

福井大学工学部機械・システム工学科 2 年生対象授業

## 応用数学 C(ベクトル解析)

配布資料 (担当教員 田嶋直樹)

要 点
-----

p.0 : 講義内容

p.1 : 活字の種類・ギリシャ文字

p.2 : ベクトルとは

p.3 : 成分表示・内積

p.4 : 外積・三重積

p.5 : 一変数ベクトル関数の微分と積分

p.6 : 点の運動とその軌跡・空間曲線

p.7 : 曲面・場・勾配・発散・回転

p.8 : 場の微分公式・線積分

p.9 : スカラーポテンシャル・面積分・ストークスの定理

p.10 : 体積積分・各種座標系・ガウスの発散定理

要点 p.0~10 は重要事項のまとめです.

【 講義の章立て 】

第 1 章 ベクトルの代数

- 1.1 ベクトルとは
- 1.2 ベクトルの成分表示
- 1.3 内積
- 1.4 外積
- 1.5 3つのベクトルの積

第 2 章 一変数ベクトル関数の微分と積分

- 2.1 ベクトル関数の微分
- 2.2 ベクトル関数の積分

第 3 章 曲線と運動

- 3.1 点の運動
- 3.2 空間曲線
- 3.3 曲面

第 4 章 場

- 4.1 場とは
- 4.2 勾配
- 4.3 発散
- 4.4 回転
- 4.5 場の微分公式  
《ここで必要に応じて多重積分の復習を行う》
- 4.6 線積分
- 4.7 面積分
- 4.8 スカラーポテンシャル  
(および線積分の練習)
- 4.9 ストークスの定理  
(および面積分と線積分の練習)
- 4.10 体積積分  
(デカルト座標・円柱座標・球座標の場合)
- 4.11 ガウスの発散定理  
(および体積積分と面積分の練習)

《定期試験》

【 試験と成績評価 】

成績評価に用いる総合点は、

$$\begin{aligned} (\text{総合点}) = & (\text{定期試験得点 (0~80 点)}) \\ & + (\text{WebClass 課題得点 (0~22 点程度)}) + (\text{平常点}) \end{aligned}$$

として計算します。

WebClass 課題は (受講者データの整う 3 週目くらい以降に) 毎授業で 1~2 課題を出題し、2 週間以内に正答を入力できた場合に 1 課題につき 1 点を与えます。課題は人により数値を違えてありますので、他の学生に答を教えてもらって入力しても正答にはなりません。定期試験に WebClass の課題に類似した問題を多く出題します。平常点は問題の解答を黒板に書くなど授業中に特別な働きをした人への加点で、ほとんどの受講者は 0 点です。総合点を下記の工学部基準にあてはめて成績評価をします。

- △ 総合点が 90 点以上で秀,
- △ 総合点が 90 点未満かつ 80 点以上で優,
- △ 総合点が 80 点未満かつ 70 点以上で良,
- △ 総合点が 70 点未満かつ 60 点以上で可,
- △ 総合点が 60 点未満で不可です。

ただし、工学部の規程により、欠席回数が 5 回以上の場合は、総合点にかかわらず、成績は不可にします。しかし特別な事情がある場合は相談に応じます。

なお、出席調査では、カードリーダーを利用しますので、毎回の講義が始まる前に忘れずに カードリーダーに学生証を通して下さい。

追試験は、不合格者が非常に多い場合にしか実施しません。また、追試験で仮に満点をとったとしても、成績は「可」にしかありません。受講者の皆さんには、追試験を決してあてにせず、十分な日数をかけて試験勉強をした上で定期試験を受けて欲しいと切に思います。

なお、下記の WEB ページにて過去の試験問題と解答・解説などの参考資料を公開していますので、練習問題として、この科目の勉強に役立てて下さい。

<http://apphy.u-fukui.ac.jp/~tajima/va/index.html>

アルファベットの活字の種類的主要なものとして Roman(立体) と Italic (斜体) があり, 更に, 両者のそれぞれに Bold(肉太活字. 略して「太字 (ふとじ) 」と言う人が多い) 版がある. Roman 体活字は文章を表記するために用いる. Italic 体活字は数式中の記号を表すのに用いる. Bold Italic 体活字は数式で用いる記号がベクトル量を表す場合に用いる. 活字の種類が判別し難い人のために, 3 字体を表にして下記に示す.

Roman	ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZabcdefghijklmnopqrstuvwxyz
Italic	<i>ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZabcdefghijklmnopqrstuvwxyz</i>
Bold Italic	<b><i>ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZabcdefghijklmnopqrstuvwxyz</i></b>

手書きでは, Roman 体と Italic 体を書き分けることはしない. 一方, Bold 体は, 一本余分に線を書き加えた「黒板太字 (blackboard bold)」体と呼ばれるもので代替する. 例:  $\mathbb{X}$ ,  $\mathbb{Y}$ ,  $\mathbb{Z}$

