応 用 数 学 C　定 期 試 験　答 案 用 紙 (全4頁中の1頁目)

福井大学工学部機械・システム工学科2年生 対象、　担当教員 田嶋、　2017年8月2日1限実施

【1】 $\vec{A} = (yz,\ xz,\ z^3)$ のとき、$\mathrm{div}\,\vec{A}$ および $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ を求めよ。(10点)

【2】 $\varphi = \sin(x + 2y + 3z)$ のとき、$\mathrm{grad}\,\varphi$ および $\triangle\varphi$ を求めよ。但し、$\triangle$ はラプラス演算子である。(10点)

【3】 点Aの座標を $(4,\ 4,\ -2)$、点Bの座標を $(-5,\ -4,\ -2)$、点Cの座標を $(-1,\ -1,\ 0)$ とするとき、三角形ABCの面積 S を求めよ。(10点)

【4】 点Aの座標を $(4,\ 4,\ -2)$、点Bの座標を $(-5,\ -4,\ -2)$、点Cの座標を $(-1,\ -1,\ 0)$ とし、三角形ABCの法線単位ベクトルを $\vec{n}$ とする。ただし $\vec{n}$ の向きは、$\vec{n}$ の z 成分が正となる向きとする。このときベクトル $\vec{p} = (3, 2, 1)$ の $\vec{n}$ 方向の成分 p_{n} を求めよ。(10点)

学科	機械・システム工	学籍番号									氏名		得点	[1]	[2]	[3]	[4]	合計

応 用 数 学 C　定 期 試 験　答 案 用 紙 (全4頁中の2頁目)

福井大学工学部機械・システム工学科 2 年生 対象、　担当教員 田嶋、　2017 年 8 月 2 日 1 限実施

【5】 $\vec{A}$ を一変数 t のベクトル関数とし、$\vec{A}' = \frac{d}{dt}\vec{A},\ \vec{A}'' = \frac{d^2}{dt^2}\vec{A},\ \vec{A}''' = \frac{d^3}{dt^3}\vec{A},\ \vec{A}'''' = \frac{d^4}{dt^4}\vec{A}$ とする。このとき、不定積分 $\int \vec{A} \times \vec{A}''''dt$ を $\vec{A}$, $\vec{A}'$, $\vec{A}''$, $\vec{A}'''$ を使い、積分記号 $(\int \cdots dt)$ を使わずに表せ。積分定数ベクトルは $\vec{c}$ とせよ。(10 点)

【6】 xyz 空間内の曲線 (線分) C$=\{(x, y, z)\,|\,x = t,\ y = 1 - t,\ z = -t,\ 0 \le t \le 1\}$ に沿っての、ベクトル場 $\vec{A} = \left(y,\ -x,\ xz^2\right)$ の接線線積分 $I_{\mathrm{C}} = \displaystyle\int_{\mathrm{C}} \vec{A} \cdot d\vec{r}$ の値を求めよ。ただし、C の始点は $t = 0$ に対応する点、C の終点は $t = 1$ に対応する点とする。(10 点)

学科	機械・システム工

得点	[5]	[6]	合計

【7】 曲面 S を、$\mathrm{S} = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, x = u + \frac{1}{2}v^2,\ y = v + \frac{1}{2}u^2,\ z = u,\ u_1 \le u \le u_2,\ v_1 \le v \le v_2 \right\}$ と定める。曲面 S の面積 S が $S = \int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2} dv F(u,v)$ と表されるように、2変数 u, v の関数 $F(u,v)$ を定めよ。(10点)

【8】 曲面Sを、$\mathrm{S} = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, x = u + \frac{1}{2}v^2,\ y = v + \frac{1}{2}u^2,\ z = u,\ 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1 \right\}$ と定める。
ただし、Sの表・裏は次のように定める: $(u,v) = (0,0)$ に対応する点 (即ち $(x,y,z) = (0,0,0)$) におけるSの法線ベクトルが表（おもて）側を向いているとき、その z 成分は正であるとする。
このとき、ベクトル場 $\vec{A} = \left(0,\ -x,\ z\right)$ の、S上での法線面積分 $I_{\mathrm{S}} = \int_{\mathrm{S}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$ の値を求めよ。(10点)

