(2016 年度用)

福井大学工学部機械工学科２年生対象授業

応用数学 Ⅲ　(内容：ベクトル解析)

配布資料　　(担当教員 田嶋直樹)

要点

例題

要点 p.0～10 は重要事項のまとめです．例題 p.1～9 は場の積分計算の例題およびその解法です．場の積分計算以外の計算問題とその解答は, 印刷配布せず, 講義中に黒板に板書する形で示します．場の積分計算問題についてのみ印刷して配布する理由は, 板書をノートに写してもらうには解答の分量が多すぎる（という学生からの改善要望が毎年多く寄せられた）からです．また, 定期試験が近いので, 板書写しの作業を課さなくても授業に注意を集中してくれるだろうという期待もあります．もっと練習問題が欲しい方は, やはり WEB 公開している過去の試験問題 (解答付き) を御利用ください．

応用数学 III 講義配布資料 (要点 p. 0)

【 講義の章立て 】

第 1 章 ベクトルの代数
1.1 ベクトルとは
1.2 ベクトルの成分表示
1.3 内積
1.4 外積
1.5 3 つのベクトルの積

第 2 章 一変数ベクトル関数の微分と積分
2.1 ベクトル関数の微分
2.2 ベクトル関数の積分

第 3 章 曲線と運動
3.1 点の運動
3.2 空間曲線
3.3 曲面

第 4 章 場
4.1 場とは
4.2 勾配
4.3 発散
4.4 回転
4.5 場の微分公式
《ここで必要に応じて多重積分の復習を行う》
4.6 線積分
4.7 面積分
4.8 スカラーポテンシャル
(および線積分の練習)
4.9 ストークスの定理
(および面積分と線積分の練習)
4.10 体積積分
(デカルト座標・円柱座標・球座標の場合)
4.11 ガウスの発散定理
(および体積積分と面積分の練習)

《定期試験》

【 試験と成績評価 】

成績評価に用いる総合点は,

(総合点) = (定期試験得点 (100 点満点)) + (平常点)

として計算します.

平常点は, 授業中に指名されたときの応答を評価したもので, 指名する度に,

▽ −1 点 : 指名時に不在/宿題を全く解いてこなかった

▽ 1 点 : 口頭で質問に答えた/宿題の一部をノートに解いてきたが, 当てられた問題については, 解いてこなかった.

▽ 2 点 : 宿題を黒板に解いてみせたが, 完全な正解ではなかった.

▽ 3∼4 点 : 宿題を黒板に解いてみせ, 完全な正解であった.

として計算します.

総合点を下記の工学部基準にあてはめて成績評価をします.

△ 総合点が 90 点以上で秀,

△ 総合点が 90 点未満かつ 80 点以上で優,

△ 総合点が 80 点未満かつ 70 点以上で良,

△ 総合点が 70 点未満かつ 60 点以上で可,

△ 総合点が 60 点未満で不可です.

ただし, 工学部の規程により, 欠席回数が 5 回以上の場合は, 総合点にかかわらず, 成績は不可にします. しかし特別な事情がある場合は相談に応じます.

なお, 出席調査では, カードリーダーを利用しますので, 毎回の講義が始まる前に忘れずにカードリーダーに学生証を通して下さい.

追試験は, 不合格者が次年度の授業に支障があるほど多い場合にしか実施しません. また, 追試験で仮に満点をとったとしても, 成績は「可」にしかなりません(教務課に報告する成績素点は合格最低点の 60 点です). 受講者の皆さんには, 決して追試験をあてにせず, 十分な日数をかけて試験勉強をした上で定期試験を受けて欲しいと切に思います.

なお, 下記の WEB ページにて過去の試験問題と解答・解説などの参考資料を公開していますので, 練習問題として, この科目の勉強に役立てて下さい.

http://apphy.u-fukui.ac.jp/∼tajima/va/index.html

応用数学 III 講義配布資料 (要点 p. 1) : 活字の種類 / ギリシャ文字

アルファベットの活字の種類の主要なものとして Roman(立体) と Italic (斜体) があり, 更に, 両者のそれぞれに Bold(肉太活字. 略して「太字（ふとじ）」と言う人が多い）版がある. Roman 体活字は文章を表記するために用いる. Italic 体活字は数式中の記号を表すのに用いる. Bold Italic 体活字は数式で用いる記号がベクトル量を表す場合に用いる. 活字の種類が判別し難い人のために, 3 字体を表にして下記に示す.

Roman	ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZabcdefghijklmnopqrstuvwxyz
Italic	*ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZabcdefghijklmnopqrstuvwxyz*
Bold Italic	***ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZabcdefghijklmnopqrstuvwxyz***

手書きでは, Roman 体と Italic 体を書き分けることはない. 一方, Bold 体は, 一本余分に線を書き加えた「黒板太字 (blackboard bold)」体と呼ばれるもので代替する. 例: $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$

この講義では使わないが, 数学で使われることのある他の字体にドイツ文字 (Fraktur) がある. この字体では A〜Z は $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}\ \mathfrak{D}\ \mathfrak{E}\ \mathfrak{F}\ \mathfrak{G}\ \mathfrak{H}\ \mathfrak{I}\ \mathfrak{J}\ \mathfrak{K}\ \mathfrak{L}\ \mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{O}\ \mathfrak{P}\ \mathfrak{Q}\ \mathfrak{R}\ \mathfrak{S}\ \mathfrak{T}\ \mathfrak{U}\ \mathfrak{V}\ \mathfrak{W}\ \mathfrak{X}\ \mathfrak{Y}\ \mathfrak{Z}$, a〜z は $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{e}\ \mathfrak{f}\ \mathfrak{g}\ \mathfrak{h}\ \mathfrak{i}\ \mathfrak{j}\ \mathfrak{k}\ \mathfrak{l}\ \mathfrak{m}\ \mathfrak{n}\ \mathfrak{o}\ \mathfrak{p}\ \mathfrak{q}\ \mathfrak{r}\ \mathfrak{s}\ \mathfrak{t}\ \mathfrak{u}\ \mathfrak{v}\ \mathfrak{w}\ \mathfrak{x}\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{z}$ である. 数式ではドイツ文字は対応するローマ文字とは別の記号として扱われる.