この講義では使わないが, 数学で使われることのある他の字体にドイツ文字 (Fraktur) がある. この字体では  $A \sim Z$  は  $\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{E} \mathfrak{F} \mathfrak{G} \mathfrak{H} \mathfrak{I} \mathfrak{J} \mathfrak{K} \mathfrak{L} \mathfrak{M} \mathfrak{N} \mathfrak{O} \mathfrak{P} \mathfrak{Q} \mathfrak{R} \mathfrak{S} \mathfrak{T} \mathfrak{U} \mathfrak{V} \mathfrak{W} \mathfrak{X} \mathfrak{Y} \mathfrak{Z}$ ,  $a \sim z$  は  $\mathfrak{a} \mathfrak{b} \mathfrak{c} \mathfrak{d} \mathfrak{e} \mathfrak{f} \mathfrak{g} \mathfrak{h} \mathfrak{i} \mathfrak{j} \mathfrak{k} \mathfrak{l} \mathfrak{m} \mathfrak{n} \mathfrak{o} \mathfrak{p} \mathfrak{q} \mathfrak{r} \mathfrak{s} \mathfrak{t} \mathfrak{u} \mathfrak{v} \mathfrak{w} \mathfrak{x} \mathfrak{y} \mathfrak{z}$  である. 数式ではドイツ文字は対応するローマ文字とは別の記号として扱われる.

記号に使う文字の種類が足りず, 通常のアールファベット (ローマ文字) 以外の文字を使いたい場合は, 数学では通常はまずギリシャ文字を使う. ギリシャ文字 (24 字) の中にはローマ文字 (26 字) と形が同一ないし良く似た文字があるが, 見分けにくいので普通はそれらは使わず, ローマ文字と判別しやすい形のギリシャ文字だけが使われる. 下記にギリシャ文字を数学での使われ方で分類して示す. 小文字・大文字それぞれについて, 左側に非ボールド体, 右側にボールド体を示す. 小文字に 2 種類ある場合は, 右側は「異字体」と呼ばれるものである. 数式では異字体は別々の記号として扱われる. 丸括弧で囲んだ文字はローマ文字と同一である.

小文字		大文字		英語での綴り方	日本語での読み方	数式での良くある使われ方
$\alpha$	$\alpha$	(A)	(A)	alpha	アルファ	$a, b, c, d, e$ で表された量に対応する量を表す記号として, それぞれ, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ が良く用いられる. 但し, 文字としての本来の対応関係で言えば, $\gamma$ は $g$ に対応する.
$\beta$	$\beta$	(B)	(B)	beta	ベータ	
$\gamma$	$\gamma$	$\Gamma$	$\Gamma$	gamma	ガンマ	
$\delta$	$\delta$	$\Delta$	$\Delta$	delta	デルタ	
$\epsilon, \varepsilon$	$\epsilon, \varepsilon$	(E)	(E)	epsilon	イプシロン	
$\kappa$	$\kappa$	(K)	(K)	kappa	カッパ	$k, l, m, n$ で表された量に対応する量を表す記号として, それぞれ, $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ が良く用いられる. これは文字の本来の対応関係の通りである.
$\lambda$	$\lambda$	$\Lambda$	$\Lambda$	lambda	ラムダ	
$\mu$	$\mu$	(M)	(M)	mu	ミュー	
$\nu$	$\nu$	(N)	(N)	nu	ニュー	
$\xi$	$\xi$	$\Xi$	$\Xi$	xi	グザイ, クサイ, クシー	$x, y, z$ に対応させて $\xi, \eta, \zeta$ を用い, $r$ に対応させて $\rho$ を用いる. 但し, 本来は $\eta$ には $h$ が対応する. $\rho$ は動径以外には, 密度を表すのによく使われる.
$\eta$	$\eta$	(H)	(H)	eta	イータ, エータ	
$\zeta$	$\zeta$	(Z)	(Z)	zeta	ゼータ, ツェータ	
$\rho, \varrho$	$\rho, \varrho$	(P)	(P)	rho	ロー	
$\sigma, \varsigma$	$\sigma, \varsigma$	$\Sigma$	$\Sigma$	sigma	シグマ	$\pi$ は円周率, $\Sigma$ は総和記号, $\Pi$ は総乗記号. $\sigma$ は $s$ に, $\pi$ は $p$ に対応する.
$\pi, \varpi$	$\pi, \varpi$	$\Pi$	$\Pi$	pi	パイ	
$\tau$	$\tau$	(T)	(T)	tau	タウ	$t$ に関係のある量に $\tau$ が用いられる.
$\omega$	$\omega$	$\Omega$	$\Omega$	omega	オメガ	角速度. $\Omega$ は電気抵抗の単位にも.
$\theta, \vartheta$	$\theta, \vartheta$	$\Theta$	$\Theta$	theta	シータ	$\theta, \phi, \psi, \chi$ は角度を表すのに良く用いられる. $\theta$ は階段 (Heaviside) 関数をも表す. $\phi, \psi, \chi$ は一般の関数を表す記号としても好まれる.
$\phi, \varphi$	$\phi, \varphi$	$\Phi$	$\Phi$	phi	ファイ	
$\psi$	$\psi$	$\Psi$	$\Psi$	psi	プサイ, プシー	
$\chi$	$\chi$	(X)	(X)	chi	カイ	
$\upsilon$	$\upsilon$	$\Upsilon$	$\Upsilon$	upsilon	ウプシロン	$v$ は $v$ (ブイ) と混同されやすい.
$\iota$	$\iota$	(I)	(I)	iota	イオタ	$\iota$ は手書きだと何の字か判別し難い.
(o)	(o)	(O)	(O)	omicron	オミクロン	ローマ字のオーとの区別がない.

【 1.1 ベクトルとは 】

1. 定義

- ベクトル (vector) : 大きさ と 方向 を持つ量.
- スカラー (scalar) : 大きさ だけ を持つ量.

