha$ で与えられる），$M_{G_r}(\lambda)/\mathsf{rad}\big(M_{G_r}(\lambda)\big)$ は単純であることが示される．

他方で，ラジカルの最小性より $\mathsf{rad}(M_{G_r}(\lambda)) \subset \mathsf{Ker}(\varphi)$ だから，経由して

$$M_{G_r}(\lambda)/\mathsf{rad}\big(M_{G_r}(\lambda)\big) \;\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow\; M_{G_r}(\lambda)/\mathsf{Ker}(\varphi) \;\cong\; L_{G_r}(\lambda)$$

を得るが，最左辺は単純よりこれは全単射でなければならない． □

2.4　ハイパー代数の作用

いままではハイパー代数 $\mathsf{hy}(G)$ の具体性はほぼ使わなかったが，ここではハイパー代数の既約表現たちへの具体的な作用をみていく．そのためにまずリー代数 $\mathsf{Lie}(G) \supset \mathsf{Lie}(T)$ の基底（具体的には Chevalley 基底のようなキレイな $\mathbb{Z}$-基底）を $\{X_\alpha \in \mathsf{Lie}(G)^\alpha \mid \alpha \in \triangle\} \sqcup \{H_i \in \mathsf{Lie}(T) \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell\}$ と表示しておく．このとき $\mathsf{hy}(G)$ の基底は

$$X_\alpha^{(n)} \in \mathsf{hy}(G)\ (\alpha \in \triangle, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})\ \&\ \binom{H_i}{m} \in \mathsf{hy}(T)\ (1 \leqslant i \leqslant \ell, m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$$

たちからなる PBW-like な単項式たちで与えられる（例えば [Tak3] 参照）．ここで $X_\alpha^{(n)}$ や $\binom{H_i}{m}$ はいわゆる divided powers であり，以下の関係式が成り立つ：

$$\Delta_{\mathsf{hy}(G)}(X_\alpha^{(n)}) = \sum_{i+j=n} X_\alpha^{(i)} \otimes X_\alpha^{(j)}, \tag{2.3}$$

$$X_\alpha^{(n)} X_\alpha^{(m)} = \binom{m+n}{n} X_\alpha^{(n+m)}, \tag{2.4}$$

$$X_\alpha^{(n)} X_{-\alpha}^{(m)} = \sum_{i=0}^{\min\{n,m\}} X_{-\alpha}^{(m-i)} \binom{H_\alpha - m - n + 2i}{i} X_\alpha^{(n-i)}. \tag{2.5}$$

ここで $H_\alpha := [X_\alpha, X_{-\alpha}]$ とおいており，$\Delta_{\mathsf{hy}(G)}$ は $\mathsf{hy}(G)$ の余積．これは自然なペアリング

$$\langle\ ,\ \rangle : X(T) \times X(T)^\vee := \mathsf{Hom}(G_m, T) \longrightarrow \Bbbk$$

に対して，$\lambda(H_\alpha) = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$ をみたしている（$\alpha^\vee$ は α の双対ルート，つまり $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ をみたすもの）．

またフロベニウス核 G_r のハイパー代数 $\mathsf{hy}(G_r)$ の基底は

$$X_\alpha^{(n)} \in \mathsf{hy}(G)\ (\alpha \in \triangle, 0 \leqslant n \leqslant p^r - 1)\ \&\ \binom{H_i}{m} \in \mathsf{hy}(T)\ (1 \leqslant i \leqslant \ell, 0 \leqslant m \leqslant p^r - 1)$$

たちからなる PBW-like な単項式たちで与えられる．

以下で，$\triangle = \triangle^+ \sqcup \triangle^-$ の（順序から定まる）単純ルート全体をひとつとり $\Phi\,(\subset \triangle^+)$ と書くことにする．

補題 2.12.

任意の $\lambda \in X(T)$ と $\alpha \in \Psi$ をとり固定する．このとき任意の $n \geqslant \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle + 1$ に対して，$X_{-\alpha}^{(n)}.L_G(\lambda)^\lambda = 0$ となる．

Proof. まず一次元なので基底を $L_G(\lambda)^\lambda = \Bbbk v^\lambda$ と表示しておく．いま $w := X_{-\alpha}^{(n)}.v^\lambda$ とおくとき，主張をいうには w が最高ウェイトベクトルであればよい（実際，そうではないとすると $L_G(\lambda)$ の非自明な部分加群が存在することになり矛盾する）．つまり任意の $\beta \in \triangle^+$ と $m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ に対して，$X_\beta^{(m)}.w = 0$ であればよい．

もし $\beta \neq \alpha$ であれば，$X_{-\alpha}^{(n)}$ と $X_{\beta}^{(m)}$ は可換である（例えば [Tak3, Proposition 2.3]）から $X_{\beta}^{(m)}.w = 0$ が容易に従う．つぎに $\beta = \alpha$ の場合．交換法則 (2.5) から $n \geqslant m$ と仮定すれば

$$X_{\alpha}^{(m)}.w = X_{-\alpha}^{(n-m)} \binom{\lambda(H_\alpha) + m - n}{m}.v^{\lambda}$$

となる．しかし仮定から n は $\lambda(H_\alpha) = \langle \lambda, \alpha^{\vee} \rangle$ より大きいため，これはゼロでなくてはならない．従って，この場合でも $X_{\beta}^{(m)}.w = 0$ を得る． □

記号として

$$X_r(T)^+ \ := \ \{\lambda \in X(T)^+ \mid \forall \alpha \in \Phi,\ \langle \lambda, \alpha^{\vee} \rangle < p^r\} \tag{2.6}$$

とかいておく．

補題 2.13.

任意の $\lambda \in X_r(T)^+$ に対して，$L_G(\lambda) = \mathsf{hy}(G_r).L_G(\lambda)^{\lambda}$.

Proof. もし $M := \mathsf{hy}(G_r).L_G(\lambda)^{\lambda}$ が G 表現であること，もっと $\mathsf{hy}(G)$ の作用で閉じていること（事実 2.6 参照）が言えれば，単純性から主張が従う．いま任意の $x \in \mathsf{hy}(G), u \in \mathsf{hy}(G_r)$ に対して，Sweedler 記法 $\Delta_{\mathsf{hy}(G)}(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ と，ハイパー代数の交換子積 $[x, y] := \sum x_{(1)} y_{(1)} S(x_{(2)}) S(y_{(2)})$ を用いたら（ここで $S(-)$ は $\mathsf{hy}(G)$ のアンチポード）

$$xu = \sum x_{(1)} u_{(1)} S(x_{(2)}) S(u_{(2)}) u_{(3)} x_{(3)} = \sum [x_{(1)}, u_{(1)}] u_{(2)} x_{(2)}$$

と書くことができる．さらに G_r は G の正規閉部分群であるから，[Tak1, Corollary 3.4.15] から $[x_{(1)}, u_{(1)}] \in \mathsf{hy}(G_r)$ となっている．

これらのこと（および (2.3)）から，M が $\mathsf{hy}(G)$-stable であることをいうには

$$\forall x \in \mathsf{hy}(U^-), \quad x.L_G(\lambda)^{\lambda} \ \subset \ M \tag{2.7}$$

をいえば十分である（$\mathsf{hy}(U^+)$ は自明に作用するから）．ここで $U^{\pm}$ はボレル部分群 $B^{\pm}$ のユニポテント・ラジカルである．この設定で，$\mathsf{hy}(G_r)$ の PBW 基底の形から $x = X_{-\alpha}^{(n)}$ が $\alpha \in \triangle^+, n \leqslant p^r - 1$ の場合は，明らかに $x.L_G(\lambda)^{\lambda} \subset \mathsf{hy}(G_r).L_G(\lambda)^{\lambda} = M$ なので (2.7)（の右の条件）はよい．

従って，$x = X_{-\alpha}^{(n)}$ が $\alpha \in \triangle^+, n \geqslant p^r$ の場合に (2.7) をいえばよい．いま $\mathsf{hy}(U^-)$ が負の単純ルートたちの devided powers $X_{-\alpha}^{(n)}$ $(n \geqslant 0, \alpha \in \Phi)$ で代数として生成されていること [Tak3, Theorem 2.1] に注意すれば，$\alpha \in \Phi$ のときに (2.7) がいえたらよい．いまの場合，仮定より $\langle \lambda, \alpha^{\vee} \rangle \leqslant p^r - 1 \leqslant n - 1$，すなわち $\langle \lambda, \alpha^{\vee} \rangle + 1 \leqslant n$ となっているため，補題 2.12 から $x.L_G(\lambda)^{\lambda} = 0$ を得るので，この場合も (2.7) はよい． □

2.5 スタインバーグのテンソル積定理

任意の G 表現を，自然な包含 $G_r \subset G$ によって自然に G_r 表現とみる．絶対既約性は次の主張の証明に本質的に用いられる：

命題 2.14.

各 $\lambda \in X(T)^+$ に対して，G の既約表現 $L_G(\lambda)$ は，G_r の表現とみたとき半単純.

Proof. まず系 2.8 より $\Bbbk$ が代数閉体のときに主張を示せば十分なのでそう仮定する．任意に G_r-単純部分表現 $S \subset L_G(\lambda)$ をとる．このとき G_r の正規性から，$\forall g \in G(\Bbbk)$ に対し $g.S := \{g.s \mid s \in S\}$ はまた単純 G_r 表現である．そこで

$$M := \sum_{g \in G(\Bbbk)} g.S \quad (\subset L_G(\lambda))$$

を考えれば，これは自明に $G(\Bbbk)$ の表現である．また G_r の表現としては半単純になっている．

いま $\Bbbk$ は代数閉体であり G は reduced なので

$$G(\Bbbk) \text{ の（抽象群としての）表現} \iff G \text{ の（スキームとしての）表現} \tag{2.8}$$

であることに注意する（例えば [Jan, Part I, Section 2.8] を参照）．すると M は G の表現となる．従って，$L_G(\lambda)$ の既約性から $M = L_G(\lambda)$ でなくてはならず，結局 $L_G(\lambda)$ は半単純 G_r 表現になると分かった. □

注意 2.15.

一旦 M のような既約たちの和を考えるところがポイント．しかし，そこに G の $\Bbbk$-valued points $G(\Bbbk)$ を使っている．さらに (2.8) のような対応を用いる必要がある．他にも数パターンの証明方法があるが，知っている限りいずれも絶対既約性から代数閉体を一度経由している．

制限ウェイト $X_r(T)^+$ の定義 (2.6) を思い出しておく．次が key lemma となる：

補題 2.16.

任意の $\lambda \in X_r(T)^+$ に対して，G_r 表現として $L_G(\lambda) \cong L_{G_r}(\lambda)$.

Proof. フロベニウスの相互律から

$$0 \neq \mathsf{Hom}_{B_r^+}(\Bbbk^\lambda, L_G(\lambda)) \cong \mathsf{Hom}_{G_r}(M_{G_r}(\lambda), L_G(\lambda))$$

が成り立っているから，G_r 表現の全射準同型

$$\varphi : M_{G_r}(\lambda) \longrightarrow \mathsf{hy}(G_r).L_G(\lambda)^\lambda; \quad u \otimes_{\mathsf{hy}(B_r^+)} v \longmapsto u.v$$

を得る.

いま，像は補題 2.13 から $\mathsf{Image}(\varphi) = L_G(\lambda)$ となっているので，命題 2.14 より商 $M_{G_r}(\lambda)/\mathsf{Ker}(\varphi) \cong L_G(\lambda)$ は G_r 表現として半単純である．従って，ラジカルの性質から $\mathsf{rad}(M_{G_r}(\lambda)) \subset \mathsf{Ker}(\varphi)$ でなくてはならないので，

$$M_{G_r}(\lambda)/\mathsf{rad}(M_{G_r}(\lambda)) \twoheadrightarrow M_{G_r}(\lambda)/\mathsf{Ker}(\varphi) \cong L_G(\lambda)$$

となっている．一方で，命題 2.11 から $M_{G_r}(\lambda)/\mathsf{rad}(M_{G_r}(\lambda)) \cong L_{G_r}(\lambda)$ であるので，上の射は全単射である． □

命題 2.17.