記号に使う文字の種類が足りず, 通常のアルファベット（ローマ文字）以外の文字を使いたい場合は, 数学では通常はまずギリシャ文字を使う. ギリシャ文字 (24 字) の中にはローマ文字 (26 字) と形が同一ないし良く似た文字があるが, 見分けにくいので普通はそれらは使わず, ローマ文字と判別しやすい形のギリシャ文字だけが使われる. 下記にギリシャ文字を数学での使われ方で分類して示す. 小文字・大文字それぞれについて, 左側に非ボールド体, 右側にボールド体を示す. 小文字に 2 種類ある場合は, 右側は「異字体」と呼ばれるものである. 数式では異字体は別々の記号として扱われる. 丸括弧で囲んだ文字はローマ文字と同一である.

小文字		大文字		英語での綴り方	日本語での読み方	数式での良くある使われ方
α	$\boldsymbol{\alpha}$	(A)	$(\boldsymbol{A})$	alpha	アルファ	a, b, c, d, e で表された量に対応する
β	$\boldsymbol{\beta}$	(B)	$(\boldsymbol{B})$	beta	ベータ	量を表す記号として, それぞれ, α,
γ	$\boldsymbol{\gamma}$	Γ	$\boldsymbol{\Gamma}$	gamma	ガンマ	$\beta, \gamma, \delta, \epsilon$ が良く用いられる.
δ	$\boldsymbol{\delta}$	Δ	$\boldsymbol{\Delta}$	delta	デルタ	但し, 文字としての本来の対応関
ϵ, ε	$\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}$	(E)	$(\boldsymbol{E})$	epsilon	イプシロン	係で言えば, γ は g に対応する.
κ	$\boldsymbol{\kappa}$	(K)	$(\boldsymbol{K})$	kappa	カッパ	k, l, m, n で表された量に対応する量
λ	$\boldsymbol{\lambda}$	Λ	$\boldsymbol{\Lambda}$	lambda	ラムダ	を表す記号として, それぞれ, κ, λ,
μ	$\boldsymbol{\mu}$	(M)	$(\boldsymbol{M})$	mu	ミュー	μ, ν が良く用いられる. これは文字
ν	$\boldsymbol{\nu}$	(N)	$(\boldsymbol{N})$	nu	ニュー	の本来の対応関係の通りである.
ξ	$\boldsymbol{\xi}$	Ξ	$\boldsymbol{\Xi}$	xi	グザイ, クサイ, クシー	x, y, z に対応させて ξ, η, ζ を用い,
η	$\boldsymbol{\eta}$	(H)	$(\boldsymbol{H})$	eta	イータ, エータ	r に対応させて ρ を用いる.
ζ	$\boldsymbol{\zeta}$	(Z)	$(\boldsymbol{Z})$	zeta	ゼータ, ツェータ	但し, 本来は η には h が対応する.
ρ, ϱ	$\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varrho}$	(P)	$(\boldsymbol{P})$	rho	ロー	ρ は動径以外には, 密度を表すのによく使われる.
σ, ς	$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varsigma}$	Σ	$\boldsymbol{\Sigma}$	sigma	シグマ	π は円周率, Σ は総和記号, Π は総
π, ϖ	$\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\varpi}$	Π	$\boldsymbol{\Pi}$	pi	パイ	乗記号. σ は s に, π は p に対応する.
τ	$\boldsymbol{\tau}$	(T)	$(\boldsymbol{T})$	tau	タウ	t に関係のある量に τ が用いられる.
ω	$\boldsymbol{\omega}$	Ω	$\boldsymbol{\Omega}$	omega	オメガ	角速度. Ω は電気抵抗の単位にも.
θ, ϑ	$\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta}$	Θ	$\boldsymbol{\Theta}$	theta	シータ	θ, ϕ, ψ, χ は角度を表すのに良く用
ϕ, φ	$\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\varphi}$	Φ	$\boldsymbol{\Phi}$	phi	ファイ	いられる. θ は階段 (Heaviside) 関
ψ	$\boldsymbol{\psi}$	Ψ	$\boldsymbol{\Psi}$	psi	プサイ, プシー	数をも表す. ϕ, ψ, χ は一般の
χ	$\boldsymbol{\chi}$	(X)	$(\boldsymbol{X})$	chi	カイ	関数を表す記号としても好まれる.
υ	$\boldsymbol{\upsilon}$	Υ	$\boldsymbol{\Upsilon}$	upsilon	ウプシロン	υ は v(ブイ) と混同されやすい.
ι	$\boldsymbol{\iota}$	(I)	$(\boldsymbol{I})$	iota	イオタ	ι は手書きだと何の字か判別し難い.
(o)	$(\boldsymbol{o})$	(O)	$(\boldsymbol{O})$	omicron	オミクロン	ローマ字のオーとの区別がない.

応用数学 III 講義配布資料 (要点 p. 2)

【 1.1 ベクトルとは 】

1. 定義

- ベクトル : 大きさ と 方向 を持つ量.
- スカラー : 大きさ だけを持つ量.

【補足】 方向 (direction) と 向き (sense)

【補足】 「束縛ベクトル」という拡張概念を別に導入する書物もある. その場合は上で定義したものは「自由ベクトル」と呼ぶ. 束縛ベクトルとは大きさ と 方向に加えて位置（変位ベクトルなら始点）の情報を持つものだと考えておけばよいだろう. さほど便利な概念ではないので本講義では導入しない.

2. 例

- ベクトル ： 変位，速度，加速度，力，
  角速度，$\cdots$
- スカラー ： 質量，電荷，温度，$\cdots$

【補足】 「大きさ」は「長さ（距離）」とは限らない

【補足】 しかし,「方向」の意味はどのベクトルでも共通（例えば我々のいる 3 次元空間での方向を意味する）とすれば, ベクトル等式は系を (全ての物を同時に) 回転させてもやはり成立する（回転不変性を持つ）.