【補足】 方向 (direction) と 向き (sense)

【補足】 「束縛ベクトル」という拡張概念を別に導入する書物もある. その場合は上で定義したものは「自由ベクトル」と呼ぶ. 束縛ベクトルとは大きさ と 方向 に加えて位置 (変位ベクトルなら始点) の情報を持つものだと考えておけばよいだろう. さほど便利な概念ではないので本講義では導入しない.

2. 例



- ベクトル : 変位, 速度, 加速度, 力, 角速度, ...
- スカラー : 質量, 電荷, 温度, ...

【補足】 「大きさ」は「長さ (距離)」とは限らない

【補足】 しかし, 「方向」の意味はどのベクトルでも共通 (例えば我々のいる 3次元空間での方向を意味する) とすれば, ベクトル等式は系を (全ての物を同時に) 回転させてもやはり成立する (回転不変性を持つ).

3. 記法

A がベクトル量であることが, ひと目でわかるように工夫する習慣が広くゆきわたっている.

- i) 太字 (bold face) にする. ... **A** 手書きの例: 
- i') 太字化を指示する校正記号. ... 
- ii) 上に矢印をのせる. ...  $\vec{A}$

【補足】 点 A から点 B に向かう有向線分は  $\overrightarrow{AB}$  と書く. ちなみに  $\overline{AB}$  は AB 間の距離を表す. (高校の数学では  $\overline{AB}$  を単に AB と表記しましたが, それが唯一正式な記法というわけではないのです.)

4. 相等 :  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$

⇔ 大きさが等しくかつ 方向が等しい

5. 大きさ :  $|\mathbf{A}|$  で表す.

6. 零ベクトル :  $|\mathbf{0}| = 0$

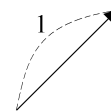
方向を持たないが, ベクトルに含める.

(→ 定義 1 と 4 の修正. 数学理論としての整理・整頓)

【注意】 零ベクトル  $\mathbf{0}$  と スカラーの零 0 を, 読んだ人が一目で区別できるように書き分けよ.

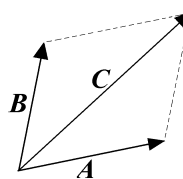
7. 単位ベクトル :

大きさが 1 のベクトル. 種々の計算で役立つ.

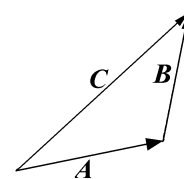


8. 加法

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$



平行四辺形則



「接ぎ足し則」

●  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$  (交換則)

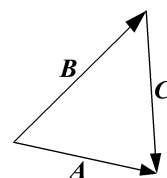
平行四辺形則のもつ対称性から自明

●  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$  (結合則)

「接ぎ足し則」で考えると容易にわかる

9. 減法

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B} : \mathbf{C} + \mathbf{B} = \mathbf{A} \text{ を満たすもの}$$



10. スカラー乗法 (ベクトルのスカラー倍)

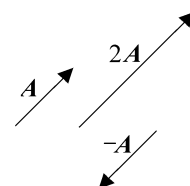
$$\mathbf{B} = a\mathbf{A} : \text{大きさを } |a| \text{ 倍し,}$$

$a < 0$  なら向きを逆転.

●  $(a + b)\mathbf{A} = a\mathbf{A} + b\mathbf{A}$  (分配則)

●  $a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a\mathbf{A} + a\mathbf{B}$  (分配則)

●  $a(b\mathbf{A}) = (ab)\mathbf{A}$  (結合則)

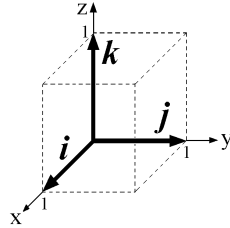


【 1.2 ベクトルの成分表示 】

1. 基本ベクトル

座標軸方向の単位ベクトルのこと。

$i, j, k$   
あるいは  
 $e_x, e_y, e_z$   
などと表記する。



$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

$A_x, A_y, A_z$  を  $\mathbf{A}$  の  $x, y, z$  成分という。

【補足】 簡易記法

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

2. ベクトルの大きさ

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

【問題】 三平方 (ピタゴラス) の定理から導け。

3. 加法・減法・スカラー乗法 (ベクトルのスカラー倍)

- $\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_x \pm B_x, A_y \pm B_y, A_z \pm B_z)$
- $a\mathbf{A} = (aA_x, aA_y, aA_z)$

4. 方向余弦

$\mathbf{A}$  と同じ方向をもつ単位ベクトルを、 $\hat{\mathbf{A}}$  という記号で表すことが多い。

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \left( \frac{A_x}{|\mathbf{A}|}, \frac{A_y}{|\mathbf{A}|}, \frac{A_z}{|\mathbf{A}|} \right)$$

$\mathbf{A}$  と  $x, y, z$  軸とのなす角を  $\alpha, \beta, \gamma$  とすると下記の関係が成り立つ。

- $\hat{\mathbf{A}} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$
- $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

$\hat{\mathbf{A}}$  の 3 成分を  $\mathbf{A}$  の方向余弦とよぶ。

演算の結果がスカラー値なので「スカラー積」とも呼ぶ。

演算を表す記号として「 $\cdot$ 」を使うので「ドット積」と呼ぶ人もある。

1. 幾何学的定義

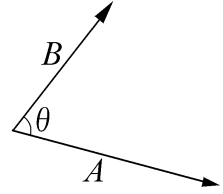
$$\bullet \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta$$