任意の $\lambda \in X_r(T)^+$ と $\mu \in X(T)^+$ with $\lambda + p^r\mu \in X(T)^+$ に対して，G 表現として $L_G(\lambda + p^r\mu) \cong L_G(\lambda) \otimes L_G(\mu)^{[r]}$ が成り立つ．

Proof. はじめに，先ほどの補題 2.16 から G_r 表現として $L_G(\lambda) \cong L_{G_r}(\lambda)$ が成り立ち，$L_G(\lambda + p^r\mu) \supset L_{G_r}(\lambda + p^r\mu) \cong L_{G_r}(\lambda)$ である．よって，

$$H := \mathsf{Hom}_{G_r}\big(L_G(\lambda), L_G(\lambda + p^r\mu)\big) \neq 0$$

とわかる．この H は共役作用で G 表現となる．すると次は G-加群射となる．

$$\varphi : H \otimes L_G(\lambda) \longrightarrow L_G(\lambda + p^r\mu) ; \quad f \otimes v \longmapsto f(v).$$

いま $H \neq 0$ だったので $\varphi \neq 0$ とわかり，単純性からこれは全射であることが従う．

これが全単射であることをいうために，次元が同じであることを示す．命題 2.14 より $L(\lambda + p^r\mu)$ は G_r 表現として半単純であるので，シューアの補題より $\mathsf{dim}(H) \leqslant \mathsf{dim}\big(L_G(\lambda + p^r\mu)\big)/\mathsf{dim}\big(L_G(\lambda)\big)$ を得る．従って

$$\mathsf{dim}(H \otimes L_G(\lambda)) = \mathsf{dim}(H) \cdot \mathsf{dim}\big(L_G(\lambda)\big) \leqslant \mathsf{dim}\big(L_G(\lambda + p^r\mu)\big)$$

を得るので，φ の全射性からこれは一致．従って，次元が等しいので φ は全単射と分かった．

あとは $H = L_G(\mu)^{[r]}$ を示せばよい．既約表現は有限次元なので $H = (H^{[-r]})^{[r]}$ と書くことができる．従って，$H^{[-r]} \cong L_G(\mu)$ であればよい．同型

$$H \otimes L_G(\lambda) \cong L_G(\lambda + p^r\mu) \tag{2.9}$$

から H が既約であることが分かり，従って，制限表現の $H^{[-r]}$ もまた既約な G 表現．さらに，また同型 (2.9) から H の（最高）ウェイトは $p^r\mu$ でなくてはならないと分かるので，ウェイトと既約表現の一対一対応 (2.1) より，結局 $H^{[-r]} \cong L_G(\mu)$ と分かり主張は示された． □

この命題 2.17 と帰納法より，次の**スタインバーグのテンソル積定理**を得る．

定理 2.18.

ウェイト $\lambda \in X(T)^+$ を $\lambda = \lambda_0 + p\lambda_1 + \cdots + p^m\lambda_m$ with $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in X_{r=1}(T)^+$ と "p-進展開" して表示するとき，G 表現として

$$L_G(\lambda) \;\cong\; L_G(\lambda_0) \otimes L_G(\lambda_1)^{[1]} \otimes \cdots \otimes L_G(\lambda_m)^{[m]}$$

が成立する．

3 スーパーの場合のスタインバーグのテンソル積定理

非スーパーの場合は，考える対象としてルート・データでコントロールされる連結・分裂簡約代数群をとったのであった．スーパーの場合，考える対象として都合がよいのは [Ser] で提唱されたスーパー代数群 $\mathbf{G}$ のうち**準簡約スーパー群** (quasireductive supergroup) と呼ばれる，偶部 $\mathbf{G}_{\mathsf{ev}}$ が連結・分裂簡約代数群であるようなものをとる（正確には [Shi1, Definition 3.1] や [Shi2] をご覧ください）．ここで，$\mathbf{G}_{\mathsf{ev}}$ は $\mathbf{G}$ の "定義域" を可換代数 Alg の圏に制限したような通常の代数群である．対応する可換ホップ代数は商 $\mathcal{O}(\mathbf{G}_{\mathsf{ev}}) = \mathcal{O}(\mathbf{G})/(\mathcal{O}(\mathbf{G})_{\bar{1}})$ で与えられる．

以下，この準簡約スーパー群 $\mathbf{G}$ をとり固定する．

3.1 ルート系・トーラス・ボレル

定義から $\mathbf{G}_{\mathsf{ev}}$ は連結・分裂簡約代数群であるから，分裂極大トーラス $T \subset \mathbf{G}_{\mathsf{ev}}$ が存在するので，ひとつ固定し $X(T)$ をその指標群とする．非スーパーのときと同様にして T の共役作用により，リー・スーパー代数 $\mathfrak{g} := \mathsf{Lie}(\mathbf{G})$ がウェイト空間分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in X(T)\setminus\{\mathbf{0}\}} \mathfrak{g}^\alpha$ する（もちろん $\mathfrak{h} := \mathfrak{g}^{\alpha=\mathbf{0}}$ としている）．

このことから偶・奇のルート

$$\triangle_\epsilon := \{\alpha \in X(T) \mid \mathfrak{g}^\alpha \cap \mathfrak{g}_\epsilon \neq 0\} \setminus \{\mathbf{0}\}, \qquad \epsilon = \bar{0}, \bar{1}$$

を得る．便宜的に $\triangle := \triangle_{\bar{0}} \cup \triangle_{\bar{1}}$ if $\mathfrak{h}_{\bar{1}} = 0$ とし，$\triangle := \triangle_{\bar{0}} \cup \triangle_{\bar{1}} \cup \{\mathbf{0}\}$ if $\mathfrak{h}_{\bar{1}} \neq 0$ とする．さらに群準同型 $\Upsilon : \mathbb{Z}\triangle \to \mathbb{R}$ with $\Upsilon(\triangle \setminus \{\mathbf{0}\}) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ をとり固定するとき，

$$\triangle^\pm := \{\alpha \in \triangle \setminus \{\mathbf{0}\} \mid \pm\Upsilon(\alpha) > 0\}, \qquad \triangle_\epsilon^\pm := \triangle_\epsilon \cap \triangle^\pm, \qquad \epsilon = \bar{0}, \bar{1}$$

としてルート系 $\triangle$ に正負を入れる．

注意 3.1.

一般線型群のスーパー対応物である，一般線型スーパー群 $\mathbf{GL}(m|n)$（定義などはセクション 4 参照）の場合，ルート系 $\triangle$ は殆ど非スーパーの場合と同じようなものである．一方で，スーパー特有の queer スーパー群 $\mathbf{Q}(n)$（定義などは [BruKle, Bru] 参照，$n = 2$ のときは (3.4) 参照）の場合，$\mathfrak{h}_{\bar{1}} \neq 0$ なので $\mathbf{0} \in \triangle$ かつ $\triangle_{\bar{0}} = \triangle_{\bar{1}}$ をみたすなど，通常の意味でのルート系の性質をみたさない．さらに periplectic スーパー群 $\mathbf{P}(n)$（定義などは [Shi1] 参照）の場合，

$\triangle = \triangle_{\bar{0}} \sqcup \triangle_{\bar{1}}$ だが $\#\triangle_{\bar{0}} \neq \#\triangle_{\bar{1}}$ であったり，$-\triangle^+ \neq \triangle^-$ であったりする．ほかのスーパー群に関しては [FioGav] 参照．これらのことからスーパーの場合は “ルート系” とは便宜的な名であって，非スーパーのときのような良い挙動は期待できないことに注意する．

いまの $\mathbf{G}$ に対して，トーラス T を偶部に持つようなスーパー閉部分群 $\mathbf{T} \subset \mathbf{G}$ が構成でき，これを**スーパー・トーラス**と呼ぶ．構成から $\mathfrak{h} = \mathsf{Lie}(\mathbf{T})$ である．また，偶ルート系の正負 $\triangle_{\bar{0}} = \triangle_{\bar{0}}^- \cup \triangle_{\bar{0}}^+$ から得られるボレル部分群 $B^{\pm}$ を偶部に持つようなスーパー閉部分群 $\mathbf{B}^{\pm} \subset \mathbf{G}$ が構成でき，これを**スーパー・ボレル部分群**と呼ぶ．

3.2 フロベニウス核

フロベニウス核は非スーパーの時と同様にして，一般のスーパー代数群 $\mathbf{G}$ に対して定義できる．以下で，非負整数 r をとり固定する．

可換スーパー代数 R に対して，$R^{(r)}$ を，スーパー環としては $R^{(r)} = R$ でありスカラー倍が $c.a := c^{p^{-r}} a \ (c \in \Bbbk, a \in R)$ で与えられているものとする．この記号のもとで $\mathbf{G}^{(r)}(R) := \mathbf{G}(R^{(r)})$ とおき，射 $\mathsf{Fr}^r_{\mathbf{G}} : \mathbf{G} \to \mathbf{G}^{(r)}$ を

$$\mathsf{Fr}^r_{\mathbf{G}}(R) : \mathbf{G}(R) \longrightarrow \mathbf{G}^{(r)}(R) = \mathsf{SAlg}(\mathcal{O}(\mathbf{G}), R^{(r)}); \quad g \longmapsto (a \mapsto g(a^{p^r}))$$

で定義する．もちろん $\mathcal{O}(\mathbf{G})_{\bar{1}}$ の元は二乗するとゼロなので $\mathsf{Fr}^r_{\mathbf{G}} : \mathbf{G} \to \mathbf{G}_{\mathsf{ev}}$ であることに注意する．このとき核 $\mathbf{G}_r := \mathsf{Ker}(\mathsf{Fr}^r_{\mathbf{G}})$ を $\mathbf{G}$ の r**-フロベニウス核**という．増岡 [Mas3] によりフロベニウス核の構造は詳しく研究されている．

命題 3.2.
$(\mathbf{G}_{\mathsf{ev}})_r = (\mathbf{G}_r)_{\mathsf{ev}}$ かつ $\mathsf{Lie}(\mathbf{G}_r)_{\bar{1}} = \mathsf{Lie}(\mathbf{G})_{\bar{1}}$．特に $\mathsf{Lie}(\mathbf{G}_r) = \mathsf{Lie}(\mathbf{G})$ であり，$\mathcal{O}(\mathbf{G}_r)$ の次元は $p^{rn} \cdot 2^{n'}$．ここで $n := \dim(\mathsf{Lie}(\mathbf{G}_{\mathsf{ev}}))$, $n' := \dim(\mathsf{Lie}(\mathbf{G})_{\bar{1}})$.

非スーパーのときと同様にして，フロベニウス核による作用の引き戻しを考えることができるが，さらに $\mathbf{G}_{\mathsf{ev}}$ の話にすることができる．左 $\mathbf{G}_{\mathsf{ev}}$ 表現 V に対して（同値に，右 $\mathcal{O}(\mathbf{G}_{\mathsf{ev}})$-余加群に対して），$V_{\bar{0}} := V$ かつ $V_{\bar{1}} := 0$ とすることで V をスーパー・ベクトル空間とみたとき，$\mathsf{Fr}^r : \mathbf{G} \to \mathbf{G}_{\mathsf{ev}}$ によりこの V を左 $\mathbf{G}$-スーパー加群とみたものを $V^{[r]}$ と書くことにする．いま V の右 $\mathcal{O}(\mathbf{G}_{\mathsf{ev}})$-余加群構造を $v \mapsto \sum v_{(0)} \otimes v_{(1)}$ と表示すれば，$V^{[r]}$ の右 $\mathcal{O}(G)$-スーパー余加群構造は

$$v \longmapsto \sum v_{(0)} \otimes v_{(1)}^{p^r}$$

で与えられる．

もし左 $\mathbf{G}$-スーパー加群 M 上に $\mathbf{G}_r$ が自明に作用している場合，M は自然に左 $\mathbf{G}/\mathbf{G}_r$-スーパー加群とみなすことができる（スーパーの商については [MasZub1] などを参照）．この場合も $\mathcal{O}(\mathbf{G}/\mathbf{G}_r) \cong \{a^{p^r} \in \mathcal{O}(\mathbf{G}) \mid a \in \mathcal{O}(\mathbf{G})\}$ なので，さらに M を左 $\mathbf{G}_{\mathsf{ev}}$-加群とみることができる．これを $M^{[-r]}$ と書くことにすれば記号的に $(M^{[-r]})^{[r]} = M$ が成立する．いま M の右 $\mathcal{O}(\mathbf{G})$-

スーパー余加群構造を $m \mapsto \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$ と表示すれば，$M^{[-r]}$ の右 $\mathcal{O}(\mathbf{G}_{\mathsf{ev}})$-余加群構造は

$$m \longmapsto \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}^{p^{-r}}$$

と表示することができる．

注意 3.3.