学科	機械・システム工	学籍番号								氏名		得点	[7]	[8]	合計

【9】 座標原点 $(x,y,z)=(0,0,0)$ を中心とし半径が 1 の球の内部の領域のうち、$z \leq 0$ である部分を V とする。スカラー場 $f(x,y,z)=z^3$ の、領域 V での体積積分 $I_{\mathrm{V}}=\int_{\mathrm{V}} f(x,y,z)\,dxdydz$ の値を求めよ。(10 点)

【10】 3 次元領域 $V=\{(x,y,z)\,|\,0 \leq z \leq 1,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq 1-z\}$ の表面を S とする。ただし、S の表（おもて）面は V の外部の領域に面した側とする。このとき、ベクトル場 $\vec{A}=(y^4,x^4,z^4)$ の曲面 S 上での法線面積分 $I_{\mathrm{S}}=\int_{\mathrm{S}} \vec{A}\cdot d\vec{S}$ を求めよ。（ヒント：ガウスの発散定理）(10 点)

学科	機械・システム工

得点	[9]	[10]	合計

応 用 数 学 C　定 期 試 験　答 案 用 紙 (全 4 頁中の 1 頁目)

福井大学工学部機械・システム工学科 2 年生 対象、　担当教員 田嶋、　2017 年 8 月 2 日 1 限実施

【1】 $\vec{A} = (yz,\ xz,\ z^3)$ のとき、$\mathrm{div}\,\vec{A}$ および $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ を求めよ。(10 点)

解答例

$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3)$

$= 0 + 0 + 3z^2 = 3z^2 \quad \cdots$(答)

$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(z^3) - \frac{\partial}{\partial z}(xz),\ \frac{\partial}{\partial z}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}(z^3),\ \frac{\partial}{\partial x}(xz) - \frac{\partial}{\partial y}(yz)\right)$

$= (0 - x,\ y - 0,\ z - z) = (-x, y, 0) \quad \cdots$(答)

【2】 $\varphi = \sin(x + 2y + 3z)$ のとき、$\mathrm{grad}\,\varphi$ および $\triangle\varphi$ を求めよ。但し、$\triangle$ はラプラス演算子である。(10 点)

解答例

$\mathrm{grad}\,\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\sin(x + 2y + 3z),\ \frac{\partial}{\partial y}\sin(x + 2y + 3z),\right.$

$\left.\frac{\partial}{\partial z}\sin(x + 2y + 3z)\right)$

$= \left(\cos(x + 2y + 3z),\ 2\cos(x + 2y + 3z),\ 3\cos(x + 2y + 3z)\right)$

$\cdots$(答)

$\triangle\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\cos(x + 2y + 3z) + \frac{\partial}{\partial y}(2\cos(x + 2y + 3z))$

$+ \frac{\partial}{\partial z}(3\cos(x + 2y + 3z))$

$= -\sin(x + 2y + 3z) - 4\sin(x + 2y + 3z) - 9\sin(x + 2y + 3z)$

$= -14\sin(x + 2y + 3z) \cdots$(答)

【3】 点 A の座標を (4, 4, −2)、点 B の座標を (−5, −4, −2)、点 C の座標を (−1, −1, 0) とするとき、三角形 ABC の面積 S を求めよ。(10 点)

解答例

$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (5, 5, -2)$

$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = (-4, -3, -2)$

$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \times \overrightarrow{\mathrm{CB}} = (-16, 18, 5)$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}} \times \overrightarrow{\mathrm{CB}}\right| = \sqrt{256 + 324 + 25} = \sqrt{605} = 11\sqrt{5}$

$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}} \times \overrightarrow{\mathrm{CB}}\right| = \frac{11\sqrt{5}}{2} \quad \cdots$(答)

【4】 点 A の座標を (4, 4, −2)、点 B の座標を (−5, −4, −2)、点 C の座標を (−1, −1, 0) とし、三角形 ABC の法線単位ベクトルを $\vec{n}$ とする。ただし $\vec{n}$ の向きは、$\vec{n}$ の z 成分が正となる向きとする。このときベクトル $\vec{p} = (3, 2, 1)$ の $\vec{n}$ 方向の成分 p_{n} を求めよ。(10 点)