後述の外積との区別のため、

「 $\cdot$ 」を省略してはいけない。

ただし  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$  だけは  $A^2$  と書いてよい。

【補足】 正射影との関係



2. ベクトルの大きさとの関係

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$$

3. 内積の性質

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$  (交換則)
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$  (分配則)
- $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$  (分配則)
- $(c\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (c\mathbf{B}) = c(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$  (スカラー乗法との結合則)

【注】  $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$  という式はない。どこがいけないか？

4. 内積の成分表示

$$\bullet \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

【質問】 座標軸を回転させると  $A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z$  の夫々は値が変化するが、 $A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$  の値は変化しない。その理由を説明せよ。

5. 交角の求め方

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} \\ &= \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}} \end{aligned}$$

【注】  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \iff \mathbf{A} \perp \mathbf{B}$  ( $\mathbf{A}, \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$  とする)

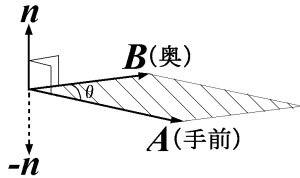
6. 基本ベクトルとの内積として成分が求まる

- $A_x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}, A_y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}, A_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{k}$
- $A_{x'} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}', A_{y'} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}', A_{z'} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{k}'$

【 1.4 ベクトルの外積 】

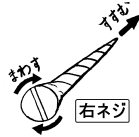
1. 幾何的定義

•  $A \times B = (|A||B| \sin \theta) n$



$\theta$ :  $A$  と  $B$  の交角 ( $0 \leq \theta \leq \pi$ )

$n$ :  $A$  にも  $B$  にも垂直な単位ベクトルで,  $180^\circ$  以内の回転で  $A$  を  $B$  に重ねようとするとき, その回転で右ネジの進む向きのもの



【補足】  $|A||B| \sin \theta$  は,  $A, B$  の張る平行四辺形の面積.  $n$  はこの平行四辺形 (の法線) の方向.

【補足】 極性ベクトルと軸性ベクトル

3次元空間では平面の方向はその法線の方向として指定できる.

【補足】  $A \perp B \Rightarrow A \cdot B = 0$

$A \parallel B \Rightarrow A \times B = 0$

【補足】 演算の結果がベクトル値なので「ベクトル積」とも呼ぶ. 「 $\times$ 」を使うので「クロス積」とも呼ぶ.

2. 外積の従う演算法則

1.  $A \times B = -B \times A$  (反交換する)

2.  $A \times A = 0$

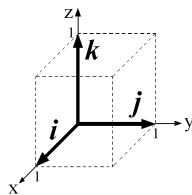
3.  $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$

4.  $C \times (A + B) = C \times A + C \times B$

5.  $(cA) \times B = A \times (cB) = c(A \times B)$

3. 基本ベクトル間の外積

$$\begin{cases} i \times j = k \\ j \times k = i \\ k \times i = j \end{cases}$$



【補足】 他の組み合わせは,  
 $j \times i = -k, k \times j = -i, i \times k = -j,$   
 $i \times i = j \times j = k \times k = 0$

【補足】 右手系と左手系

4. 外積の成分表示

$A = (A_x, A_y, A_z), B = (B_x, B_y, B_z)$  のとき,

•  $A \times B =$

$(A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x)$

5. 応用例: 三角形の面積と法線単位ベクトル

3点 P, Q, R を頂点とする三角形の

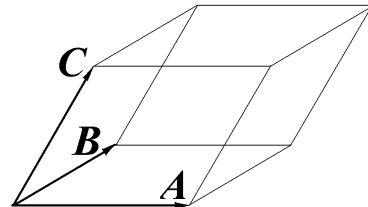
面積は  $S = \frac{1}{2} |\vec{PQ} \times \vec{PR}|$

法線単位ベクトルは  $n = \pm \frac{\vec{PQ} \times \vec{PR}}{|\vec{PQ} \times \vec{PR}|}$

【 1.5 3つのベクトルの積 】

1. スカラー三重積

•  $A \cdot (B \times C) = B \cdot (C \times A) = C \cdot (A \times B)$



$A, B, C$  を3稜とする平行六面体の体積 (またはその  $-1$  倍) に等しい.  $A, B, C$  が右手系を成すなら正の値, 左手系を成すなら負の値をとる.

2. ベクトル三重積

•  $A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$

•  $(A \times B) \times C = (A \cdot C)B - (B \cdot C)A$

【補足】 外積には結合則が成立しないので (一般には  $A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$  なので), ベクトル三重積に現れるカッコを省略してはならない.

【問題】 外積の反交換性を使って1番目の式から2番目の式を導け.