非スーパーの場合は，フロベニウス核は全てユニモジュラー（両側積分をもつ）であることは良く知られている．スーパーの場合は [MasZub] で $\mathbf{GL}(m|n)$ が研究されていたが，一般の準簡約スーパー群 $\mathbf{G}$ に対して，そのフロベニウス核 $\mathbf{G}_r$ がユニモジュラーであるための必要十分条件をルートの言葉で明示的に書き下すことも出来ている [Shi3, Theorem 4.15]．特に，ユニモジュラーではないような具体例も作ることができる．

3.3 スーパー・トーラス $\mathbf{T}$ の既約表現

改めて $\mathbf{G}$ を準簡約スーパー群とする．非スーパーのときと同様にして $\mathbf{G}$ の既約表現はスーパー・トーラス $\mathbf{T}$ の既約表現から "持ち上げて" 構成することができる（Borel-Weil の方法）．そこでここでは $\mathbf{T}$ の既約表現の構成方法を確認する．

任意に $\lambda \in X(T)$ をとり固定する．このときスーパー対称性によって

$$b_\lambda : \mathfrak{h}_{\bar{1}} \times \mathfrak{h}_{\bar{1}} \longrightarrow \Bbbk; \qquad (x, y) \longmapsto \lambda([x, y]) \tag{3.1}$$

は対称な双線型形式となる．ここで $[\ ,\ ]$ はリースーパー代数 $\mathsf{Lie}(\mathbf{G})$ のスーパー・ブラケット．すると，付随してクリフォード代数

$$C(\mathfrak{h}_{\bar{1}}, b_\lambda) \ := \ T(\mathfrak{h}_{\bar{1}})/(xy + yx - b_\lambda(x, y) \mid x, y \in \mathfrak{h}_{\bar{1}})$$

が作れる．ここで $T(\mathfrak{h}_{\bar{1}})$ は $\mathfrak{h}_{\bar{1}}$ 上のテンソル代数．これは "項数" の偶奇により自然にスーパー代数となり，スーパー代数の同型

$$C(\mathfrak{h}_{\bar{1}}, b_\lambda) \ \cong \ \mathsf{hy}(\mathbf{T})^\lambda := \mathsf{hy}(\mathbf{T})/(\binom{H_i}{m} - \binom{\lambda(H_i)}{m} \mid 1 \leqslant i \leqslant \ell, m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$$

が成り立つ．ここで記号 H_i $(1 \leqslant i \leqslant \ell)$ はセクション 2.4 を参照．

一般にクリフォード・スーパー代数はパリティー交換と同型を除き，ただ一つの既約表現があるのだった（[Shi1, Appendix B]）．そこで，いまの $C(\mathfrak{h}_1, b_\lambda)$ の既約表現（= 単純スーパー加群）を $\mathfrak{u}(\lambda)$ とかくことにする．自然な全射 $\mathsf{hy}(\mathbf{T}) \to C(\mathfrak{h}_1, b_\lambda)$ でこれを $\mathsf{hy}(\mathbf{T})$-スーパー加群とみたとき，$\mathfrak{u}(\lambda)$ はさらに $\mathbf{T}$ の表現になる．この方法によって次がいえている（[Shi1, Proposition 4.4]）：

補題 3.4.

スーパー・トーラス $\mathbf{T}$ の既約表現は $\mathfrak{u}(\lambda)$ $(\lambda \in X(T))$ で尽くされる．

さらにパリティー交換 $\Pi(-)$ で，$\mathfrak{u}(\lambda) \cong \Pi\mathfrak{u}(\lambda)$ となる（つまり Q-type）か，否か（つまり M-type）の明示的な判定も出来ている．特に，$\mathbf{0} \notin \triangle$（同値に $T = \mathbf{T}$）の場合は，$\mathfrak{u}(\lambda) = \Bbbk^\lambda$ であり，すべて M-type である．

構成から T 表現として

$$\mathfrak{u}(\lambda) \cong (\Bbbk^\lambda)^{\oplus n_\lambda}, \qquad n_\lambda := \mathsf{dim}(\mathfrak{u}(\lambda))$$

である．もし $\Bbbk$ が代数閉体なら，次元は $n_\lambda = 2^{\mathsf{dim}(\mathfrak{h}_1) - \mathsf{dim}(\mathsf{rad}(b_\lambda))}$ と明示的に計算できる．

3.4 スーパー代数群 G の既約表現

後のストーリーは非スーパーのときと同様である．すなわち，各 $\lambda \in X(T)$ に対して，

$$H^0_{\mathbf{G}}(\lambda) \ := \ \mathsf{ind}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{B}^-}(\mathfrak{u}(\lambda)) \ = \ \mathfrak{u}(\lambda) \square_{\mathcal{O}(\mathbf{B}^-)} \mathcal{O}(\mathbf{G})$$

とおくとき，群演算から誘導される射 $\mathbf{B}^- \times \mathbf{B}^+ \to \mathbf{G}$ に対応するスーパー代数射 $\mathcal{O}(\mathbf{G}) \to \mathcal{O}(\mathbf{B}^-) \otimes \mathcal{O}(\mathbf{B}^+)$ が単射であることから，次が示せる（[Shi1, Theorem 4.12]）：

定理 3.5.

もし $H^0_{\mathbf{G}}(\lambda) \neq 0$ ならば，その $\mathbf{G}$-socle $L_{\mathbf{G}}(\lambda) := \mathsf{soc}_{\mathbf{G}}(H^0_{\mathbf{G}}(\lambda))$ は，最高ウェイトが λ の $\mathbf{G}$ の既約表現である．さらに λ-ウェイト空間は $L_{\mathbf{G}}(\lambda)^\lambda = \mathfrak{u}(\lambda)$ である．

またこれらが G の既約表現全体を尽くしていることも分かる．つまり

$$X(T)^\flat := \{\lambda \in X(T) \mid H^0_{\mathbf{G}}(\lambda) \neq 0\} \longrightarrow \{\mathbf{G} \text{ の既約表現 }\}/\cong; \quad \lambda \longmapsto L_{\mathbf{G}}(\lambda) \qquad (3.2)$$

は全単射である．コテンソルの挙動を調べることで，$X(T)^\flat \subset X(T)^+$ を示すことができる．すなわち $\lambda \in X(T)^\flat$ に対して，G の既約表現 $L_G(\lambda)$ を考えることができることに注意する．

注意 3.6.

今回の話に直接関係しないが，スーパー特有の話として，シューアの補題の扱いに気を付けなくてはならない．いま $\Bbbk$ を代数閉体とし，A をスーパー代数，L を既約 A-スーパー加群とする．このときパリティーを保つものを $\mathsf{End}_A(L)$ とかき，パリティー反転も許すものを $\underline{\mathsf{End}}_A(L)$ とかけば，

$$\underline{\mathsf{End}}_A(L) \cong \begin{cases} \Bbbk\, \mathsf{id}_L & \text{if } L \ncong \Pi L, \\ \Bbbk\, \mathsf{id}_L \oplus \Bbbk\, J_L & \text{if } L \cong \Pi L \end{cases}$$

となる．ここで J_L はパリティーをひっくり返すもの．

3.5 通常とスーパーの差異

スーパーの場合でも [MasShi1] によって事実 2.6，すなわち $\mathbf{G}$ 表現の圏と局所有限かつ良い T-ウェイト分解を持つ $\mathsf{hy}(\mathbf{G})$-加群圏が圏同値になることが示されている．従って，大枠ではセク

ション 2 で述べた非スーパーの場合と同じストーリーでスタインバーグのテンソル積定理が示せそうな予感がしてくる．ここでは，具体的に証明にあたってどの箇所で困難が出てくるか（以下に述べる 2 箇所）を先にまとめておく．

3.5.1 最初の困難

初めの困難として「絶対既約性はスーパーの場合常に成り立たない」という点があげられる．まず $\mathbf{0} \notin \triangle$ の場合は，すべての既約表現 $L_{\mathbf{G}}(\lambda)$ はパリティー交換 $\Pi(-)$ で同型にはならないことを知っており，$\underline{\mathsf{End}}_{\mathbf{G}}(L_{\mathbf{G}}(\lambda)) \cong \Bbbk$ を得る（注意 3.6 参照）．すると [Rac] が示した Jaobson density theorem（事実 2.3）のスーパー版が使えて，絶対既約性（定理 2.7）がそのまま成り立つ．

従って，$\mathbf{0} \in \triangle$ の場合にこれが成立するか否かをはっきりさせる必要がある．しかし次のセクション 3.6 で見るように，この場合は絶対既約性が成り立たない．そこで，次に考えることとして「絶対既約性を用いずに，直接に命題 2.14 が証明できないか」というのは自然である．実は残念ながら，これもセクション 3.7 で基礎体が代数閉でない場合は反例が作れてしまう．結論として $\mathbf{0} \in \triangle$ の場合は「基礎体は代数閉」と仮定せざるを得ないことになる．

3.5.2 次の困難

もう一つの困難として「スーパーの場合には単純ルートがうまく定まらない」という点があげられる．すでに注意 3.1 で述べた通り（例えば正負のルートがうまく挙動しない）であり，これはスーパー代数群に限った話ではなくリー・スーパー代数のレベルでもよく知られた事実である（[Kac]）．さらに奇ルート空間で次元が 2 以上になるような場合もある．スーパーは定義から，勝手な非スーパーの代数群（リー代数）が与えられたとき，奇部を偶部と独立に “ひっつけ” ておけばスーパー対象が構成できるので，奇ルートや空間は実際にはほとんど何でもほしいように作ることができる．従って，スーパー群の表現論を考察する際は，準簡約スーパー群のクラス（= 偶部のルート・データでコントロールできる）をさらにクラスを絞るのが自然である．

そこで，解決策としては偶および奇のルートがコントロールできるような，良い “単純ルート” をもつようなスーパー代数群のクラスを考察することにする．正確な定義は [Shi3, Definition 5.14] を参照．実は，その枠組みでセクション 2.4 で述べたこと（ハイパー代数の作用）を示すことができる．

3.5.3 その後のストーリー

これらの困難が解決できたら（許容的な適切な仮定を設けたら），ほとんど自然にスタインバーグのテンソル積定理のスーパー版を示すことができる．

例えば注意 2.15 で述べたように，一度 $\Bbbk$ rational points を考える箇所は，命題 3.2 から

$$\mathsf{hy}(\mathbf{G}) \ = \ \mathsf{hy}(\mathbf{G}_{\mathsf{ev}}) \text{ と } \mathsf{hy}(\mathbf{G}_r) \text{ でスーパー代数として生成される}$$

となっていることを使えばよい．実際に，命題 2.14 の証明に出てくる M もそのまま

$$M := \sum_{g \in \mathbf{G}_{\mathsf{ev}}(\Bbbk)} g.S \tag{3.3}$$

を考えればよく．基礎体の設定を $\mathbf{0} \in \triangle$ の場合に代数閉としておけば，この M が $\mathbf{G}_{\mathsf{ev}}$ の表現であることが従い，特に局所有限な T-ウェイト分解を持つ $\mathsf{hy}(\mathbf{G}_{\mathsf{ev}})$-加群であることが従う．その後に，$g.S$ が $\mathbf{G}_r$ の表現なので $\mathsf{hy}(\mathbf{G}_r)$-加群，つまり M が $\mathsf{hy}(\mathbf{G}_r)$-stable であることを示し，結局 M は局所有限な T-ウェイト分解を持つ $\mathsf{hy}(\mathbf{G})$-加群になることを証明して，事実 2.6 より $\mathbf{G}$ の表現となることがいえる．

詳細に関しては，非スーパーの場合と繰り返しになったりやや技術的な記述になったりするので，本稿では述べないことにして [Shi3] を参照していただきたい．以下のセクションでは，上記の困難のうち最初の「絶対既約性」に関連した箇所について見ていくことにする．

3.6 スーパーでは絶対既約にはならないものがある

セクションタイトルが紛らわしいが,「絶対（既約にならない）ものがある」ではなく「(絶対既約）にならないものがある」の意味である．

非スーパーのスタインバーグのテンソル積定理で必要だった命題 2.14 について，その証明で用いたように絶対既約性から「基礎体を代数閉体に取り換えれる」ということをしたのであった．ここでは，スーパーの場合に $\mathbf{G}$ の既約表現 $L_{\mathbf{G}}(\lambda)$ であって，体拡大で既約性が崩れるような例をあげる．

3.6.1 設定

基礎体 $\Bbbk$ として $x^2 = -1$ の解を持たないものをとり，$\Bbbk$ の体拡大として $\Bbbk' := \Bbbk[X]/(X^2+1)$ を考える．

この $\Bbbk$ 上の準簡約スーパー群 $\mathbf{G}$ として queer スーパー群 $\mathbf{Q}(2)$ を考える：

$$\mathbf{G}(R) = \mathbf{Q}(2)(R) = \{\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array}\right) \mid A \in \mathrm{GL}_2(R_{\bar{0}}), B \in \mathsf{Mat}_2(R_{\bar{1}})\}. \tag{3.4}$$

ここで $R = R_{\bar{0}} \oplus R_{\bar{1}}$ は $\Bbbk$ 上の可換スーパー代数．このとき極大トーラス T とスーパー・トーラス $\mathbf{T}$ は次のようになる（とる)．

$$T = \{\left(\begin{array}{cc|cc} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t' & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t' \end{array}\right) \mid t, t' \in R_{\bar{0}}^{\times}\} \subset \mathbf{T} = \{\left(\begin{array}{cc|cc} t & 0 & k & 0 \\ 0 & t' & 0 & k' \\ \hline -k & 0 & t & 0 \\ 0 & -k' & 0 & t' \end{array}\right) \mid t, t' \in R_{\bar{0}}^{\times}, k, k' \in R_{\bar{1}}\}.$$

そのスーパー・リー代数は次で与えられる．

$$\mathfrak{h} \ = \ \mathsf{Lie}(\mathbf{T}) \ = \ \{\left(\begin{array}{cc|cc} t & 0 & k & 0 \\ 0 & t' & 0 & k' \\ \hline k & 0 & t & 0 \\ 0 & k' & 0 & t' \end{array}\right) \mid t, t', k, k' \in \Bbbk\}$$