解答例

$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}} \times \overrightarrow{\mathrm{CB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}} \times \overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|} = \frac{1}{11\sqrt{5}}(-16, 18, 5)$

$p_{\mathrm{n}} = \vec{p} \cdot \vec{n} = \frac{1}{11\sqrt{5}}(-48 + 36 + 5) = -\frac{7}{11\sqrt{5}}$

$p_{\mathrm{n}} = -\frac{7}{11\sqrt{5}} = -\frac{7\sqrt{5}}{55} \quad \cdots$(答)

学科	機械・システム工	学籍番号		氏名		得点	[1]	[2]	[3]	[4]	合計

【5】 $\vec{A}$ を一変数 t のベクトル関数とし、$\vec{A}' = \frac{d}{dt}\vec{A}$, $\vec{A}'' = \frac{d^2}{dt^2}\vec{A}$, $\vec{A}''' = \frac{d^3}{dt^3}\vec{A}$, $\vec{A}'''' = \frac{d^4}{dt^4}\vec{A}$ とする。このとき、不定積分 $\int \vec{A} \times \vec{A}''''dt$ を $\vec{A}$, $\vec{A}'$, $\vec{A}''$, $\vec{A}'''$ を使い、積分記号 ($\int \cdots dt$) を使わずに表せ。積分定数ベクトルは $\vec{c}$ とせよ。(10点)

解答例

部分積分法を使って、

$\int \vec{A} \times \vec{A}''''dt$

$= \vec{A} \times \vec{A}''' - \int \vec{A}' \times \vec{A}'''dt$

$= \vec{A} \times \vec{A}''' - \vec{A}' \times \vec{A}'' + \int \vec{A}'' \times \vec{A}''dt$

$= \vec{A} \times \vec{A}''' - \vec{A}' \times \vec{A}'' + \int \vec{0}dt$

$= \vec{A} \times \vec{A}''' - \vec{A}' \times \vec{A}'' + \vec{c} \cdots$(答)

【6】 xyz 空間内の曲線 (線分) C=$\{(x,y,z)\,|\,x=t,\ y=1-t,\ z=-t,\ 0 \le t \le 1\}$ に沿っての、ベクトル場 $\vec{A} = \left(y,\ -x,\ xz^2\right)$ の接線線積分 $I_{\mathrm{C}} = \displaystyle\int_{\mathrm{C}} \vec{A} \cdot d\vec{r}$ の値を求めよ。ただし、C の始点は $t=0$ に対応する点、C の終点は $t=1$ に対応する点とする。(10点)

解答例

$I_{\mathrm{C}} = \int_0^1 \vec{A} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\,dt$

$= \int_0^1 \left(1-t,\ -t,\ t^3\right) \cdot (1,\ -1,\ -1)\ dt$

$= \int_0^1 \left(1-t^3\right)\ dt$

$= \left[t - \frac{1}{4}t^4\right]_{t=0}^{t=1}$

$= \frac{3}{4}\ \cdots$(答)

学科	機械・システム工

得点

[5]	[6]	合計

【7】 曲面 S を、$\mathrm{S} = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, x = u + \frac{1}{2}v^2,\ y = v + \frac{1}{2}u^2,\ z = u,\ u_1 \le u \le u_2,\ v_1 \le v \le v_2 \right\}$ と定める。曲面 S の面積 S が $S = \displaystyle\int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2} dv F(u,v)$ と表されるように、2 変数 u, v の関数 $F(u,v)$ を定めよ。(10 点)

解答例

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (1,\ u,\ 1)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (v,\ 1,\ 0)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-1,\ v,\ 1-uv)$

$S = \int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2} dv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|$

$= \int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2} dv \sqrt{(-1)^2 + v^2 + (1-uv)^2}$

$F(u,v) = \sqrt{1 + v^2 + (1-uv)^2} = \sqrt{u^2v^2 + v^2 - 2uv + 2}$ ⋯(答)