【2. 一変数ベクトル関数の微分と積分】

以下では恒等式を多数列挙するが、暗記は不要である。どの式もスカラー関数の場合と類似した形をしているので、ベクトル関数でも同じような式が成立するのだと理解すれば十分である。

ベクトル関数

$$\begin{cases} f = f(t) : f \text{ は } t \text{ の (スカラー) 関数} \\ \mathbf{A} = \mathbf{A}(t) : \mathbf{A} \text{ は } t \text{ のベクトル関数} \end{cases}$$

「各成分が  $t$  の関数であるベクトル」  
 と言うこともできる:

$$\mathbf{A} = A_x(t)\mathbf{i} + A_y(t)\mathbf{j} + A_z(t)\mathbf{k}$$

ベクトル関数の微分

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \mathbf{A}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

各成分を微分すればよい:

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \left( \frac{dA_x(t)}{dt}, \frac{dA_y(t)}{dt}, \frac{dA_z(t)}{dt} \right)$$

ベクトル関数の高階微分

$$\frac{d^n \mathbf{A}(t)}{dt^n} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d^{n-1} \mathbf{A}(t)}{dt^{n-1}} \right)$$

各成分を  $n$  階微分すればよい:

$$\frac{d^n \mathbf{A}(t)}{dt^n} = \left( \frac{d^n A_x(t)}{dt^n}, \frac{d^n A_y(t)}{dt^n}, \frac{d^n A_z(t)}{dt^n} \right)$$

ベクトル関数の微分公式

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(t), \mathbf{B} = \mathbf{B}(t), f = f(t)$$

のとき下記の等式が成り立つ。

和の公式

$$1. \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

積の公式

$$\begin{aligned} 2. \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \\ 3. \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \end{aligned}$$

$$4. \frac{d}{dt} (f\mathbf{A}) = \frac{df}{dt} \mathbf{A} + f \frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

ベクトル関数の積分

不定積分は微分の逆操作:

$$\frac{d\mathbf{B}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t) \Leftrightarrow \mathbf{B}(t) = \int \mathbf{A}(t) dt + \mathbf{C}$$

【注】積分定数もベクトルになる。

各成分を積分すればよい。不定積分は:

$$\int \mathbf{A}(t) dt = \left( \int A_x(t) dt, \int A_y(t) dt, \int A_z(t) dt \right)$$

定積分は:

$$\int_a^b \mathbf{A}(t) dt = \left( \int_a^b A_x(t) dt, \int_a^b A_y(t) dt, \int_a^b A_z(t) dt \right)$$

ベクトル関数の積分公式

和の公式

$$1. \int \{\mathbf{A}(t) \pm \mathbf{B}(t)\} dt = \int \mathbf{A}(t) dt \pm \int \mathbf{B}(t) dt$$

定数 ( $k$ ) 倍・定ベクトル ( $\mathbf{K}$ ) 倍の公式

$$\begin{aligned} 2. \int k\mathbf{A}(t) dt &= k \int \mathbf{A}(t) dt \\ 3. \int \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}(t) dt &= \mathbf{K} \cdot \int \mathbf{A}(t) dt \\ 4. \int \mathbf{K} \times \mathbf{A}(t) dt &= \mathbf{K} \times \int \mathbf{A}(t) dt \end{aligned}$$

部分積分公式

$$f = f(t), \mathbf{A} = \mathbf{A}(t), \mathbf{B} = \mathbf{B}(t),$$

$$f' = \frac{df}{dt}, \mathbf{A}' = \frac{d\mathbf{A}}{dt}, \mathbf{B}' = \frac{d\mathbf{B}}{dt} \text{ とすると}$$

$$\begin{aligned} 5. \int f\mathbf{A}' dt &= f\mathbf{A} - \int f'\mathbf{A} dt \\ \int f'\mathbf{A} dt &= f\mathbf{A} - \int f\mathbf{A}' dt \\ 6. \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}' dt &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \int \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B} dt \\ \int \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B} dt &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}' dt \\ 7. \int \mathbf{A} \times \mathbf{B}' dt &= \mathbf{A} \times \mathbf{B} - \int \mathbf{A}' \times \mathbf{B} dt \\ \int \mathbf{A}' \times \mathbf{B} dt &= \mathbf{A} \times \mathbf{B} - \int \mathbf{A} \times \mathbf{B}' dt \end{aligned}$$

【 3.1 点の運動とその軌跡 】

1. 点の位置・速度・加速度

数学的には、時刻  $t$  を変数とする 1 変数ベクトル関数  
および その 1 階微分, 2 階微分である.

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  : 位置 (position),  $|\mathbf{r}|$  は動径 (radius)

$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  : 速度 (velocity)

$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$  : 加速度 (acceleration)

2. 加速度の、接線方向と主法線方向の成分への分解

$v = |\mathbf{v}|$ , ( $v \geq 0$ ) : 速度の大きさ (speed)

[注] 高等学校の物理では、velocity を「速度」、  
speed を「速さ」と訳し分ける決まりでしたが...

$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}}{v}$ , ( $|\mathbf{t}| = 1$ ) : 接線単位ベクトル  
(tangential unit vector)

[注]  $\mathbf{t}$  は tangential line (接線) から,  
 $t$  は time (時刻) から.  $|\mathbf{t}|$  と  $t$  は別の物.