奇同士のブラケットは $K,F\in\mathfrak{h}_1$ に対し，次のように計算される：

$$[K,F] \;=\; KF+FK \;=\; 2\left(\begin{array}{cc|cc} kf & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k'f' & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & kf & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k'f' \end{array}\right),$$

$$\text{where}\quad K=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k' \\ \hline k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k' & 0 & 0 \end{array}\right),\quad F=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f' \\ \hline f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f' & 0 & 0 \end{array}\right).$$

いま $T\cong \mathrm{GL}_1\times\mathrm{GL}_1$ なので，λ_i を (i,i)-成分の射影として，加法的に

$$X(T)\cong\mathbb{Z}\lambda_1\oplus\mathbb{Z}\lambda_2$$

と基底表示をしておく．そこで，各 $\lambda=a\lambda_1+b\lambda_2$ $(a,b\in\mathbb{Z})$ に対して，(3.1) の対称双線型 b_λ を計算すれば，上の記号を用いて，

$$b_\lambda(K,F) \;=\; \lambda([K,F]) \;=\; 2(akf+bk'f') \tag{3.5}$$

となる．

3.6.2　既約表現のパラメータセット

一般に体拡大 $\Bbbk'/\Bbbk$ に対して，$\mathfrak{u}_{\Bbbk'}(\lambda)\subset\mathfrak{u}(\lambda)\otimes\Bbbk'$ であるから（左辺の記号は $\Bbbk'$ で構成した $T_{\Bbbk'}$ のウェイト λ の既約表現），包含 $H^0_{\mathbf{G}_{\Bbbk'}}(\lambda)\subset H^0_{\mathbf{G}}(\lambda)\otimes\Bbbk'$ があることに注意する．従って，$X(T)^\flat=\{\lambda\in X(T)\mid H^0_{\mathbf{G}}(\lambda)\neq 0\}$ であるから

$$X(T_{\Bbbk'})^\flat \;\subset\; X(T)^\flat$$

となっている．

いま $\overline{\Bbbk}$ を $\Bbbk$ の代数閉包とするとき，Brundan-Kleshchev [BruKle] によると，$\mathbf{G}_{\overline{\Bbbk}}$ の既約表現のパラメータセットは

$$X(T_{\overline{\Bbbk}})^\flat=\{a\lambda_1+b\lambda_2\in X(T)\mid a\geqslant b \text{ and } [a=b\Rightarrow p|a]\ \} \tag{3.6}$$

となるのであった（ここで $p=\mathsf{char}(\Bbbk)$ であったことを思い出す）．

3.6.3　絶対既約ではない既約表現の構成

いま，$\mathfrak{h}_1$ の基底を次のようにとる：

$$v:=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),\qquad w:=\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{3.7}$$

さらにウェイトとして

$$\lambda := \lambda_1 - 2\lambda_2 \tag{3.8}$$

をとる．すると (3.5) から

$$b_\lambda(v,v) = -1, \qquad b_\lambda(w,w) = -1, \qquad b_\lambda(v,w) = 0 = b_\lambda(w,v) \tag{3.9}$$

となる．

従って，この場合は

$$C(\mathfrak{h}_1, b_\lambda) \;=\; \left\langle \frac{-1,-1}{\Bbbk} \right\rangle \;:=\; \Bbbk\langle i,j\rangle/(i^2+1, j^2+1, ij+ji) \tag{3.10}$$

と，$\Bbbk$ 上のハミルトンの四元数代数となる．

補題 3.7.
ウェイト $\lambda = \lambda_1 - 2\lambda_2$ について．$\mathbf{T}$ の既約表現 $\mathfrak{u}(\lambda)$ は $\Bbbk$ 上 4 次元であり，$\mathbf{T}_{\Bbbk'}$ の既約表現 $\mathfrak{u}_{\Bbbk'}(\lambda)$ は $\Bbbk'$ 上 2 次元である．特に，$\mathfrak{u}(\lambda)\otimes\Bbbk' \supsetneq \mathfrak{u}_{\Bbbk'}(\lambda)$ となり，絶対既約にはならない．

Proof. 最初の主張は四元数代数が central simple であることを知っているので直接従う．一方で，次の主張は四元数代数の $\Bbbk' = \Bbbk[X]/(X^2+1) \cong \Bbbk 1 \oplus \Bbbk\sqrt{-1}$ への "複素化" が

$$\left\langle \frac{-1,-1}{\Bbbk} \right\rangle \otimes \Bbbk' \xrightarrow{\cong} \mathsf{Mat}_2(\Bbbk'); \qquad i,j \longmapsto \sqrt{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sqrt{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と，全行列環に一致することから従う． □

これらの既約表現たちから誘導される $\mathbf{G} = \mathbf{Q}(2)$ の既約表現でも同様にして体拡大を保たないことがいえる．その前に (3.6) から $\lambda = \lambda_1 - 2\lambda_2 \in X(T_{\overline{\Bbbk}})^\flat \subset X(T_{\Bbbk'})^\flat \subset X(T)^\flat$ なので，この λ をウェイトにもつ既約表現が考えられることに注意する．

命題 3.8.
ウェイト $\lambda = \lambda_1 - 2\lambda_2$ について，$L_{\mathbf{G}}(\lambda)\otimes\Bbbk' \supsetneq L_{\mathbf{G}_{\Bbbk'}}(\lambda)$.

Proof. 既約であることとウェイトを比較することによって，一般に包含

$$L_{\mathbf{G}}(\lambda)\otimes\Bbbk' \;\supset\; L_{\mathbf{G}_{\Bbbk'}}(\lambda)$$

はいつでも成立している．いま λ-ウェイト空間を見れば

$$(L_{\mathbf{G}}(\lambda)\otimes\Bbbk')^\lambda \;\cong\; L_{\mathbf{G}}(\lambda)^\lambda\otimes\Bbbk' \;\cong\; \mathfrak{u}(\lambda)\otimes\Bbbk'$$

となっているが，一方で，$L_{\mathbf{G}_{\Bbbk'}}(\lambda)^\lambda \cong \mathfrak{u}_{\Bbbk'}(\lambda)$ であるから，補題 3.7 によって $(L_{\mathbf{G}}(\lambda)\otimes\Bbbk')^\lambda \not\cong L_{\mathbf{G}_{\Bbbk'}}(\lambda)^\lambda$ となる．従って，$L_{\mathbf{G}}(\lambda)\otimes\Bbbk' \supsetneq L_{\mathbf{G}_{\Bbbk'}}(\lambda)$ となる． □

この結果によりスーパーの状況では，既約表現については一般に絶対既約性がないことが分かる．

3.7 代数閉体ではない場合は命題 2.14 は不成立

よく考えてみれば，絶対既約性（から示される系 2.8）を用いた箇所は「命題 2.14 の証明で基礎体を代数閉に取り替えてよい」という所だったので，もしかしたら代数閉でなくても直接に命題 2.14 を示すことができたらうれしい．しかし残念ながら，これが不可であることを以下で見ていく．やはり手ごろなスーパー群として，$\mathbf{G} = \mathbf{Q}(2)$ を考える．

3.7.1 ルート系の記号などの準備

この場合，ルート系は次のようにかける：

$$\triangle = \{\mathbf{0}\} \cup \{\pm\alpha = \pm(\lambda_1 - \lambda_2)\}, \qquad \triangle_{\bar{0}} = \triangle_{\bar{1}} = \{\pm\alpha\}.$$

そして，リー・スーパー代数 $\mathfrak{g} = \mathsf{Lie}(\mathbf{G})$ の基底として

$$X_\alpha := \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad X_{-\alpha} := \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

$$H_1 := \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad H_2 := \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$Y_\alpha := \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad Y_{-\alpha} := \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$K_1 := \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad K_2 := \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

をとることによって，

$$\mathfrak{g}_{\bar{0}}^{\pm\alpha} = \Bbbk X_{\pm\alpha}, \quad \mathfrak{g}_{\bar{1}}^{\pm\alpha} = \Bbbk Y_{\pm\alpha}, \quad \mathfrak{h}_{\bar{0}} = \Bbbk H_1 \oplus \Bbbk H_2, \quad \mathfrak{h}_{\bar{1}} = \Bbbk K_1 \oplus \Bbbk K_2$$

となっている．

また，$\mathbf{G}_r$ のハイパー代数 $\mathsf{hy}(\mathbf{G}_r)$ は（命題 3.2 より）

$$X_\alpha^{(n_\alpha)}, \quad X_{-\alpha}^{(n_{-\alpha})}, \quad \binom{H_1}{m_1}, \quad \binom{H_2}{m_2}, \quad Y_\alpha^{\epsilon_\alpha}, \quad Y_{-\alpha}^{\epsilon_{-\alpha}}, \quad K_1^{\epsilon_1}, \quad K_2^{\epsilon_2},$$

$$0 \leqslant n_\alpha, n_{-\alpha}, m_1, m_2 \leqslant p^r - 1, \quad \epsilon_\alpha, \epsilon_{-\alpha}, \epsilon_1, \epsilon_2 \in \{0, 1\}$$

らの PBW-like 単項式が基底をなすのであった．奇元との交換法則は例えば

$$Y_\alpha X_{-\alpha}^{(n)} = X_{-\alpha}^{(n)} Y_\alpha + X_{-\alpha}^{(n-1)}(K_1 - K_2) - (n-1)X_{-\alpha}^{(n-1)} \tag{3.11}$$

などと計算することが可能である．

3.7.2 baby Verma 加群の表示

ウェイトが入っている入っていないを考えなくてはならないので，基礎体の標数 p や r を設定する必要がある．以下のように設定しておく：

$$\sqrt{-1} \notin \Bbbk, \qquad p = \mathsf{char}(\Bbbk) = 3, \qquad r = 2.$$

ウェイトとしてセクション 3.6.3 の $\lambda := \lambda_1 - 2\lambda_2$ をとると，$\lambda \in X(T)^\flat$ であり，$\alpha = \lambda_1 - \lambda_2 \in \triangle_{\bar{0}}$ だったので，

$$\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \;=\; 1+2 \;=\; 3 \;\leqslant\; 3^2 - 1 \quad \therefore \quad \lambda \in X_{r=2}(T)^\flat$$

とわかる．

このとき $L_{\mathbf{G}}(\lambda)^\lambda = \mathfrak{u}(\lambda)$ はクリフォード（スーパー）代数そのものとしてとって良いのだった（セクション 3.6.3 参照）．もっと

$$\mathsf{hy}(\mathbf{T})^\lambda \;=\; \Bbbk\langle K_1, K_2\rangle / (K_1^2 - K_2^2, K_1^2 + 1, K_1K_2 + K_2K_1)$$

として $\mathsf{hy}(\mathbf{T})$ の部分スーパー代数として考えてよい．ただし H_1, H_2 の作用は λ を通したものである．すると，$\mathsf{hy}(\mathbf{G}_r).L_{\mathbf{G}}(\lambda)^\lambda$ は作用の定義から，$\mathsf{hy}(\mathbf{G})$ の中で考えてよい．

いま

$$M_{\mathbf{G}_r}(\lambda) \;:=\; \mathsf{hy}(\mathbf{G}_r) \otimes_{\mathsf{hy}(\mathbf{B}_r^+)} \mathfrak{u}(\lambda)$$

は，$\mathsf{hy}(\mathbf{G}_r) \cong \mathsf{hy}(\mathbf{U}_r^-) \otimes \mathsf{hy}(\mathbf{B}_r^+)$ である（ここで $\mathbf{U}_r^-$ は $\mathbf{B}_r^- = \langle \mathbf{U}_r^-, \mathbf{T}_r \rangle$ なるユニポテントである）ことと，$\mathsf{hy}(\mathbf{G}_r)$ の PBW 基底は知っている（命題 3.2）ことから，上記同一視によって

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{G}_r}(\lambda) &\cong \mathsf{hy}(\mathbf{U}_r^-) \otimes L_{\mathbf{G}}(\lambda)^\lambda \\ &= \{ Y_{-\alpha}^\epsilon X_{-\alpha}^{(n)} \otimes (a1 + bK_1 + cK_2 + dK_1K_2) \mid \epsilon \in \{0,1\}, 0 \leqslant n \leqslant 8, a,b,c,d \in \Bbbk \} \end{aligned} \tag{3.12}$$

となっていることに注意する．

3.7.3 命題 2.14（のスーパー版）を仮定し $M_{\mathbf{G}_r}(\lambda)$ が既約であることをいう

さて補題 2.16 で考えた写像

$$\varphi : M_{\mathbf{G}_r}(\lambda) \longrightarrow \mathsf{hy}(\mathbf{G}_r).L_{\mathbf{G}}(\lambda)^\lambda; \qquad u \otimes_{\mathsf{hy}(\mathbf{B}_r^+)} v \longmapsto u.v$$

について．先ほど (3.12) で書き下した $M_{\mathbf{G}_r}(\lambda)$ の形と PBW 基底の表示から，この φ は単射でなくてはならない．

例 3.9.