【8】 曲面 S を、$\mathrm{S} = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, x = u + \frac{1}{2}v^2,\ y = v + \frac{1}{2}u^2,\ z = u,\ 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1 \right\}$ と定める。
ただし、S の表・裏は次のように定める: $(u,v) = (0,0)$ に対応する点 (即ち $(x,y,z) = (0,0,0)$) における S の法線ベクトルが表(おもて)側を向いているとき、その z 成分は正であるとする。
このとき、ベクトル場 $\vec{A} = \left(0,\ -x,\ z\right)$ の、S 上での法線面積分 $I_{\mathrm{S}} = \displaystyle\int_{\mathrm{S}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$ の値を求めよ。(10 点)

解答例

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (1,\ u,\ 1)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (v,\ 1,\ 0)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-1,\ v,\ 1-uv)$

$I_{\mathrm{S}} = \int_0^1 du \int_0^1 dv \vec{A} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)$

$= \int_0^1 du \int_0^1 dv \left(0,\ -u - \frac{1}{2}v^2,\ u\right) \cdot (-1,\ v,\ 1-uv)$

$= \int_0^1 du \int_0^1 dv \left(-uv - \frac{1}{2}v^3 + u - u^2 v\right)$

$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{24}$ ⋯(答)

学科	機械・システム工	学籍番号									氏名		得点	[7]	[8]	合計

【9】 座標原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ を中心とし半径が1の球の内部の領域のうち、$z \le 0$ である部分をVとする。スカラー場 $f(x, y, z) = z^3$ の、領域Vでの体積積分 $I_{\mathrm{V}} = \displaystyle\int_{\mathrm{V}} f(x, y, z)\, dxdydz$ の値を求めよ。(10点)

解答例

球座標 (3次元極座標) r, θ, φ を使うと、$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta,$

$dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi,\ f = z^3 = r^3\cos^3\theta$ である。

$I_{\mathrm{V}} = \int_0^1 dr\ \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta\ \int_0^{2\pi} d\varphi\, r^2\sin\theta \cdot r^3\cos^3\theta$

$= \int_0^1 r^5 dr\ \int_{\pi/2}^{\pi}\cos^3\theta\sin\theta\, d\theta\ \int_0^{2\pi} d\varphi$

$= \left[\frac{1}{6}r^6\right]_{r=0}^{r=1}\left[-\frac{1}{4}\cos^4\theta\right]_{\theta=\pi/2}^{\theta=\pi}\cdot 2\pi$

$= \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 2\pi = -\frac{\pi}{12}\ \cdots$(答)

【10】 3次元領域 $V = \{(x, y, z)\,|\,0 \le z \le 1,\ \sqrt{x^2+y^2} \le 1 - z\}$ の表面をSとする。ただし、Sの表（おもて）面は V の外部の領域に面した側とする。このとき、ベクトル場 $\vec{A} = (y^4, x^4, z^4)$ の曲面S上での法線面積分 $I_{\mathrm{S}} = \displaystyle\int_{\mathrm{S}} \vec{A}\cdot d\vec{S}$ を求めよ。（ヒント：ガウスの発散定理）(10点)

解答例

ガウスの発散定理により、$I_{\mathrm{S}} = \int_{\mathrm{V}} \mathrm{div}\vec{A} dv = 4\int_{\mathrm{V}} z^3 dv$

円柱座標 ρ, φ, z を使うと、$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z,\ dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz$ である。

$I = 4\int_0^1 dz\ \int_0^{1-z} d\rho\ \int_0^{2\pi} d\varphi\ \rho z^3$

$= 8\pi\int_0^1 dz\ z^3\ \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_{\rho=0}^{\rho=1-z}$

$= 8\pi\int_0^1 dz\ z^3\ \frac{1}{2}(1-z)^2$

$= 4\pi\int_0^1 dz\ \left(z^3 - 2z^4 + z^5\right)$

$= 4\pi\left[\frac{1}{4}z^4 - \frac{2}{5}z^5 + \frac{1}{6}z^6\right]_{z=0}^{z=1}$

$= 4\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{15}\ \cdots$(答)

学科	機械・システム工

得点

[9]	[10]	合計