3. 記法

A がベクトル量であることが，ひと目でわかるように工夫する習慣が広くゆきわたっている.

i) 太字 (bold face) にする. $\cdots$ $\boldsymbol{A}$ 　手書きの例 : $\mathbb{A}$

i′) 太字化を指示する校正記号. $\cdots$ A

ii) 上に矢印をのせる. $\cdots$ $\vec{A}$

【補足】 点 A から点 B に向かう有向線分は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書く.
ちなみに $\overline{\mathrm{AB}}$ は AB 間の距離を表す.
(高校の数学では $\overline{\mathrm{AB}}$ を単に AB と表記しましたが, それが唯一正式な記法というわけではないのです.)

4. 相等 ： $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

$\Leftrightarrow$ 大きさが等しくかつ 方向が等しい

5. 大きさ ： $|\boldsymbol{A}|$ で表す.

6. 零ベクトル ： $|\boldsymbol{0}|=0$

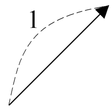
方向を持たないが，ベクトルに含める.

(→ 定義 1 と 4 の修正. 数学理論としての整理・整頓)

【注意】 零ベクトル $\boldsymbol{0}$ と スカラーの零 0 を, 読んだ人が一目で区別できるように書き分けよ.

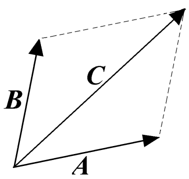
7. 単位ベクトル ：

大きさが 1 のベクトル. 種々の計算で役立つ.

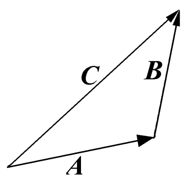


8. 加法

$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$



平行四辺形則

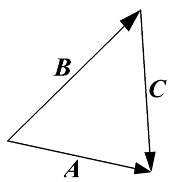


「接ぎ足し則」

- $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ (交換則)
  平行四辺形則のもつ対称性から自明
- $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ (結合則)
  「接ぎ足し則」で考えると容易にわかる

9. 減法

$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ ： $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$ を満たすもの

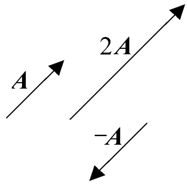


10. スカラー乗法

$\boldsymbol{B}=a\boldsymbol{A}$ ： 大きさを $|a|$ 倍し，

$a<0$ なら向きを逆転.

- $(a+b)\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{A}$ (分配則)
- $a(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=a\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{B}$ (分配則)
- $a(b\boldsymbol{A})=(ab)\boldsymbol{A}$ (結合則)



応用数学 III 講義配布資料 (要点 p. 3)

【 1.2 ベクトルの成分表示 】

1. 基本ベクトル

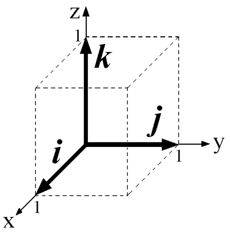
座標軸方向の単位ベクトルのこと.

$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$

あるいは

$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$

などと表記する.



$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

A_x, A_y, A_z を $\boldsymbol{A}$ の x, y, z 成分という.

【補足】 簡易記法

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

2. ベクトルの大きさ

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

【問題】三平方（ピタゴラス）の定理から導け.

3. 加法・減法・スカラー乗法

- $\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = (A_x \pm B_x, A_y \pm B_y, A_z \pm B_z)$
- $a\boldsymbol{A} = (aA_x, aA_y, aA_z)$

4. 方向余弦

$\boldsymbol{A}$ と同じ方向をもつ単位ベクトルを,

$\hat{\boldsymbol{A}}$ という記号で表すことが多い.

- $\hat{\boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \left(\frac{A_x}{|\boldsymbol{A}|}, \frac{A_y}{|\boldsymbol{A}|}, \frac{A_z}{|\boldsymbol{A}|}\right)$

$\boldsymbol{A}$ と x, y, z 軸とのなす角を α, β, γ

とすると下記の関係が成り立つ.

- $\hat{\boldsymbol{A}} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$
- $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$\hat{\boldsymbol{A}}$ の 3 成分を $\boldsymbol{A}$ の方向余弦とよぶ.

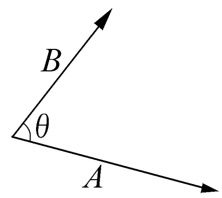
【 1.3 ベクトルの内積 】

演算の結果がスカラー値なので「スカラー積」とも呼ぶ.

演算を表す記号として「$\cdot$」を使うので「ドット積」と呼ぶ人もある.

1. 幾何学的定義

- $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$



後述の外積との区別のため,

「$\cdot$」を省略してはいけない.

ただし $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$ だけは $\boldsymbol{A}^2$ と書いてよい.

【補足】 正射影との関係

2. ベクトルの大きさとの関係

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}}$$

3. 内積の性質

- $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ (交換則)
- $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}$ (分配則)
- $\boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B}$ (分配則)
- $(c\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} = c(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$ (結合則)

【注】 $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$ という式はない. どこがいけないか？

4. 内積の成分表示

- $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

【質問】 座標軸を回転させると $A_x, A_y, A_z, B_x, B_y, B_z$ の夫々は値が変化するが, $A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ の値は変化しない. その理由を説明せよ.

5. 交角の求め方

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

【注】 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \iff \boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$ とする)

6. 基本ベクトルとの内積として成分が求まる

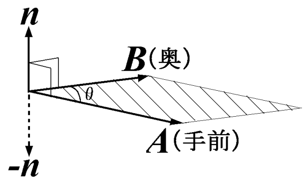
- $A_x = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{i}, \quad A_y = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j}, \quad A_z = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{k}$
- $A_{x'} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{i}', \quad A_{y'} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j}', \quad A_{z'} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{k}'$

応用数学 III 講義配布資料 (要点 p. 4)

【 1.4 ベクトルの外積 】

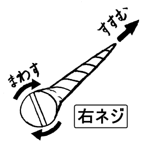
1. 幾何的定義

- $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (\,|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta\,)\,\boldsymbol{n}$



θ : $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の交角 $(0 \le \theta \le \pi)$

$\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{A}$ にも $\boldsymbol{B}$ にも垂直な単位ベクトルで, 180° 以内の回転で $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{B}$ に重ねようとするとき, その回転で右ネジの進む向きのもの



【補足】 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$ は, $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ の張る平行四辺形の面積. $\boldsymbol{n}$ はこの平行四辺形 (の法線) の方向.