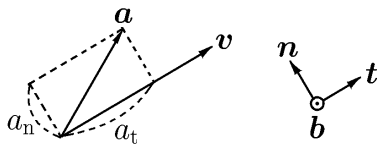
$a_t = \mathbf{a} \cdot \mathbf{t}$  : 加速度の接線成分 (tangential component)

$\mathbf{a}_n = \mathbf{a} - a_t \mathbf{t}$

$a_n = |\mathbf{a}_n|$ , ( $a_n \geq 0$ ) : 加速度の法線 (normal) 成分

$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_n}{a_n}$ , ( $|\mathbf{n}| = 1$ ) : 主法線単位ベクトル  
(principal normal unit vector)

$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ , ( $|\mathbf{b}| = 1$ ) : 従法線 (binormal) 単位ベクトル



3. 下記の等式が成立することが示せる

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

4.  $a_n$  は  $v$  と軌跡の形だけで決まることも示せる

$$a_n = \kappa v^2 = \frac{v^2}{\rho}$$

$\kappa$  : 曲率 (curvature)

$\rho$  : 曲率半径 (radius of curvature),  $\rho = \frac{1}{\kappa}$

$\mathbf{r}_c = \mathbf{r} + \rho \mathbf{n}$  : 曲率中心 (center of curvature)

【3.2 空間曲線】

1. 曲線のパラメータ表示

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad a \leq t \leq b$$

「曲線の向きは  $t$  の増加する向きとする」と書いてあれば、  
 $\mathbf{r}(a)$  が始点,  $\mathbf{r}(b)$  が終点である。

[例] 「 $\mathbf{r} = (\sin t, \cos t, 0)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ 」は、  
原点が中心で半径が 1 の,  $xy$  平面内にある円  
( $x^2 + y^2 = 1, z = 0$  を満たす点の集合) を表す。

2. 弧長 (曲線の長さ)

$$\begin{aligned} \widehat{AB} &= \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| dt \quad \left[ \begin{array}{l} \text{左辺は曲線上の 2 点 A,B 間の弧長の記号.} \\ \text{A,B に対応する } t \text{ の値を夫々 } a, b \text{ とした.} \end{array} \right] \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2} dt \end{aligned}$$

補足 1. 弧長による  $\mathbf{t}$  と  $\mathbf{n}$  の定義

$$s(t) = \int_a^t \left| \frac{d\mathbf{r}(\tau)}{d\tau} \right| d\tau$$

即ち,

$$\frac{ds(t)}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right|$$

上式で定義された  $s(t)$  を使って、曲線表示のパラメータを  $t$  から  $s$  に変更すれば、以下のように  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\kappa$  の第 2 の定義を与えることができる。

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}$$

$$\kappa(s) \mathbf{n}(s) = \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}, \quad |\mathbf{n}(s)| = 1, \quad \kappa(s) \geq 0$$

(演習問題)

上記の定義が、3.1.2 で与えた定義と一致することを示せ。

補足 2. 捩率 (れいりつ) と Frenet-Serret の公式

(演習問題) 以下の等式が成立することを示せ。

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n}$$

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n}$$

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}$$

$\tau$  : 捩率 (torsion) (「捩」: ねじれ)



【 3.3 曲面 】

1. 曲面のパラメータ表示

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v),$$

$$= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D$$

$D$  は  $u$ - $v$  平面内の 2 次元領域

2. 曲面の面積

$$S = \iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv$$

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv : \text{面積素}$$

補足 1. 計算が煩雑な場合に役立つ計算方法

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{EG - F^2},$$

$$E = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad G = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}.$$

補足 2. 曲面  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$  の面積

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

【4.1 場 (field) とは】

- ・ 空間に分布した量
- ・ 数学的には,  $x, y, z$  を変数とする 3 変数関数

【注】“field” を「場」と訳すのは理学系, 「界」と訳すのは工学系. 例: magnetic field = 磁場 = 磁界

1. 本講義での各種関数の主な用途

	スカラー値	ベクトル値
1 変数	平面内の曲線 $y = f(x)$	点の運動の表示, 曲線のパラメータ表示
2 変数	曲面 $z = f(x, y)$	曲面のパラメータ表示
3 変数	スカラー場	3 次元領域のパラメータ表示, ベクトル場

2. 場の視覚的表現

- ・ 等位面 (スカラー場)
- ・ 流線 (ベクトル場)

【4.2 勾配 (gradient, グラジエント)】

スカラー場  $\varphi(x, y, z)$  の勾配とは

$$\boxed{\text{grad } \varphi = \nabla \varphi} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

$$\boxed{\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)} : \text{ナブラ (nabla) 記号}$$

ナブラは微分演算子 (differential operator).

【注】ナブラは, 式変形では, 通常のベクトルと同様に内積, 外積, 分配則等の規則に従うものとする. ただし積における項の順番を勝手に変更してはならない.

【注】operator の訳語には作用素と演算子の二つがある. この語には「関数を別の関数に写像するもの」と「(四則などの) 演算を表す記号」という二つの意味がある. ナブラは前者である. 意味に応じて前者を「作用素」, 後者を「演算子」と訳し分ける流儀がある一方で, 学術用語は (翻訳で意味が変わらないように) 一対一対応が望ましいという観点から, 意味によらず「演算子」という訳語を使う流儀もある.

- ・  $\nabla \varphi$  は最大勾配の方向 ( $\varphi$  が増す向き) を向く
- ・  $|\nabla \varphi|$  は最大勾配値, 等位面の密度に比例
- ・  $\nabla \varphi$  は等位面に垂直

【4.3 発散 (divergence, ダイバージェンス)】

ベクトル場  $\mathbf{A}(x, y, z) = (A_x, A_y, A_z)$  の発散とは

$$\boxed{\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$\mathbf{A}$  が流れなら,  $\text{div } \mathbf{A}$  は単位時間・単位体積あたりの湧き出し量を表す. ( $\text{div } \mathbf{A} < 0$  なら, 流れは吸い込まれている.)