例えば

$$\varphi(Y_{-\alpha}^{\epsilon}X_{-\alpha}^{(n)}\otimes(bK_1+cK_2))=bY_{-\alpha}^{\epsilon}X_{-\alpha}^{(n)}K_1+cY_{-\alpha}^{\epsilon}X_{-\alpha}^{(n)}K_2$$

のような基底を並べた形に過ぎない．

従って，$\mathsf{Ker}(\varphi)=0$ でなくてはならないので，同型

$$M_{\mathbf{G}_r}(\lambda)\ =\ M_{\mathbf{G}_r}(\lambda)/\mathsf{Ker}(\varphi)\ \cong\ \mathsf{hy}(\mathbf{G}_r).L_{\mathbf{G}}(\lambda)^{\lambda}$$

となる．

ここで命題 2.14 の結果（のスーパー版）が真であると仮定して，もし $L_{\mathbf{G}}(\lambda)$ が $\mathbf{G}_r$ 表現として半単純なら，これは $\mathrm{rad}(M_{\mathbf{G}_r}(\lambda))=0$ を意味する．他方で，命題 2.11（これはスーパーでも成立している）から $L_{\mathbf{G}_r}(\lambda)=M_{\mathbf{G}_r}(\lambda)/\mathrm{rad}(M_{\mathbf{G}_r}(\lambda))$ を知っているので，以上のことから

$$\text{命題 2.14（のスーパー版）}\quad\Longrightarrow\quad M_{\mathbf{G}_r}(\lambda)=L_{\mathbf{G}_r}(\lambda)$$

となる．特に $M_{\mathbf{G}_r}(\lambda)$ は単純でなくてはならない．

注意 3.10.

これだけではなく，補題 2.16（のスーパー版）の結論からだけでも

$$\mathbf{G}_r\ \text{表現として}\ L_{\mathbf{G}}(\lambda)\cong L_{\mathbf{G}_r}(\lambda)\quad\Longrightarrow\quad M_{\mathbf{G}_r}(\lambda)=L_{\mathbf{G}_r}(\lambda)$$

が言える．実際，

$$\varphi:M_{\mathbf{G}_r}(\lambda)\longrightarrow\mathsf{hy}(\mathbf{G}_r).L_{\mathbf{G}}(\lambda)^{\lambda}\ =\ L_{\mathbf{G}}(\lambda)=L_{\mathbf{G}_r}(\lambda)$$

となり，これは単射だったから，$M_{\mathbf{G}_r}(\lambda)\cong L_{\mathbf{G}_r}(\lambda)$ を得る．

3.7.4　しかし $M_{\mathbf{G}_r}(\lambda)$ は既約ではないので矛盾

他方で $M_r(\lambda)$ には真部分スーパー加群があることが以下のようにしてわかり，既約ではないことが示される．

おもむろに

$$V\ :=\ \Bbbk X_{-\alpha}^{(4)}(K_1-K_2-4)\otimes_{\mathsf{hy}(\mathbf{B}_r^+)}L_{\mathbf{G}}(\lambda)^{\lambda}\quad\subset\ M_{\mathbf{G}_r}(\lambda)$$

を考えてみる．もしこれが「最高 “ベクトル”」なら（いま $\mathsf{dim}(L_{\mathbf{G}}(\lambda)^{\lambda})\geqslant 1$ なので，一般にこれは 1 元のスパンとは限らず空間になっているので言葉として不適切な場合があるが），$0\neq\mathsf{hy}(\mathbf{G}_r).V\subsetneq M_r(\lambda)$ となるから真部分加群が構成されたことになる．

この V が「最高 “ベクトル”」であることを示すには，任意の $X_{\alpha}^{(n)},Y_{\alpha}\in\mathsf{hy}(\mathbf{G}_r)$ との積

(1) $\Bbbk X_{\alpha}^{(n)}X_{-\alpha}^{(4)}(K_1-K_2-4)\otimes_{\mathsf{hy}(\mathbf{B}_r^+)}L_{\mathbf{G}}(\lambda)^{\lambda}$,

(2) $\Bbbk Y_{\alpha}X_{-\alpha}^{(4)}(K_1-K_2-4)\otimes_{\mathsf{hy}(\mathbf{B}_r^+)}L_{\mathbf{G}}(\lambda)^{\lambda}$,

がいずれもゼロ空間になれば良い．以下でこれを示す．

はじめに (1) のほうを示す．すでに示した非スーパーの場合の補題 2.12 を用いる．まず $K_1 - K_2 - 4$ がウェイトゼロであることに注意する．次に計算により

$$\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle + 1 \;=\; 3 + 1 \;=\; 4$$

であることがわかる．従って，$X_{-\alpha}^{(4)}(K_1 - K_2 - 4) \otimes_{\mathsf{hy}(\mathbf{B}_r^+)} L_{\mathbf{G}}(\lambda)^\lambda$ が補題 2.12 から最高ベクトルになることがわかった．

次に (2) のほうを示す．交換法則 (3.11) から

$$\begin{aligned} Y_\alpha X_{-\alpha}^{(4)}(K_1 - K_2 - 4) &= Y_\alpha(-X_{-\alpha}^{(5)} Y_\alpha + Y_\alpha X_{-\alpha}^{(5)}) \\ &= -Y_\alpha X_{-\alpha}^{(5)} Y_\alpha \end{aligned}$$

を得る．ここで最後の等号は，具体的な計算により $Y_\alpha^2 = \frac{1}{2}[Y_\alpha, Y_\alpha] = O$ が言えていることに注意する．すると，

$$\begin{aligned} &\Bbbk Y_\alpha X_{-\alpha}^{(4)}(K_1 - K_2 - 4) \otimes_{\mathsf{hy}(\mathbf{B}_r^+)} L_{\mathbf{G}}(\lambda)^\lambda \\ &= \Bbbk Y_\alpha X_{-\alpha}^{(5)} Y_\alpha \otimes_{\mathsf{hy}(\mathbf{B}_r^+)} L_{\mathbf{G}}(\lambda)^\lambda \\ &= \Bbbk Y_\alpha X_{-\alpha}^{(5)} \otimes_{\mathsf{hy}(\mathbf{B}_r^+)} Y_\alpha . L_{\mathbf{G}}(\lambda)^\lambda \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる．ここで最後の等号は $L_{\mathbf{G}}(\lambda)^\lambda$ が最高 “ベクトル” なので従う．より正確には，$L_{\mathbf{G}}(\lambda)^\lambda \cong \mathfrak{u}(\lambda)$ には $\mathbf{U}_r^+$ の作用を自明に入れているから．

3.7.5　結論

以上のことから，このウェイト（や基礎体の設定）のときは一般に $M_{\mathbf{G}_r}(\lambda)$ は既約ではないが，命題 2.14 あるいは補題 2.16（のスーパー版）が真であると仮定したら $M_{\mathbf{G}_r}(\lambda)$ が既約であることが出てくる．従って，「代数閉でなくても直接に命題 2.14 を示すこと」は，少なくとも $\mathbf{Q}(2)$ の場合は不可能であることがわかった．

実は，このようなスーパー・トーラス $\mathbf{T}$ がトーラス T より真に大きい場合（つまり $\mathbf{0} \in \triangle$）には，基礎体が代数閉であると仮定すれば，少し技術的になるがこの障壁を乗り越えることが可能であることが分かった．詳細は [Shi3] をご覧ください．

4 Appendix: 一般線型スーパー群まとめ

ここでは良く知られているが，直接確認するとやや面倒な一般線型スーパー群の基本事項（群をなすこと，Ber の乗法性）についてまとめる．

以下では $\Bbbk$ を基礎環とし，単位的かつ可換かつ $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$ と仮定する．可換スーパー代数 $R = R_{\bar 0} \oplus R_{\bar 1}$ に対して，ブロック行列からなる空間

$$\mathrm{Mat}_{m|n}(R) := \{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in \mathrm{Mat}_{m+n}(R) \mid \begin{array}{l} A \in \mathrm{Mat}_m(R_{\bar 0}), D \in \mathrm{Mat}_n(R_{\bar 0}), \\ B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(R_{\bar 1}), C \in \mathrm{Mat}_{n,m}(R_{\bar 1}) \end{array} \}$$

には自然な "行列の積" が（もちろん成分が非可換なので注意しないといけないが）

$$(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant r} \cdot (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant r} := (\sum_{k=1}^{r} a_{i,k} b_{k,j})_{1\leqslant i,j\leqslant r}, \qquad r := m+n \tag{4.1}$$

と，おとなしい順序で入る．これが結合律をみたすのは明らかであり，単位行列 E_{m+n} が単位元になる．この積で $\mathrm{Mat}_{m|n}(R)$ はスーパー代数をなし，**行列スーパー代数**というのだった．

4.1 一般線型スーパー群の定義と性質

スーパー $\Bbbk$-加群 $V = V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}$ をとり固定する．可換スーパー代数 $R = R_{\bar 0} \oplus R_{\bar 1}$ に対して，テンソル積 $V \otimes R$ のパリティーは $(V \otimes R)_{\bar i} = \bigoplus_{\bar k + \bar \ell = \bar i} V_{\bar k} \otimes R_{\bar \ell}$ ($\bar i \in \{\bar 0, \bar 1\}$) であった．このとき

$$\begin{aligned} \mathbf{GL}_V(R) &:= \underline{\mathrm{Aut}}_R(V \otimes R) \\ &:= \{ f : V \otimes R \xrightarrow{\cong} V \otimes R \mid f \text{ はパリティーを保つ，右 } R\text{-加群同型射} \} \end{aligned}$$

の元は合成で群をなす．この様にして群関手 $\mathbf{GL}_V : \mathrm{SAlg}_{\Bbbk} \to \mathrm{Grp}$ を得る．これを V 上の**一般線型スーパー群**という．

行列で実現するために，V が自由有限であると仮定し，以下のように基底をとり固定する：

$$V_{\bar 0} = \bigoplus_{k=1}^{m} \Bbbk v_k, \qquad V_{\bar 1} = \bigoplus_{\ell=1}^{n} \Bbbk w_\ell.$$

このときパリティーを保つということから，各 $f \in \mathbf{GL}_V(R)$ に対して，$f(v_k \otimes 1) \in (V \otimes R)_{\bar 0}$ かつ $f(w_\ell \otimes 1) \in (V \otimes R)_{\bar 1}$ である．従って，適当なスカラー $r_{k',k}, u_{\ell',\ell} \in R_{\bar 0}$ and $s_{\ell',k}, t_{k',\ell} \in R_{\bar 1}$ が存在して

$$f(v_k \otimes 1) = \sum_{k'=1}^{m} v_{k'} \otimes r_{k',k} + \sum_{\ell'=1}^{n} w_{\ell'} \otimes s_{\ell',k}, \quad f(w_\ell \otimes 1) = \sum_{k'=1}^{m} v_{k'} \otimes t_{k',\ell} + \sum_{\ell'=1}^{n} w_{\ell'} \otimes u_{\ell',\ell}$$

と表示することができる．この様にして f の表現行列が得られ，次のような写像を得る：

$$\mathbf{GL}_V(R) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m|n}(R); \quad f \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} {}^{\mathsf t}(r_{k',k})_{1\leqslant k',k\leqslant m} & {}^{\mathsf t}(t_{k',\ell})_{1\leqslant k'\leqslant m, 1\leqslant \ell\leqslant n} \\ \hline {}^{\mathsf t}(s_{\ell',k})_{1\leqslant \ell'\leqslant n, 1\leqslant k\leqslant m} & {}^{\mathsf t}(u_{\ell',\ell})_{1\leqslant \ell',\ell\leqslant n} \end{array}\right). \tag{4.2}$$

ここで，${}^{\mathrm{t}}(-)$ は転置.

これの "image" を知ること（つまり行列たちの集まりとして $\mathbf{GL}_V$ を扱うこと）が以下での目標となる.

4.1.1 先に結果から

各 $m, n \in \mathbb{N}_0$ with $m+n \neq 0$ に対して，次の関手 $\mathbf{GL}_{m|n} : \mathsf{SAlg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Set}$ について考察する[1)]：

$$\mathbf{GL}_{m|n}(R) := \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \in \mathsf{Mat}_{m+n}(R) \;\middle|\; \begin{array}{l} A \in \mathrm{GL}_m(R_{\bar{0}}), D \in \mathrm{GL}_n(R_{\bar{0}}), \\ B \in \mathsf{Mat}_{m,n}(R_{\bar{1}}), C \in \mathsf{Mat}_{n,m}(R_{\bar{1}}) \end{array} \right\}.$$

ここで R は可換スーパー代数.