【補足】 極性ベクトルと軸性ベクトル
3次元空間では平面の方向はその法線の方向として指定できる.

【補足】 $\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0$
$\boldsymbol{A} \parallel \boldsymbol{B} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$

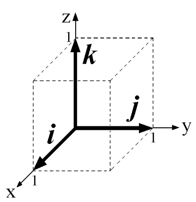
【補足】 演算の結果がベクトル値なので「ベクトル積」とも呼ぶ. 「×」を使うので「クロス積」とも呼ぶ.

2. 外積の性質

1. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ (反交換する)
2. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$
3. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$
4. $\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B}$
5. $(c\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\times(c\boldsymbol{B}) = c(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

3. 基本ベクトル間の外積

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \end{cases}$$



【補足】 他の組み合わせは,
$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}$,
$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$

【補足】 右手系と左手系

4. 外積の成分表示

$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ のとき,

- $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} =$

$(A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x)$

5. 応用例： 三角形の面積と法線単位ベクトル

3点 P, Q, R を頂点とする三角形の

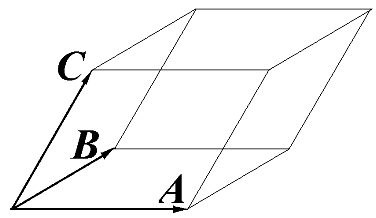
面積 は $S = \frac{1}{2}|\,\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}\,|$

法線単位ベクトルは $\boldsymbol{n} = \pm\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}}{|\,\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}\,|}$

【 1.5 3つのベクトルの積 】

1. スカラー三重積

- $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$



$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ を3稜とする平行六面体の体積 (またはその -1 倍) に等しい. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ が右手系を成すなら正の値, 左手系を成すなら負の値をとる.

2. ベクトル三重積

- $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$
- $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$

【補足】 外積には結合則が成立しないので (一般には $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \neq (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ なので), ベクトル三重積に現れるカッコを省略してはならない.

【問題】 外積の反交換性を使って1番目の式から2番目の式を導け.

【2.　一変数ベクトル関数の微分と積分 】

以下では恒等式を多数列挙するが, 暗記は不要である．どの式もスカラー関数の場合と類似した形をしているので, ベクトル関数でも同じような式が成立するのだと理解すれば十分である．

ベクトル関数

$$\begin{cases} f = f(t) & : f \text{ は } t \text{ の (スカラー) 関数} \\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t) & : \boldsymbol{A} \text{ は } t \text{ のベクトル関数} \end{cases}$$

「各成分が t の関数であるベクトル」
と言うこともできる:

$$\boldsymbol{A} = A_x(t)\,\boldsymbol{i} + A_y(t)\,\boldsymbol{j} + A_z(t)\,\boldsymbol{k}$$

ベクトル関数の微分

$$\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t) - \boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}$$

各成分を微分すればよい:

$$\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt} = \left(\frac{dA_x(t)}{dt},\ \frac{dA_y(t)}{dt},\ \frac{dA_z(t)}{dt} \right)$$

ベクトル関数の高階微分

$$\frac{d^n\boldsymbol{A}(t)}{dt^n} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}\boldsymbol{A}(t)}{dt^{n-1}} \right)$$

各成分を n 階微分すればよい:

$$\frac{d^n\boldsymbol{A}(t)}{dt^n} = \left(\frac{d^nA_x(t)}{dt^n},\ \frac{d^nA_y(t)}{dt^n},\ \frac{d^nA_z(t)}{dt^n} \right)$$

ベクトル関数の微分公式

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(t)$, $f = f(t)$
のとき下記の等式が成り立つ.

和の公式

1. $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt} \pm \dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}$

積の公式

2. $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}$
3. $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}$
4. $\dfrac{d}{dt}(f\boldsymbol{A}) = \dfrac{df}{dt}\boldsymbol{A} + f\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}$

ベクトル関数の積分

不定積分は微分の逆操作:

$$\frac{d\boldsymbol{B}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{B}(t) = \int \boldsymbol{A}(t)\,dt + \boldsymbol{C}$$

【注】積分定数もベクトルになる.
各成分を積分すればよい．不定積分は：

$$\int \boldsymbol{A}(t)dt = \left(\int A_x(t)dt, \int A_y(t)dt, \int A_z(t)dt \right)$$

定積分は：

$$\int_a^b \boldsymbol{A}(t)dt = \left(\int_a^b A_x(t)dt, \int_a^b A_y(t)dt, \int_a^b A_z(t)dt \right)$$

ベクトル関数の積分公式

和の公式

1. $\displaystyle\int \{\boldsymbol{A}(t) \pm \boldsymbol{B}(t)\}\,dt = \int \boldsymbol{A}(t)\,dt \pm \int \boldsymbol{B}(t)\,dt$

定数 (k) 倍・定ベクトル $(\boldsymbol{K})$ 倍の公式

2. $\displaystyle\int k\boldsymbol{A}(t)\,dt = k\int \boldsymbol{A}(t)\,dt$
3. $\displaystyle\int \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{A}(t)\,dt = \boldsymbol{K} \cdot \int \boldsymbol{A}(t)\,dt$
4. $\displaystyle\int \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{A}(t)\,dt = \boldsymbol{K} \times \int \boldsymbol{A}(t)\,dt$

部分積分公式

$f = f(t),\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t),\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(t)$,
$f' = \dfrac{df}{dt},\ \boldsymbol{A}' = \dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt},\ \boldsymbol{B}' = \dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}$ とすると

5. $\displaystyle\int f\boldsymbol{A}'dt = f\boldsymbol{A} - \int f'\boldsymbol{A}dt$
   $\displaystyle\int f'\boldsymbol{A}dt = f\boldsymbol{A} - \int f\boldsymbol{A}'dt$
6. $\displaystyle\int \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}'dt = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} - \int \boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{B}dt$
   $\displaystyle\int \boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{B}dt = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} - \int \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}'dt$
7. $\displaystyle\int \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}'dt = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} - \int \boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{B}dt$
   $\displaystyle\int \boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{B}dt = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} - \int \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}'dt$

【 3.1 点の運動とその軌跡 】

1. 点の位置・速度・加速度

数学的には, 時刻 t を変数とする 1 変数ベクトル関数 および その 1 階微分, 2 階微分である.