【注】「 $y = \frac{1}{x^2}$  は  $x \rightarrow 0$  で  $+\infty$  に発散する」という文の「発散」とは意味が異なる. 英語の “divergence” も, 「無限大になること (収束しないこと)」と「湧き出し」の両方の意味を持つ.

【4.4 回転 (rotation, ローテーション)】

ベクトル場  $\mathbf{A}(x, y, z) = (A_x, A_y, A_z)$  の回転とは

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}}$$

$$= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$\mathbf{A}$  が流れを表すなら,  $\text{rot } \mathbf{A}$  は その流れの各点における渦の方向と強さ (渦度または循環密度と呼ぶ) を表す.

【注】 $\text{rot } \mathbf{A}$  のことを  $\text{curl } \mathbf{A}$  と表記する書物もある.

【4.5 場の微分公式】

$\varphi, \psi$  をスカラー場,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  をベクトル場とすると,

分配則 (distributive law)

1.  $\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi$
2.  $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
3.  $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$

スカラー乗法 (scalar multiplication) の微分則

4.  $\nabla(\varphi\psi) = (\nabla\varphi)\psi + \varphi(\nabla\psi)$
5.  $\nabla \cdot (\varphi\mathbf{A}) = (\nabla\varphi) \cdot \mathbf{A} + \varphi(\nabla \cdot \mathbf{A})$
6.  $\nabla \times (\varphi\mathbf{A}) = (\nabla\varphi) \times \mathbf{A} + \varphi(\nabla \times \mathbf{A})$

合成関数の微分法 (“chain rule”)

$$7. \nabla f(\varphi) = \frac{df}{d\varphi} \nabla\varphi$$

参考: その他の公式 (覚える必要はない)

8.  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
9.  $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$
10.  $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$

場の2階微分

1. ラプラシアン (Laplacian, ラプラス演算子)

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta\varphi = \text{div}(\text{grad } \varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

球対称な場の勾配とラプラシアン

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

$$\nabla f(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{d}{dr} f(r)$$

$$\Delta f(r) = \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) f(r)$$

ラプラシアンが零であるスカラー場を調和関数と呼ぶ。

2. 恒等的に零になるもの

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla\varphi) &= \text{rot}(\text{grad } \varphi) = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) = 0 \end{aligned}$$

3. その他 (特に名称はなく, 恒等的に零でもない)

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{A})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

【注】  $(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A} = (\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z)$

$$\Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}$$

【4.6 線積分】 (curvilinear integral)

1. 曲線  $C = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), a \leq t \leq b\}$  上での線積分

$$I_C = \int_C \varphi(\mathbf{r}) ds = \int_a^b \varphi(\mathbf{r}(t)) \frac{ds}{dt} dt$$

$$\text{ただし } \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$$

2. ベクトル場  $\mathbf{A}$  の曲線  $C$  上での接線線積分

$$I_C = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$

$t$  を曲線  $C$  の接線単位ベクトルとすれば

$$d\mathbf{r} = \mathbf{t} ds \text{ なので } I_C = \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds \text{ とも書く.}$$

$$\text{また, } A_t = \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} \text{ として } I_C = \int_C A_t ds \text{ とも書く.}$$

3. その他の形の線積分もある. 例えば:

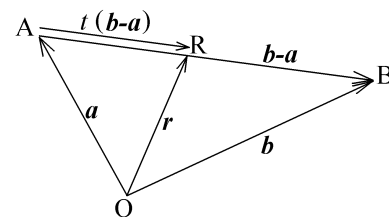
$$I_C = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$

補足: 線分のパラメータ表示

線分  $AB$  上の任意の点  $R$  の位置ベクトル  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OR}$  は,

$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$  とし,  $t$  をパラメータとして,

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \quad (0 \leq t \leq 1)$$



と表示できる. 「曲線  $C$ 」が「線分  $AB$ 」のときの接線線積分は, この表示を利用して下式で計算できる.

$$\int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{A}(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) dt$$

【4.7 スカラーポテンシャル】 (scalar potential)

$$I_C = \int_C \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1)$$

C :  $\mathbf{r}_1$  を始点,  $\mathbf{r}_2$  を終点とする曲線

$\mathbf{A}$  : ベクトル場,  $\varphi$  : スカラー場.

但し,  $\mathbf{A} = \nabla\varphi$  が成り立つとする.

- $I_C$  は C の始点と終点だけで決まり, 途中の経路の取り方によらないことに注目. 例えば山道に沿って勾配を積分すると出発点と到着点の高低差という登山ルートに依らない量が得られるように.
- 証明は, 1年生で習った下記の偏微分公式を出発点とすれば自明である.  $f = f(x, y, z)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  のとき,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

- $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$  のとき  $\mathbf{A} = \nabla\varphi$  を満たす  $\varphi$  が存在する. 証明には後述の Stokes の定理が必要である.
- $-\varphi$  を  $\mathbf{A}$  の スカラーポテンシャル と呼ぶ.

【4.8 面積分】 (surface integral)

1. 曲面  $S = \{\mathbf{r} \mid \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), (u, v) \in D\}$  上での 面積分 :

$$I_S = \int_S \varphi(\mathbf{r}) dS = \iint_D \varphi(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$$

- $\varphi = 1$  とした  $\int_S dS$  は, 曲面 S の面積である.