以下で，この $\mathbf{GL}_{m|n}(R)$ が (4.1) の "行列の積" に関して群をなす，つまり $\mathbf{GL}_{m|n}$ が群関手 $\mathbf{GL}_{m|n} : \mathsf{SAlg}_{\Bbbk} \to \mathsf{Grp}$ であることをいう.

その後に $\mathsf{Mat}_{m|n}(R)$ の可逆元全体の集合 $\mathsf{Mat}_{m|n}(R)^{\times}$ がこの $\mathbf{GL}_{m|n}(R)$ と一致することを見れば，射 (4.2) によって群関手の同型

$$\mathbf{GL}_V \xrightarrow{\cong} \mathbf{GL}_{m|n}$$

が誘導されることが分かる．ここで V は有限自由で $\mathsf{rank}(V_{\bar{0}}) = m, \mathsf{rank}(V_{\bar{1}}) = n$ をみたすスーパー $\Bbbk$-加群.

4.1.2 $\mathbf{GL}_{m|n}(R)$ は演算で閉

ここでは $\mathbf{GL}_{m|n}(R)$ が行列の積で閉じていること，つまり次を示す：

$$\forall \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array} \right) \in \mathbf{GL}_{m|n}(R), \qquad \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array} \right) \in \mathbf{GL}_{m|n}(R).$$

気にしているのは積の対角成分に関して，次が言えているかどうかである：

$$AX + BZ \in \mathrm{GL}_m(R_{\bar{0}}) \quad \& \quad CY + DW \in \mathrm{GL}_n(R_{\bar{0}}).$$

これを示すためには（証明を辿れば）片方の条件だけチェックすれば十分と分かる．そこで $T := AX + BZ \in \mathrm{GL}_m(R_{\bar{0}})$ とおき，これに集中する．仮定から $A, X \in \mathrm{GL}_m(R_{\bar{0}})$ なので，AX が可逆であることに注意すれば

$$T(AX)^{-1} = AX(AX)^{-1} + BZ(AX)^{-1} = E_m + BZX^{-1}A^{-1}$$

と変形できることに注意する．このことから，簡単のため $U := BZX^{-1}A^{-1}$ ($\in \mathsf{Mat}_m(R_{\bar{0}})$) とおくとき，最右辺の $E_m + U$ が可逆ならば，T も可逆と分かり演算で閉が示されたことになる.

---

1) 本文では $\mathbf{GL}(m|n)$ と表記したが（論文でもよくこう書かれる），ここでは関手の記号が煩雑にならないように $\mathbf{GL}_{m|n}$ と書いておく.

補題 4.1.

この U はベキ零行列．すなわち，ある自然数 ℓ が存在して $U^{\ell+1}=O$ となる．

Proof. 成分表示で $A^{-1}=(a^{i,j})_{i,j}, B=(b_{i,j})_{i,j}, X^{-1}=(x^{i,j})_{i,j}, Z=(z_{i,j})_{i,j}$ 書いておくことにする．すると知りたかった行列は

$$U=BZX^{-1}A^{-1}=(\sum_{k_1,k_2,k_3} b_{i,k_1}z_{k_1,k_2}x^{k_2,k_3}a^{k_3,j})_{i,j}$$

となっている．各成分 $u_{i,j}:=\sum_{k_1,k_2,k_3} b_{i,k_1}z_{k_1,k_2}x^{k_2,k_3}a^{k_3,j}$ の二乗は

$$\begin{aligned}
u_{i,j}^2 &= \sum_{k_1,k_2,k_3}\sum_{k_1',k_2',k_3'} b_{i,k_1}z_{k_1,k_2}x^{k_2,k_3}a^{k_3,j}\cdot b_{i,k_1'}z_{k_1',k_2'}x^{k_2',k_3'}a^{k_3',j}\\
&= -\sum_{k_1,k_2,k_3}\sum_{k_1',k_2',k_3'} b_{i,k_1}b_{i,k_1'}z_{k_1,k_2}z_{k_1',k_2'}\cdot x^{k_2,k_3}a^{k_3,j}x^{k_2',k_3'}a^{k_3',j}
\end{aligned}$$

と計算される．いま b,z たちは odd 元であるから $b_{i,k_1}^2=z_{k_1,k_2}^2=0$ であることに注意する．

行列 U のサイズは m だから，高々 $m+1$ 乗すれば，$u_{i,j}^{m+1}$ では b,z たちが重複しだすので，先程の注意よりそれらはゼロ，つまり $u_{i,j}^{m+1}=0$ とわかる．

さて，当たり前だが行列はべき乗したら

$$U^\ell=(\sum_{k_1,\dots,k_\ell} u_{i,k_1}\cdots u_{k_\ell,j})_{i,j}$$

と，u たちがどんどん増えていく（ℓ 個）．よって，U^{m^2+1} すると u たちが重複しだす．

以上の事から，最低でも $(U^{m^2+1})^{m+1}$ を考えればよい． □

例 4.2.

例えば形式的に "可換" な（本当はひっくり返してマイナスをはくが，ゼロか否かが知りたいから）元たち a,b,c,e,d,f,g,h with $a^2=b^2=c^2=d^2=e^2=f^2=g^2=h^2=0$ に対して，サイズが $m=2$ のときを考えてみる．行列

$$U=\begin{pmatrix} a+e & b+f\\ c+g & d+h\end{pmatrix}$$

をべき乗していくと，

$$\begin{aligned}
U^2 &= \begin{pmatrix} a^2+bc+2ae+e^2+cf+bg+fg & ab+bd+be+af+df+ef+bh+fh\\ ac+cd+ce+ag+dg+eg+ch+gh & bc+d^2+cf+bg+fg+2dh+h^2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} bc+2ae+cf+bg+fg & ab+bd+be+af+df+ef+bh+fh\\ ac+cd+ce+ag+dg+eg+ch+gh & bc+cf+bg+fg+2dh\end{pmatrix}\\
&\ \vdots\\
U^7 &= \begin{pmatrix} 96abcdefg+72abcdfgh+72bcdefgh & 72abcdefh+72abdefgh\\ 72abcdegh+72acdefgh & 72abcdefg+96abcdfgh+72abcefgh+96bcdefgh\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$U^8 = \begin{pmatrix} 288abcdefgh & 0 \\ 0 & 288abcdefgh \end{pmatrix}$$
$$U^9 = 0$$

となる（もしかしたらマイナスが出てきて U^8 でゼロかもしれないが）．もちろん $(m^2+1)(m+1) = 5 \times 3 = 15$ はこの場合はやりすぎである．

従って，十分大きな ℓ で $U^{\ell+1} = O$ となるので，

$$(E_m + U)(E_m - U + U^2 - U^3 + \cdots + (-1)^\ell U^\ell) = E_m + (-1)^\ell U^{\ell+1} = E_m$$

となる．従って，$E_m + U = T(AX)^{-1}$ は正則，つまり

$$AX + BZ \in \mathrm{GL}_m(R_{\bar{0}})$$

が示された．

以上の事から，$\mathbf{GL}_{m|n}(R)$ が演算で閉じていることは OK.

注意 4.3.

可換環 A だったら，$\forall u \in A^\times, \forall x \in \mathsf{nil}(A)$ に対して $u + x \in A^\times$ はたやすい．実際，$x^{n+1} = 0$ とかいておくと $(u+x)u^{-1}(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n) = 1 + (-1)^n u^{-1} x^{n+1} = 1$ となる（もちろん逆からの積も）．しかし，いまの行列の場合は，非可換なのでこれは使えない．実際に，体成分の行列では不可能．次の簡単な例を参照：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.1.3　$\mathbf{GL}_{m|n}(R)$ は逆元で閉

ここでは任意の

$$P = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in \mathbf{GL}_{m|n}(R),$$

に対して，P が可逆であることをいう．ブロック行列の逆行列だからちょっと厄介である．

まずは，$A \in \mathrm{GL}_m(R_{\bar{0}})$ に注意して，次の変形に着目する．

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_m & O \\ \hline CA^{-1} & E_n \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & D - CA^{-1}B \end{array}\right)$$

すると P が可逆であるためには，右の行列の右下の成分 $D - CA^{-1}B$ が可逆であればよい．いま $D \in \mathrm{GL}_n(R_{\bar{0}})$ でもあるから，

$$(D - CA^{-1}B)D^{-1} = E_n - CA^{-1}BD^{-1}$$

と変形が可能である．

先程の積閉のところの補題 4.1 の議論と同じくして，$CA^{-1}BD^{-1}$ の所に odd 元があるからベキ零であると分かる．従って $E_n - CA^{-1}BD^{-1}$ は §4.1.2 の議論と同じくして正則である．よって，P が可逆と分かり，逆元でも閉がいえた．

具体的な逆行列を求めてみる．簡単のために $U := CA^{-1}BD^{-1}$ とおき，ベキ零性から $U^{\ell+1} = O$ とかいておく．このとき

$$D - CA^{-1}B = (E_n - CA^{-1}BD^{-1})D = (E_n - U)D$$

だから，

$$(D - CA^{-1}B)^{-1} = D^{-1}(E_n - U)^{-1} = D^{-1}(E_n + U + \cdots + U^{\ell}).$$

この記号のもとで P の逆行列は

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)^{-1} &= \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ \hline O & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} E_m & O \\ \hline -CA^{-1} & E_n \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1}(E_n + U + \cdots + U^{\ell}) \\ \hline O & D^{-1}(E_n + U + \cdots + U^{\ell}) \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} E_m & O \\ \hline -CA^{-1} & E_n \end{array}\right)\end{aligned}$$

と明示的に表示することができる．

例 4.4.

例えば $m = n = 1$ のとき．

$$\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right) \in \mathbf{GL}_{1|1}(R)$$

について．一瞬だけこれが普通の行列だと思えば，

$$\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right)^{-1} \quad \text{“=”} \quad (ad-bc)^{-1}\left(\begin{array}{c|c} d & -b \\ \hline -c & a \end{array}\right)$$

という形を得る（もちろん “行列式” は非可換なので慎重に考えるべきだが）．いま

$$ad - bc = ad(1 - d^{-1}a^{-1}bc) \quad \& \quad (1 - d^{-1}a^{-1}bc)(1 + d^{-1}a^{-1}bc) = 1 + (d^{-1}a^{-1}bc)^2 = 1$$

に着目すれば，次の行列が逆行列候補と予想できる：

$$\begin{aligned}(1 + d^{-1}a^{-1}bc)(ad)^{-1}\left(\begin{array}{c|c} d & -b \\ \hline -c & a \end{array}\right) &= (a^{-1}d^{-1} + a^{-2}d^{-2}bc)\left(\begin{array}{c|c} d & -b \\ \hline -c & a \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} a^{-1} + a^{-2}bcd^{-1} & -a^{-1}bd^{-1} \\ \hline -a^{-1}cd^{-1} & d^{-1} + a^{-1}bcd^{-2} \end{array}\right).\end{aligned}$$

実際にやってみると，

$$\begin{aligned}&\left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} a^{-1} + a^{-2}bcd^{-1} & -a^{-1}bd^{-1} \\ \hline -a^{-1}cd^{-1} & d^{-1} + a^{-1}bcd^{-2} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 1 + a^{-1}bcd^{-1} - ba^{-1}cd^{-1} & -bd^{-1} + bd^{-1} + ba^{-1}bcd^{-2} \\ \hline ca^{-1} + ca^{-2}bcd^{-1} - da^{-1}cd^{-1} & -ca^{-1}bd^{-1} + 1 + da^{-1}bcd^{-2} \end{array}\right)\end{aligned}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

となるので（逆側からの積も計算すれば）たしかに逆行列になっている．

4.1.4 $\mathbf{GL}_V(R) \cong \mathbf{GL}_{m|n}(R)$ であること

最後に $\mathsf{Mat}_{m|n}(R)^\times \cong \mathbf{GL}_{m|n}(R)$ を示す．そのために

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in \mathsf{Mat}_{m|n}(R), \qquad \begin{array}{l} A \in \mathsf{Mat}_m(R_{\bar 0}), D \in \mathsf{Mat}_n(R_{\bar 0}), \\ B \in \mathsf{Mat}_{m,n}(R_{\bar 1}), C \in \mathsf{Mat}_{n,m}(R_{\bar 1}) \end{array}$$

が可逆だったとする．つまり

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & W \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} E_m & O \\ \hline O & E_n \end{array}\right)$$

となっているとする．

このとき，$AX = E_m - BZ$ かつ $DW = E_n - CY$ が成り立っている．いままでの議論と同様にして BZ, CY が odd 元からなっているのでベキ零である．よって AX, DW は正則と分かり，A, D も正則と分かる．

以上の議論から次が示された：

命題 4.5.

$$P = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in \mathsf{Mat}_{m|n}(R), \qquad \begin{array}{l} A \in \mathsf{Mat}_m(R_{\bar 0}), D \in \mathsf{Mat}_n(R_{\bar 0}), \\ B \in \mathsf{Mat}_{m,n}(R_{\bar 1}), C \in \mathsf{Mat}_{n,m}(R_{\bar 1}) \end{array}$$

に対して，P が可逆 $\iff$ A, D は可逆．

注意 4.6.