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$: 位置 (position), $|\boldsymbol{r}|$ は動径 (radius)

$\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$: 速度 (velocity)

$\boldsymbol{a} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$: 加速度 (acceleration)

2. 加速度の, 接線方向と主法線方向の成分への分解

$v = |\boldsymbol{v}|, \quad (v \geq 0)$: 速度の大きさ (speed)

【注】 高等学校の物理では, velocity を「速度」, speed を「速さ」と訳し分ける決まりでしたが...

$\boldsymbol{t} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{v}, \quad (|\boldsymbol{t}| = 1)$: 接線単位ベクトル (tangential unit vector)

【注】 $\boldsymbol{t}$ は tangential line (接線) から, t は time (時刻) から. $|\boldsymbol{t}|$ と t は別の物.

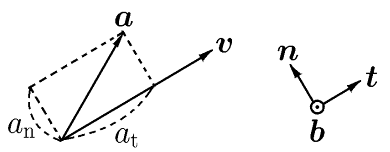
$a_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{t}$: 加速度の接線成分 (tangential component)

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}} = \boldsymbol{a} - a_{\mathrm{t}}\boldsymbol{t}$

$a_{\mathrm{n}} = |\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}|, \quad (a_{\mathrm{n}} \geq 0)$: 加速度の法線 (normal) 成分

$\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{n}}}, \quad (|\boldsymbol{n}| = 1)$: 主法線単位ベクトル (principal normal unit vector)

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}, \quad (|\boldsymbol{b}| = 1)$: 従法線 (binormal) 単位ベクトル



3. 下記の等式が成立することが示せる

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{dv}{dt}$$

4. a_{n} は v と軌跡の形だけで決まることも示せる

$$a_{\mathrm{n}} = \kappa v^2 = \frac{v^2}{\rho}$$

κ : 曲率 (curvature)

ρ : 曲率半径 (radius of curvature), $\rho = \dfrac{1}{\kappa}$

$\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}} = \boldsymbol{r} + \rho\boldsymbol{n}$: 曲率中心 (center of curvature)

【3.2 空間曲線】

1. 曲線のパラメータ表示

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t)), \quad a \leq t \leq b$$

「曲線の向きは t の増加する向きとする」と書いてあれば、$\boldsymbol{r}(a)$ が始点, $\boldsymbol{r}(b)$ が終点である。

【例】 「$\boldsymbol{r} = (\sin t,\ \cos t,\ 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$」は, 原点が中心で半径が 1 の, xy 平面内にある円 ($x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ を満たす点の集合) を表す.

2. 弧長 (曲線の長さ)

$$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \int_a^b \left| \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} \right| dt$$

[左辺は曲線上の 2 点 A,B 間の弧長の記号
A,B に対応する t の値を夫々a,b とした]

$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2}\, dt$$

補足 1. 弧長による $\boldsymbol{t}$ と $\boldsymbol{n}$ の定義

$$s(t) = \int_a^t \left| \frac{d\boldsymbol{r}(\tau)}{d\tau} \right| d\tau$$

即ち,

$$\frac{ds(t)}{dt} = \left| \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} \right|$$

上式で定義された $s(t)$ を使って, 曲線表示のパラメータを t から s に変更すれば, 以下のように $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{n}$, κ の第 2 の定義を与えることができる.

$$\boldsymbol{t}(s) = \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}$$

$$\kappa(s)\boldsymbol{n}(s) = \frac{d\boldsymbol{t}(s)}{ds}, \quad |\boldsymbol{n}(s)| = 1, \quad \kappa(s) \geq 0$$

(演習問題)

上記の定義が, 3.1.2 で与えた定義と一致することを示せ.

補足 2. 捩率 (れいりつ) と Frenet-Serret の公式

(演習問題) 以下の等式が成立することを示せ.

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \kappa\boldsymbol{n}$$

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\tau\boldsymbol{n}$$

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\kappa\boldsymbol{t} + \tau\boldsymbol{b}$$

τ : 捩率 (torsion) (「捩」: ねじれ)

【 3.3 曲面 】

1. 曲面のパラメータ表示

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v),$$
$$= \Big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\Big), \quad (u,v) \in D$$

D は u-v 平面内の 2 次元領域

2. 曲面の面積

$$S = \iint_D \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| dudv$$

$$dS = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| dudv : \text{面積素}$$

補足 1. 計算が煩雑な場合に役立つ計算方法

$$dS = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{EG - F^2},$$

$$E = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \quad F = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \quad G = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}.$$

補足 2. 曲面 $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ の面積

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

【4.1 場 (field) とは】

・空間に分布した量

・数学的には, x, y, z を変数とする 3 変数関数

【注】“field” を「場」と訳すのは理学系, 「界」と訳すのは工学系. 例 : magnetic field = 磁場 = 磁界

1. 本講義での各種関数の主な用途

	スカラー値	ベクトル値
1 変数		曲線のパラメータ表示
2 変数		曲面のパラメータ表示
3 変数	スカラー場	3 次元領域のパラメータ表示 ベクトル場

2. 場の視覚的表現

・ 等位面　（スカラー場）

・ 流線　（ベクトル場）

【4.2 勾配 (gradient, グラジエント)】

スカラー場 $\varphi(x,y,z)$ の勾配とは

$$\boxed{\mathrm{grad}\,\varphi \ = \ \boldsymbol{\nabla}\varphi} \ = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\right)} : \text{ナブラ (nabla) 記号}$$

ナブラは微分演算子 (differential operator).

【注】ナブラは, 式変形では, 通常のベクトルと同様に内積, 外積, 分配則等の規則に従うものとする. ただし積における項の順番を勝手に変更してはならない.