2. ベクトル場  $\mathbf{A}$  の曲面 S 上での 法線面積分 :

$$I_S = \int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv$$

$\mathbf{n}$  を曲面 S の法線単位ベクトルとすれば

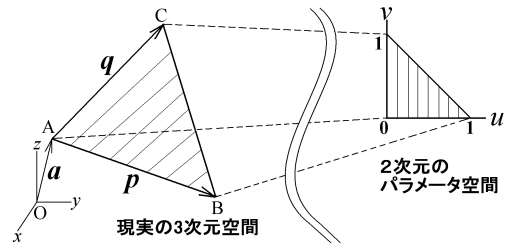
- $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$  なので  $I_S = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$  とも書く.
- $A_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$  として  $I_S = \int_S A_n dS$  とも書く.

補足 : 三角形 および 平行四辺形 のパラメータ表示

点 A, B, C を頂点とする三角形内にある任意の点 R の位置ベクトル  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OR}$  は,  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\mathbf{p} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\mathbf{q} = \overrightarrow{AC}$  とし,  $u, v$  をパラメータとして,

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + u\mathbf{p} + v\mathbf{q} \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u)$$

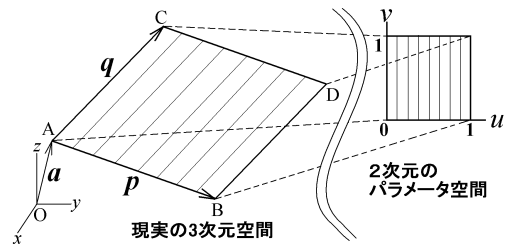
と表示できる.



点 D を  $\overrightarrow{OD} = \mathbf{a} + \mathbf{p} + \mathbf{q}$  と定めると閉じた折れ線 ABDC は平行四辺形になる. この平行四辺形内にある任意の点 R の位置ベクトル  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OR}$  は,

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + u\mathbf{p} + v\mathbf{q} \quad (0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1)$$

とパラメータ表示できる.



【4.9 ストークスの定理】 (Stokes' theorem)

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

$\mathbf{A}$  : ベクトル場

C : 閉曲線

S : C を縁とする曲面

$d\mathbf{S}$  : S の面積素ベクトル.

右ネジが C の巻く向きに回るとき進む向きを向く.

- この定理の意味は「曲面上で渦度を法線面積分すると, 曲面の縁に沿っての流れの接線線積分 (縁に沿っての循環) に等しくなる」であるが, 「rot が渦度=循環密度であること」を認めれば, 「循環密度を積分すると循環が得られる」という自明な主張となる. 逆に言えば, この定理こそが rot を渦度=循環密度と解釈することの最も確かな根拠なのである.

【4.10 体積積分】 (volume integral)

$$I_V = \int_V f(\mathbf{r}) dv$$

V : 体積領域 (3次元領域)

dv : 体積要素

・  $v$  は volume(体積) に由来する. 曲面の表示パラメータの変数名として  $u, v$  をよく使うが, その  $v$  とは無関係である.

・  $dv$  の代わりに  $d^3r$  と書く人もいる. 「 $d^3r$ 」でひとつの記号であり, 「 $d^3$ 」に明確な定義はない.

・ 「 $d\mathbf{r}$ 」( $\mathbf{r}$  はボールド体) と書く流儀もあるが, 薦めない.

スカラー量である体積要素を, ベクトル量である(線積分で使う)線素と同じボールド体の記号で表すことは不適切と考える人が多い.

1. デカルト座標の場合

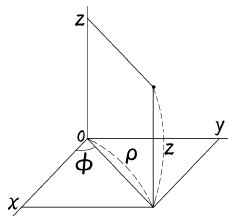
$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad dv = dx dy dz$$

$V = \{\mathbf{r} \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$  (直方体) ならば

$$I_V = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz f(x, y, z)$$

2. 円柱座標の場合

$$\mathbf{r} = (\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z), \quad dv = \rho d\rho d\phi dz$$



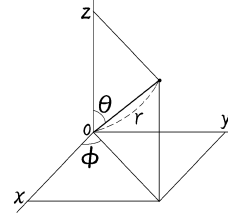
$V = \{\mathbf{r} \mid 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq z \leq c\}$  (円柱の内部) ならば

$$I_V = \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^c dz f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi, z)$$

3. 球座標 (3次元極座標) の場合

$$\mathbf{r} = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$



$V = \{\mathbf{r} \mid 0 \leq r \leq a\}$  (球の内部) ならば

$$I_V = \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \cdot f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$$

補足 : 一般の座標  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, b, c)$  の場合

$$dv = |\det J| da db dc, \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{pmatrix}$$

$J$  はヤコビ行列.  $\det J$  は  $J$  の行列式 (ヤコビ行列式) で,

$$\det J = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial c} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial b} \right)$$

のようにスカラー三重積の形にも書き表せる.

$|\det J|$  はヤコビ行列式の絶対値である.

【4.11 ガウスの (発散) 定理】 (Gauss's theorem)

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

$\mathbf{A}$  : ベクトル場

$S$  : 閉曲面

$V$  :  $S$  の内部の体積領域

$d\mathbf{S}$  :  $S$  の面積素ベクトルで,  $S$  の内部から外部に向かう向きにとる.

- $\text{div}$  を湧き出しと解釈できるなら, この定理は「内部の湧き出し量を積分すると, 表面からの流出量に等しくなる」という自明な主張となる. 逆に言えば, この定理により  $\text{div}$  の湧き出しという解釈の妥当性がさらに高められたのである.