Varadarajan の教科書 [Var, Lemma 3.6.1] では $R/(R_{\bar 1})$ で一旦考える，ということをしている．しかし，結局のところ本質的にはベキ零性をしっかり見極めた議論が必要である．

4.2 Berezinian について

以下でも可換スーパー代数 R をとり固定する．一般線型スーパー群の元

$$P = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in \mathbf{GL}_{m|n}(R),$$

に対して，かの有名な **Berezinian (determinant)** は，次で定義される量であった：

$$\mathsf{Ber}(P) := \mathsf{det}(A)\mathsf{det}(D - CA^{-1}B)^{-1}.$$

注意 4.7.

この最後の inverse はリー・スーパー群において $\mathsf{Ber}(e^P) = e^{\mathsf{str}(P)}$ がみたされるための調整.
ここで $\mathsf{str}(P) = \mathsf{tr}(A) - \mathsf{tr}(D)$ は P の**スーパー・トレース**.

以下では，この Berezinian が乗法的であることをいう．証明は Varadarajan の教科書 [Var, Theorem 3.6.2] に沿う．

4.2.1 考察対象の絞り込み

まずはじめに，次の分解に注意する：

$$P = \left(\begin{array}{c|c} E_m & BD^{-1} \\ \hline O & E_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A - BD^{-1}C & O \\ \hline O & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E_m & O \\ \hline D^{-1}C & E_n \end{array}\right).$$

そこで，$\mathcal{G} := \mathbf{GL}_{m|n}(R)$ の部分集合として，

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^+ &:= \{\left(\begin{array}{c|c} E_m & B \\ \hline O & E_n \end{array}\right) \mid B \in \mathsf{Mat}_{m,n}(R_{\bar{1}})\}, \\
\mathcal{G}^0 &:= \{\left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & D \end{array}\right) \mid A \in \mathrm{GL}_m(R_{\bar{0}}),\ D \in \mathrm{GL}_n(R_{\bar{0}})\}, \\
\mathcal{G}^- &:= \{\left(\begin{array}{c|c} E_m & O \\ \hline C & E_n \end{array}\right) \mid C \in \mathsf{Mat}_{n,m}(R_{\bar{1}})\}
\end{aligned}$$

を考えれば，いずれも $\mathcal{G}$ の部分群になることはすぐ分かる．また，包含 $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^+\mathcal{G}^0\mathcal{G}^-$ が成立していることに注意する（右は成分同士の積たちからなる集合の意味).

行列の積の計算から，次はすぐにわかる：

命題 4.8.

任意の $P \in \mathcal{G}, P^+ \in \mathcal{G}^+, P^0 \in \mathcal{G}^0, P^- \in \mathcal{G}^-$ に対して，以下が成立：

(1) $\mathsf{Ber}(P^+P) = \mathsf{Ber}(P^+)\mathsf{Ber}(P)$.
(2) $\mathsf{Ber}(P^0P) = \mathsf{Ber}(P^0)\mathsf{Ber}(P)$.
(3) $\mathsf{Ber}(PP^0) = \mathsf{Ber}(P)\mathsf{Ber}(P^0)$.
(4) $\mathsf{Ber}(PP^-) = \mathsf{Ber}(P)\mathsf{Ber}(P^-)$.
(5) $\mathsf{Ber}(P^0P^+) = \mathsf{Ber}(P^0)\mathsf{Ber}(P^+)$.
(6) $\mathsf{Ber}(P^-P^0) = \mathsf{Ber}(P^-)\mathsf{Ber}(P^0)$.

ただし $\mathsf{Ber}(P^+) = \mathsf{Ber}(P^-) = 1$ に注意する．

Proof. 全て直接計算する（出てくる行列のサイズは適切に処理されたし）：

(1)

$$\mathsf{Ber}(\left(\begin{array}{c|c} E_m & X \\ \hline O & E_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)) = \mathsf{Ber}\left(\begin{array}{c|c} A + XC & B + XD \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathsf{det}\big((A+XC)-(B+XD)D^{-1}C\big)\mathsf{det}(D)^{-1}\\
&= \mathsf{det}\big(A-BD^{-1}C\big)\mathsf{det}(D)^{-1}\\
&= \mathsf{Ber}\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Ber}(\left(\begin{array}{c|c} X & O \\ \hline O & Y \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)) &= \mathsf{Ber}\left(\begin{array}{c|c} XA & XB \\ \hline YC & YD \end{array}\right)\\
&= \mathsf{det}\big(XA - XB(YD)^{-1}(YC)\big)\mathsf{det}(YD)^{-1}\\
&= \mathsf{det}\big(XA - XBD^{-1}C\big)\mathsf{det}(Y)^{-1}\mathsf{det}(D)^{-1}\\
&= \mathsf{det}(X)\mathsf{det}(Y)^{-1}\mathsf{det}\big(A-BD^{-1}C\big)\mathsf{det}(D)^{-1}\\
&= \mathsf{Ber}\left(\begin{array}{c|c} X & O \\ \hline O & Y \end{array}\right)\mathsf{Ber}\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Ber}(\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} X & O \\ \hline O & Y \end{array}\right)) &= \mathsf{Ber}\left(\begin{array}{c|c} AX & BY \\ \hline CX & DY \end{array}\right)\\
&= \mathsf{det}\big(AX - BY(DY)^{-1}(CX)\big)\mathsf{det}(DY)^{-1}\\
&= \mathsf{det}\big(AX - BD^{-1}CX\big)\mathsf{det}(Y)^{-1}\mathsf{det}(D)^{-1}\\
&= \mathsf{det}(X)\mathsf{det}(Y)^{-1}\mathsf{det}\big(A-BD^{-1}C\big)\mathsf{det}(D)^{-1}\\
&= \mathsf{Ber}\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\mathsf{Ber}\left(\begin{array}{c|c} X & O \\ \hline O & Y \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Ber}(\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E_m & O \\ \hline X & E_n \end{array}\right)) &= \mathsf{Ber}\left(\begin{array}{c|c} A+BX & B \\ \hline C+DX & D \end{array}\right)\\
&= \mathsf{det}\big((A+BX) - BD^{-1}(C+DX)\big)\mathsf{det}(D)^{-1}\\
&= \mathsf{det}\big(A-BD^{-1}C\big)\mathsf{det}(D)^{-1}\\
&= \mathsf{Ber}\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Ber}(\left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E_m & B \\ \hline O & E_n \end{array}\right)) &= \mathsf{Ber}(\left(\begin{array}{c|c} A & AB \\ \hline O & D \end{array}\right))\\
&= \mathsf{det}(A)\mathsf{det}(D)^{-1} = \mathsf{Ber}\left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & D \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Ber}(\left(\begin{array}{c|c} E_m & O \\ \hline C & E_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & D \end{array}\right)) &= \mathsf{Ber}(\left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline CA & D \end{array}\right))\\
&= \mathsf{det}(A)\mathsf{det}(D)^{-1} = \mathsf{Ber}\left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & D \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

□

4.2.2 Berezinian の乗法性

命題 4.8 から，Ber が積を保つことを示すためには，次の等式が言えたらよいということになった：

$$\forall P^+ \in \mathcal{G}^+,\ P^- \in \mathcal{G}^-, \quad \mathsf{Ber}(P^-P^+) = \mathsf{Ber}(P^-)\mathsf{Ber}(P^+). \tag{4.3}$$

まず，次の technical lemma を処理する：

補題 4.9.

odd 元を成分とする適当なサイズの行列 B, C に対して，$E_m - B(E_n + CB)^{-1}C = (E_m + BC)^{-1}$.

Proof. 仮定から BC, CB はいずれもベキゼロ行列である．そこで $(BC)^{\ell_1+1} = O, (CB)^{\ell_2+1} = O$ と書いておき，安全のため $\ell := \mathsf{Max}\{\ell_1, \ell_2\}$ とおくとき，

$$\begin{aligned}
B(E_n + CB)^{-1}C &= B(E_n - CB + (CB)^2 - (CB)^3 + \cdots + (-1)^\ell (CB)^\ell)C \\
&= BC - BCBC + B(CB)^2C - B(CB)^3C + \cdots + (-1)^\ell B(CB)^\ell C \\
&= BC - (BC)^2 + (BC)^3 - (BC)^4 + \cdots + (-1)^\ell (BC)^{\ell+1}
\end{aligned}$$

となっている．このことから

$$\begin{aligned}
E_m - B(E_n + CB)^{-1}C &= E_m - BC + (BC)^2 - (BC)^3 + \cdots + (-1)^{\ell+1}(BC)^{\ell+1} \\
&= (E_m + BC)^{-1}
\end{aligned}$$

を得る． □

さて，(4.3) を示すために，次のような分解に着目する：$\exists b_{i,j} \in R_{\bar{1}}$ s.t.

$$P^+ = \left(\begin{array}{c|c} E_m & b_{1,1}E_{1,1} \\ \hline O & E_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E_m & b_{1,2}E_{1,2} \\ \hline O & E_n \end{array}\right)\cdots\left(\begin{array}{c|c} E_m & b_{m,n}E_{m,n} \\ \hline O & E_n \end{array}\right),$$

where $E_{i,j}$ は行列単位．簡単のため，

$$P^+_{i,j} := \left(\begin{array}{c|c} E_m & b_{i,j}E_{i,j} \\ \hline O & E_n \end{array}\right)$$

とかいておく．すると，

$$P^-P^+ = P^-(P^+_{1,1}P^+_{1,2}\cdots P^+_{m,n-1}P^+_{m,n}) = (P^-P^+_{1,1})P^+_{1,2}\cdots P^+_{m,n-1}P^+_{m,n}$$

と見て，$\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^+\mathcal{G}^0\mathcal{G}^-$ の分解で P^- の左下のブロックを C と表示しておいて，

$$\begin{aligned}
P^-P^+_{1,1} = &\left(\begin{array}{c|c} E_m & b_{1,1}E_{1,1}(E_n + Cb_{1,1}E_{1,1})^{-1} \\ \hline O & E_n \end{array}\right) \\
&\cdot \left(\begin{array}{c|c} E_m - b_{1,1}E_{1,1}(E_n + Cb_{1,1}E_{1,1})^{-1}C & O \\ \hline O & (E_n + Cb_{1,1}E_{1,1})^{-1} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

$$
\cdot\left(\begin{array}{c|c} E_m & O \\ \hline (E_n + Cb_{1,1}E_{1,1})^{-1}C & E_n \end{array}\right)
$$
$$
=: Q^+Q^0Q^-
$$

と書いておけば（もちろん順序ごと），

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Ber}(P^-P^+) &= \mathsf{Ber}(Q^+Q^0Q^-(P^+_{1,2}\cdots P^+_{m,n-1}P^+_{m,n})) \\
&= \mathsf{Ber}(Q^+(Q^0Q^-(P^+_{1,2}\cdots P^+_{m,n-1}P^+_{m,n}))) \\
&= \mathsf{Ber}(Q^+)\mathsf{Ber}(Q^0(Q^-(P^+_{1,2}\cdots P^+_{m,n-1}P^+_{m,n}))) \quad (\because \text{命題 } 4.8(1)) \\
&= \mathsf{Ber}(Q^+)\mathsf{Ber}(Q^0)\mathsf{Ber}(Q^-(P^+_{1,2}\cdots P^+_{m,n-1}P^+_{m,n})) \quad (\because \text{命題 } 4.8(2)) \\
&= \mathsf{Ber}(Q^0)\mathsf{Ber}(Q^-(P^+_{1,2}\cdots P^+_{m,n-1}P^+_{m,n})) \quad (\because \mathsf{Ber}(Q^+) = 1)
\end{aligned}
$$

となる．

補題 4.10.

$\mathsf{Ber}(Q^0) = 1$.