【注】operator の訳語には演算子と作用素の二つがある. この語には「関数を別の関数に写像するもの」と「(四則などの) 演算を表す記号」という二つの意味がある. ナブラは前者である. 意味に応じて前者を「作用素」, 後者を演算子と訳し分ける流儀がある一方で, 学術用語は (翻訳で意味が変わらないように) 一対一対応が望ましいという観点から, 意味によらず演算子という訳語を使う流儀もある.

・$\boldsymbol{\nabla}\varphi$ は最大勾配の方向 (φ が増す向き) を向く

・$|\boldsymbol{\nabla}\varphi|$ は最大勾配値, 等位面の密度に比例

・$\boldsymbol{\nabla}\varphi$ は等位面に垂直

【4.3 発散 (divergence, ダイバージェンス)】

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = (A_x, A_y, A_z)$ の発散とは

$$\boxed{\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} \ = \ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}} \ = \ \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$\boldsymbol{A}$ が流れなら, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ は単位時間・単位体積あたりの湧き出し量を表す. ($\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} < 0$ なら, 流れは吸い込まれている.)

【注】「$y = \frac{1}{x^2}$ は $x \to 0$ で $+\infty$ に発散する」という文の「発散」とは意味が異なる. 英語の “divergence” も, 「無限大になること (収束しないこと)」と「湧き出し」の両方の意味を持つ.

【4.4 回転 (rotation, ローテーション)】

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = (A_x, A_y, A_z)$ の回転とは

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}}$$
$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$\boldsymbol{A}$ が流れを表すなら, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ は その流れの各点における渦の方向と強さ (渦度または循環密度と呼ぶ) を表す.

【注】 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ のことを $\mathrm{curl}\,\boldsymbol{A}$ と表記する書物もある.

【 4.5 場の微分公式 】

φ, ψ をスカラー場, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ をベクトル場とすると,

分配則 (distributive law)

1. $\nabla(\varphi+\psi)=\nabla\varphi+\nabla\psi$
2. $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla\cdot\boldsymbol{B}$
3. $\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{B}$

スカラー乗法 (scalar multiplication) の微分則

4. $\nabla(\varphi\psi)=(\nabla\varphi)\,\psi+\varphi\,(\nabla\psi)$
5. $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{A})=(\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{A}+\varphi\,(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$
6. $\nabla\times(\varphi\boldsymbol{A})=(\nabla\varphi)\times\boldsymbol{A}+\varphi\,(\nabla\times\boldsymbol{A})$

合成関数の微分法 (“chain rule”)

7. $\nabla f(\varphi)=\dfrac{df}{d\varphi}\nabla\varphi$

参考： その他の公式 (覚える必要はない)

8. $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$
9. $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{B}$
   $\qquad+\boldsymbol{A}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}\,(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$
10. $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{B}$
    $\qquad+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})$

場の 2 階微分

1. ラプラシアン (Laplacian, ラプラス演算子)

$$\Delta=\nabla\cdot\nabla=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta\varphi=\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

球対称な場の勾配とラプラシアン

$$\nabla r=\frac{\boldsymbol{r}}{r}\qquad(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$
$$\nabla f(r)=\frac{\boldsymbol{r}}{r}\frac{d}{dr}f(r)$$
$$\Delta f(r)=\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)f(r)$$

ラプラシアンが零であるスカラー場を調和関数と呼ぶ.

2. 恒等的に零になるもの

・$\nabla\times(\nabla\varphi)=\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\varphi)=\boldsymbol{0}$

・$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})=0$

3. その他 (特に名称はなく, 恒等的に零でもない)

・$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A})$

・$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-(\nabla\cdot\nabla)\,\boldsymbol{A}$

【注】$(\nabla\cdot\nabla)\,\boldsymbol{A}=(\Delta A_x,\ \Delta A_y,\ \Delta A_z)$
$\Delta A_x=\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}$

【4.6 線積分】 (curvilinear integral)

1. 曲線 $\mathrm{C}=\{\boldsymbol{r}\mid\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\ \ a\le t\le b\}$ 上での線積分

$$I_{\mathrm{C}}=\int_{\mathrm{C}}\varphi(\boldsymbol{r})\,ds=\int_a^b\varphi(\boldsymbol{r}(t))\,\frac{ds}{dt}dt$$

ただし $\dfrac{ds}{dt}=\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$

2. ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の曲線 C 上での接線線積分

$$I_{\mathrm{C}}=\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\int_a^b\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt$$

$\boldsymbol{t}$ を曲線 C の接線単位ベクトルとすれば
$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{t}\,ds$ なので $I_{\mathrm{C}}=\displaystyle\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,ds$ とも書く.
また, $A_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}$ として $I_{\mathrm{C}}=\displaystyle\int_{\mathrm{C}}A_{\mathrm{t}}\,ds$ とも書く.

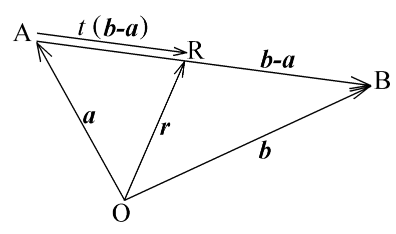
3. その他の形の線積分もある. 例えば:

$$I_{\mathrm{C}}=\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\times d\boldsymbol{r}=\int_a^b\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(t))\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt$$

補足：線分のパラメータ表示

線分 AB 上の任意の点 R の位置ベクトル $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は, $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とし, t をパラメータとして,

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+t\,(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=(1-t)\,\boldsymbol{a}+t\,\boldsymbol{b}\qquad(0\le t\le 1)$$



と表示できる. 「曲線 C」が「線分 AB」のときの接線線積分は, この表示を利用して下式で計算できる.

$$\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^1\boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{a}+t\,(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\big)\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\,dt$$

【4.7 スカラーポテンシャル】 (scalar potential)

$$\boxed{I_{\mathrm{C}} = \int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \varphi(\boldsymbol{r}_2) - \varphi(\boldsymbol{r}_1)}$$

C : $\boldsymbol{r}_1$ を始点, $\boldsymbol{r}_2$ を終点とする曲線

$\boldsymbol{A}$: ベクトル場, φ : スカラー場.

但し, $\boxed{\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\varphi}$ が成り立つとする.

- I_{C} は C の始点と終点だけで決まり, 途中の経路の取り方によらないことに注目. 例えば山道に沿って勾配を積分すると出発点と到着点の高低差という登山ルートに依らない量が得られるように.

- 証明は, 1 年生で習った下記の偏微分公式を出発点とすれば自明である. $f = f(x, y, z)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ のとき,
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

- $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ のとき $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\varphi$ を満たす φ が存在する.
  証明には後述の Stokes の定理が必要である.

- $-\varphi$ を $\boldsymbol{A}$ のスカラーポテンシャルと呼ぶ.

【4.8 面積分】 (surface integral)

1. 曲面 $\mathrm{S} = \{\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v),\ (u, v) \in D\}$ 上での面積分 :

$$I_{\mathrm{S}} = \int_{\mathrm{S}} \varphi(\boldsymbol{r})\, dS = \iint_{\mathrm{D}} \varphi(\boldsymbol{r}(u, v)) \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv$$

- $\varphi = 1$ とした $\int_{\mathrm{S}} dS$ は, 曲面 S の面積である.

2. ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の曲面 S 上での法線面積分 :

$$I_{\mathrm{S}} = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\mathrm{D}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right) dudv$$

$\boldsymbol{n}$ を曲面 S の法線単位ベクトルとすれば

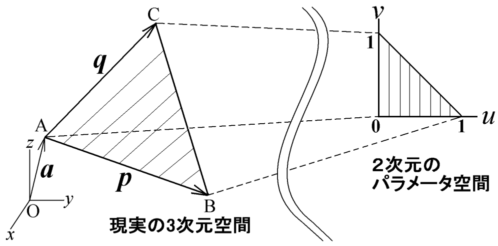
- $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\, dS$ なので $I_{\mathrm{S}} = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ とも書く.
- $A_{\mathrm{n}} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}$ として $I_{\mathrm{S}} = \int_{\mathrm{S}} A_{\mathrm{n}}\, dS$ とも書く.

補足 : 三角形 および 平行四辺形 のパラメータ表示

点 A, B, C を頂点とする三角形内にある任意の点 R の位置ベクトル $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は, $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とし, u, v をパラメータとして,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + u\,\boldsymbol{p} + v\,\boldsymbol{q} \quad (0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1 - u)$$

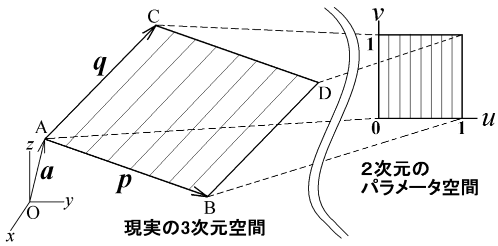
と表示できる.



点 D を $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$ と定めると閉じた折れ線 ABDC は平行四辺形になる. この平行四辺形内にある任意の点 R の位置ベクトル $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + u\,\boldsymbol{p} + v\,\boldsymbol{q} \quad (0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1)$$

とパラメータ表示できる.



【4.9 ストークスの定理】 (Stokes' theorem)

$$\boxed{\int_{\mathrm{S}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}}$$

$\boldsymbol{A}$: ベクトル場
C : 閉曲線
S : C を縁とする曲面
$d\boldsymbol{S}$: S の面積素ベクトル.
右ネジが C の巻く向きに回るとき進む向きを向く.

- この定理の意味は「曲面上で渦度を法線面積分すると, 曲面の縁に沿っての流れの接線線積分（縁に沿っての循環）に等しくなる」であるが, 「rot が渦度=循環密度であること」を認めれば, 「循環密度を積分すると循環が得られる」という自明な主張となる. 逆に言えば, この定理こそが rot を渦度=循環密度と解釈することの最も確かな根拠なのである.

応用数学 III 講義配布資料 (要点 p. 10)

【4.10 体積積分】 (volume integral)

$$I_{\mathrm{V}} = \int_{\mathrm{V}} f(\boldsymbol{r})\, dv$$

V：体積領域 (3 次元領域)

dv：体積要素

- v は volume(体積) に由来する．曲面の表示パラメータの変数名として u,v をよく使うが，その v とは無関係である．
- dv の代わりに d^3r と書く人もいる．「d^3r」でひとつの記号であり，「d^3」に明確な定義はない．
- 「$d\boldsymbol{r}$ 」($\boldsymbol{r}$ はボールド体) と書く流儀もあるが，薦めない．

  スカラー量である体積要素を，ベクトル量である（線積分で使う）線素と同じボールド体の記号で表すことは不適切と考える人が多い．

1. デカルト座標の場合

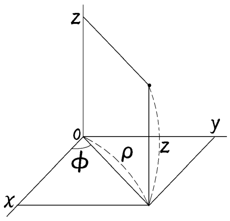
$\boldsymbol{r} = (x,\ \ y,\ \ z)\,, \qquad dv = dx\,dy\,dz$

$\mathrm{V} = \{\boldsymbol{r} \mid 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b,\ 0 \leq z \leq c\}$ (直方体）ならば

$$I_{\mathrm{V}} = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz f(x,y,z)$$

2. 円柱座標の場合

$\boldsymbol{r} = (\rho\cos\phi,\ \ \rho\sin\phi,\ \ z)\,, \qquad dv = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$



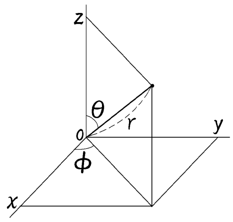
$\mathrm{V} = \{\boldsymbol{r} \mid 0 \leq \rho \leq a,\ 0 \leq z \leq c\}$ (円柱の内部）ならば

$$I_{\mathrm{V}} = \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^c dz\ f\left(\rho\cos\phi,\ \rho\sin\phi,\ z\right)$$

3. 球座標 (3 次元極座標) の場合

$\boldsymbol{r} = (r\sin\theta\cos\phi,\ \ r\sin\theta\sin\phi,\ \ r\cos\theta)$

$dv = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$



$\mathrm{V} = \{\boldsymbol{r} \mid 0 \leq r \leq a\}$ (球の内部）ならば

$$I_{\mathrm{V}} = \int_0^a r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$
$$\cdot f\left(r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta\right)$$