Proof. まず，補題 4.9 から

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Ber}(Q^0) &= \mathsf{det}(E_m - b_{1,1}E_{1,1}(E_n + Cb_{1,1}E_{1,1})^{-1}C)\cdot \mathsf{det}(E_n + Cb_{1,1}E_{1,1})^{-1} \\
&= \big(\mathsf{det}(E_m + b_{1,1}E_{1,1}C)\cdot \mathsf{det}(E_n + Cb_{1,1}E_{1,1})\big)^{-1}
\end{aligned}
$$

となっていることに注意する．いま，一般に Cayley-Hamilton 的に（可換環上の）

$$
\mathsf{det}(E_m + X) = 1 + \mathsf{tr}(X) + (X \text{ の積和})
$$

となることを知っているので，$b_{1,1}^2 = 0$ から $(b_{1,1}E_{1,1}C)^2 = O$ であることから，

$$
\mathsf{det}(E_m + b_{1,1}E_{1,1}C) = 1 + \mathsf{tr}(b_{1,1}E_{1,1}C) = 1 - \mathsf{tr}(Cb_{1,1}E_{1,1})
$$

となる．従って，

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{det}(E_m + b_{1,1}E_{1,1}C)\mathsf{det}(E_n + Cb_{1,1}E_{1,1}) \\
&= (1 - \mathsf{tr}(Cb_{1,1}E_{1,1}))(1 + \mathsf{tr}(Cb_{1,1}E_{1,1})) \\
&= 1 - \mathsf{tr}(Cb_{1,1}E_{1,1})^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

となる． □

このことから，
$$
\mathsf{Ber}(P^-P^+) = \mathsf{Ber}(Q^-(P^+_{1,2}\cdots P^+_{m,n-1}P^+_{m,n}))
$$

と分かった．この様にして，一つづつ消していけるので，

$$
\mathsf{Ber}(P^-P^+) = \mathsf{Ber}((Q^-)'(P^+_{1,3}\cdots P^+_{m,n-1}P^+_{m,n})) = \cdots = \mathsf{Ber}((Q^-)''P^+_{m,n-1}P^+_{m,n}) = \mathsf{Ber}((Q^-)'''P^+_{m,n})
$$

となる．最後のも所詮は $P^+_{m,n} = b_{m,n}E_{m,n}$ の一元なので同様に処理できる．以上から，

$$\mathrm{Ber}(P^-P^+) = 1 = \mathrm{Ber}(P^-)\mathrm{Ber}(P^+)$$

が示され，(4.3) も示された．

4.2.3 結果に関する注意

証明した式 (4.3) の左辺は，成分でかけば

$$\begin{aligned}\mathrm{Ber}(\left(\begin{array}{c|c} E_m & B \\ \hline O & E_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} E_m & O \\ \hline C & E_n \end{array}\right)) &= \mathrm{Ber}\left(\begin{array}{c|c} E_m & B \\ \hline C & E_n + CB \end{array}\right) \\ &= \mathrm{det}(E_m - B(E_n + CB)^{-1}C)\mathrm{det}(E_n + CB)^{-1}\end{aligned}$$

となる．従って，(4.3) は次と同値になる：

$$\forall B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(R_{\bar{1}}),\ C \in \mathrm{Mat}_{n,m}(R_{\bar{1}}), \quad \mathrm{det}(E_m - B(E_n + CB)^{-1}C)\mathrm{det}(E_n + CB)^{-1} = 1. \tag{4.4}$$

さらに補題 4.9 これは次と同値になる：

$$\forall B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(R_{\bar{1}}),\ C \in \mathrm{Mat}_{n,m}(R_{\bar{1}}), \quad \mathrm{det}(E_m + BC)\mathrm{det}(E_n + CB) = 1. \tag{4.5}$$

いま BC, CB の成分は $R_{\bar{0}}$ であり，$R_{\bar{0}}$ は通常の可換環なので，量 $\mathrm{det}(E_m + BC), \mathrm{det}(E_n + CB)$ は，いわゆる固有多項式になっていることに注意する．

こちらの (4.5) の方が (4.3) よりも示しやすいと思っていたが，いまのところ (4.5) を直接示す方法を著者は知らない．

注意 4.11.

調べるところによると，実数体とか成分の行列たち X, Y に対して，

$$\mathrm{det}(E_m + XY) = \mathrm{det}(E_n + YX)$$

が常に成り立つとのこと．これを Sylvester's identity と呼ぶとのこと．証明は，ひとまず $2n^2$ 変数の整数係数多項式環 $\mathbb{Z}[T_{i,j}, X_{i,j}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ を考えて，これを成分とする正方行列のうち $A = (T_{i,j})_{i,j}, B = (X_{i,j})_{i,j}$ について，当たり前に $(E_n + AB)A = A(E_n + BA)$ が成り立っていることを使って，両辺の行列式をとれば $\mathrm{det}(A)(\mathrm{det}(E_n + AB) - \mathrm{det}(E_n + BA)) = 0$ が，多項式環の中で成り立っているので，整域性から $\mathrm{det}(E_n + AB) = \mathrm{det}(E_n + BA)$ を得る．あとは代入写像で飛ばせば，正方行列の場合は OK．今のような長方形の場合は，行列式が崩れないように X, Y に適当に 0 とか 1 とかを付け加えて正方形にすればよい．

でも今の我々の場合は，この恒等式は成り立たない（上の証明では代入の箇所で ill-defined になるから）．実際，$X = \binom{a}{b}, Y = (x, y)$ with $a, b, x, y \in R_{\bar{1}}$ で計算すると

$$\mathrm{det}(E_2 + XY) = 1 + ax + by + axby - aybx = 1 + ax + by + 2axby$$

と，ふつうは消えるはずの最終項が出てくる．一方で

$$\mathsf{det}(E_1+YX)=1+xa+yb=1-ax-by$$

となり，確かに違う．ちなみに

$$\mathsf{det}(E_2+XY)\mathsf{det}(E_1+YX)=1-ax-by+ax+by-2axby-byax+2axby=1.$$

実は $\Bbbk$ が有理数体 $\mathbb{Q}$ の場合は (4.5) がすぐ分かる．

以下で，非ゼロな $R_{\bar{1}}^2$ と $R_{\bar{0}}$ との積を成分とする n 次正方行列 X に対して，固有多項式

$$\phi_X(t):=\mathsf{det}(tE_n-X)\quad\in R_{\bar{0}}[t]$$

を考える（$X=BC,CB$ を見越した仮定）．

任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $\mathsf{tr}(X^k)$ はベキ零なので，$\Bbbk=\mathbb{Q}$ の仮定から $R_{\bar{0}}[t^{\pm}]$ の元として

$$\exp(-\frac{1}{k}t^{-k}\mathsf{tr}(X^k)):=1-\frac{1}{k}t^{-k}\mathsf{tr}(X^k)+\frac{1}{2!k^2}t^{-2k}\mathsf{tr}(X^k)^2-\frac{1}{3!k^3}t^{-3k}\mathsf{tr}(X^k)^3+\cdots$$

を考えることができる．

注意 4.12.

実は，$\mathsf{tr}(X^k)$ は必ず k で割れて，さらに $\mathsf{tr}(X^k)^m=k^m m!(X$ の成分たちの積和$)$ の形をしていることがいえる．

Cayley-Hamilton の定理の周辺の事から，次の成立が言えている：$X^{\ell+1}=O$ となる ℓ をとってくるとき，

$$\phi_X(t)=\exp(-\sum_{k=1}^{\ell}\frac{1}{k}t^{n-k}\mathsf{tr}(X^k)). \tag{4.6}$$

補題 4.13.

我々の場合の B,C に関して，任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して，$\mathsf{tr}((BC)^k)=-\mathsf{tr}((CB)^k)$.

Proof. もちろん B,C の成分は $R_{\bar{1}}$ なので，定義から直接に $\mathsf{tr}(BC)=-\mathsf{tr}(CB)$ が分かる．長くなっても，例えば CBC の成分が $R_{\bar{1}}$ であることを念頭におけば，このことから $\mathsf{tr}((BC)^2)=\mathsf{tr}(B(CBC)))=-\mathsf{tr}((CBC)B)=\mathsf{tr}((CB)^2)$ などが従う． □

よって，$\ell=\mathsf{Max}\{\ell_1,\ell_2\}$ だったことを思い出せば，式 (4.6) から

$$\begin{aligned}\phi_{BC}(t)\phi_{CB}(t)&=\exp(-\sum_{k=1}^{\ell_1}\frac{1}{k}t^{m-k}\mathsf{tr}((BC)^k))\exp(-\sum_{k=1}^{\ell_2}\frac{1}{k}t^{n-k}\mathsf{tr}((CB)^k))\\&=\exp(-\sum_{k=1}^{\ell}\frac{1}{k}t^{m-k}\mathsf{tr}((BC)^k))\exp(\sum_{k=1}^{\ell}\frac{1}{k}t^{n-k}\mathsf{tr}((BC)^k))\end{aligned}$$

$$= \exp(\sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{k}(-t^{m-k} + t^{n-k})\mathsf{tr}((BC)^k))$$

と計算される．従って，$t = 1$ のときを考えれば

$$\begin{aligned} \mathsf{det}(E_m + BC)\mathsf{det}(E_n + CB) &= \phi_{-BC}(1)\phi_{-CB}(1) \\ &= \exp(\sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{k}(-1+1)\mathsf{tr}((-BC)^k)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となり，(4.5) が（おまけ的に）示された．

参考文献

[Bru] Jonathan Brundan, *Modular representations of the supergroup $Q(n)$. II*, Pacific J. Math. **224** (2006), no. 1, 65–90.

[BruKle] J. Brundan and A. Kleshchev, *Modular representations of the supergroup $Q(n)$. I*, J. Algebra **260** (2003), no. 1, pp. 64–98.

[CheShuWan] Shun-Jen Cheng, Bin Shu, and Weiqiang Wang, *Modular representations of exceptional supergroups*, Math. Z. **291** (2019), no. 1-2, 635–659.

[FioGav] R. Fioresi and F. Gavarini, *Chevalley supergroups*, Mem. Amer. Math. Soc. **215** (2012), no. 1014, vi+64.

[Jan] Jens Carsten Jantzen, *Representations of algebraic groups, second ed.*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. **107**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[Kac] V. G. Kac, *Lie superalgebras*, Advances in Math, **26**, no. 1, pp. 8–96, 1977.

[Kuj] Jonathan Kujawa, *The Steinberg tensor product theorem for* $\mathrm{GL}(m|n)$, Representations of algebraic groups, quantum groups, and Lie algebras, Contemp. Math., vol. 413, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, pp. 123–132.

[MasZub] František Marko and Alexandr N. Zubkov, *Blocks for the general linear supergroup* $\mathrm{GL}(m|n)$, Transform. Groups **23** (2018), no. 1, 185–215.

[Mas1] Akira Masuoka, *The fundamental correspondences in super affine groups and super formal groups*, J. Pure Appl. Algebra **202** (2005), 284–312.

[Mas2] Akira Masuoka, *Harish-Chandra pairs for algebraic affine supergroup schemes over an arbitrary field*, Transform. Groups **17** (2012), no. 4, pp. 1085–1121.

[Mas3] Akira Masuoka, *Hopf algebraic techniques applied to super algebraic groups*, Proceedings of Algebra Symposium (2013), 48–66, available at `arXiv:`**1311.1261** [math.AG].

[MasShi1] Akira Masuoka and Taiki Shibata, *Algebraic supergroups and Harish-Chandra pairs over a commutative ring*, Trans. Amer. Math. Soc. (2017), no. 369, 3443–3481.

[MasShi2] Akira Masuoka and Taiki Shibata, *On functor points of affine supergroups*, J. Algebra (2018), no. 503, 534–572.

[MasShiShi] A. Masuoka, T. Shibata, and Y. Shimada, *Affine algebraic super-groups with integral*, to appear in Communications in Algebra.

[MasZub1] Akira Masuoka and Alexandr N. Zubkov, *Quotient sheaves of algebraic supergroups are superschemes*, J. Algebra **348** (2011), 135–170.

[Mil] J. S. Milne, *Algebraic groups. The theory of group schemes of finite types over a field*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. **170**, Cambridge University Press, Cambridge, 2017

[Rac] M. L. Racine, *Primitive superalgebras with superinvolution*, J. Algebra **206** (1998), no. 2, 588–614.

[Ser] V. Serganova, *Quasireductive supergroups*, New developments in Lie theory and its applications, Contemp. Math., vol. **544**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, pp. 141–159.

[Shi1] T. Shibata, *Borel-Weil theorem for algebraic supergroups*, J. Algebra **547** (2020), pp. 179–219.

[Shi2] T. Shibata, *Algebraic Supergroups and Their Representations*, Proceedings of the International Workshop on Hopf Algebras and Tensor Categories, Contemp. Math. vol. **771**, 2021.

[Shi3] T. Shibata, *Frobenius kernels of algebraic supergroups and Steinberg's tensor product theorem*, preprint `arXiv:` **2206.06000** (2022), [math.RT].

[ShuWan] Bin Shu and Weiqiang Wang, *Modular representations of the ortho-symplectic supergroups*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **96** (2008), no. 1, 251–271.

[Tak1] Mitsuhiro Takeuchi, *Tangent coalgebras and hyperalgebras. I*, Japan. J. Math. **42** (1974), 1–143.

[Tak2] Mitsuhiro Takeuchi, *On coverings and hyperalgebras of affine algebraic groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **211** (1975), 249–275.

[Tak3] Mitsuhiro Takeuchi, *A hyperalgebraic proof of the isomorphism and isogeny theorems for reductive groups*, J. Algebra **85** (1983), no. 1, 179–196.

[Var] V. S. Varadarajan, *Supersymmetry for Mathematicians: an Introduction*, Courant Lecture Notes in Mathematics, Vol. **11**, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[山崎] 山崎圭次郎, 環と加群, 岩波基礎数学選書 (1990).

[ZubMar] A. N. Zubkov and F. Marko, *The center of $Dist(GL(m|n))$ in positive characteristic*, Algebr. Represent. Theory **19** (2016), no. 3, pp. 613–639.