補足：一般の座標 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,(a,b,c)$ の場合

$$dv = |\det J|\, da\, db\, dc, \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{pmatrix}$$

J はヤコビ行列．$\det J$ は J の行列式 (ヤコビ行列式) で，

$$\det J = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial c} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial b} \right)$$

のようにスカラー三重積の形にも書き表せる．

$\left|\det J\right|$ はヤコビ行列式の絶対値である．

【4.11 ガウスの（発散）定理】 (Gauss's theorem)

$$\boxed{\int_{\mathrm{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} dv = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}}$$

$\boldsymbol{A}$：ベクトル場

S：閉曲面

V：S の内部の体積領域

$d\boldsymbol{S}$：S の面積素ベクトルで，
S の内部から外部に向かう向きにとる．

- div を湧き出しと解釈できるなら，この定理は「内部の湧き出し量を積分すると，表面からの流出量に等しくなる」という自明な主張となる．逆に言えば，この定理により div の湧き出しという解釈の妥当性がさらに高められたのである．

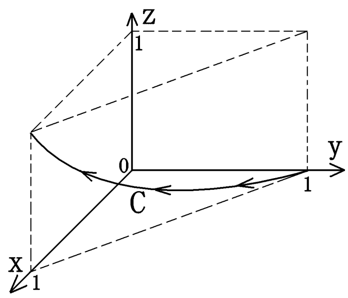
【パラメータ表示された曲線に沿っての接線線積分の計算】

問題 $\boxed{1}$ ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (x+y,\ x-y,\ 2z)$ の

曲線 C: $\boldsymbol{r} = \big(t,\ 1-t,\ t^2\big), \quad 0 \le t \le 1$

(t の増加する方向に向きを付ける)

に沿っての接線線積分 $I_{\mathrm{C}} = \displaystyle\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ.



解答:

$$I_{\mathrm{C}} = \int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{r}\big) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} dt.$$

ここで, t_1 および t_2 は曲線 C の始点および終点に対応するパラメータの値であり, 本問題では $t_1 = 0,\ t_2 = 1$ である.

また, C 上では,

$$\boldsymbol{r} = \Big(x(t),\ y(t),\ z(t)\Big), \quad \begin{cases} x(t) &= \quad t \\ y(t) &= \quad 1-t \\ z(t) &= \quad t^2 \end{cases}$$

であるから,

$$\boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) = \Big(x(t)+y(t),\ x(t)-y(t),\ 2z(t)\Big) = \big(t+(1-t),\ t-(1-t),\ 2t^2\big) = (1,\ 2t-1,\ 2t^2),$$

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(x(t),\ y(t),\ z(t)\Big) = \frac{d}{dt}(t,\ 1-t,\ t^2) = \Big(\frac{d}{dt}t,\ \frac{d}{dt}(1-t),\ \frac{d}{dt}t^2\Big) = (1,\ -1,\ 2t)$$

である. 故に, C 上では,

$$\boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = (1,\ 2t-1,\ 2t^2) \cdot (1,\ -1,\ 2t) = 1 \cdot 1 + (2t-1) \cdot (-1) + 2t^2 \cdot 2t = 4t^3 - 2t + 2.$$

従って,

$$I_{\mathrm{C}} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{A} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt = \int_0^1 \big(4t^3 - 2t + 2\big)\, dt = \Big[t^4 - t^2 + 2t\Big]_{t=0}^{t=1} = 2 \quad \cdots \text{(答)}$$

類題 $\boxed{1a}$ 同じ曲線 C に沿っての, ベクトル場 $\boldsymbol{B} = (-x,\ -y,\ 2z)$ の接線線積分 $I'_{\mathrm{C}} = \displaystyle\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ.

(答: $I'_{\mathrm{C}} = 1$)

類題 $\boxed{1b}$ 同じ曲線 C に沿っての, ベクトル場 $\boldsymbol{D} = (yz,\ zx,\ xy)$ の接線線積分 $I''_{\mathrm{C}} = \displaystyle\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ.

(答: $I''_{\mathrm{C}} = 0$)

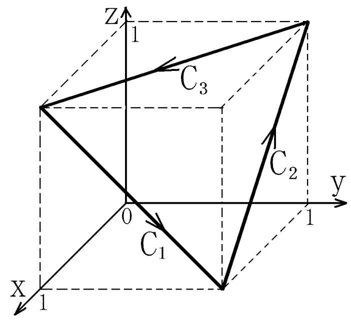
【折れ線経路に沿っての接線線積分の計算】

$\overline{\text{問題}}$ $\boxed{2}$　ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (x + yz,\ x - yz,\ xyz)$ の,

右図に示した正三角形の形状をした積分経路

$$\mathrm{C}\ (= \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3)$$

に沿っての接線線積分 $I_{\mathrm{C}} = \displaystyle\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ の値を計算せよ.



解答:

有向線分 C_1 は下式のようにパラメータ表示できる.

$$\boldsymbol{r}(t) = \big(1,\,0,\,1\big) + \big(0,\,1,\,-1\big)\,t = \big(1,\,t,\,1-t\big) \quad (0 \le t \le 1).$$

このとき, $\quad \dfrac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \big(0,\,1,\,-1\big)$ 　であり, また,

$$\boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) = \Big(x(t) + z(t)y(t),\ x(t) - y(t)z(t),\ x(t)y(t)z(t)\Big) = \big(1 + t(1-t),\ 1 - t(1-t),\ 1 \cdot t(1-t)\big)$$

$$= (1 + t - t^2,\ 1 - t + t^2,\ t - t^2).$$

である. これらを

$$I_{\mathrm{C}_1} = \int_{\mathrm{C}_1} \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{r}\big) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} dt \quad (t_1 = 0,\ t_2 = 1)$$

に代入すると,

$$I_{\mathrm{C}_1} = \int_0^1 (1 + t - t^2,\ 1 - t + t^2,\ t - t^2) \cdot \big(0,\,1,\,-1\big)\,dt = \int_0^1 (1 - 2t + 2t^2)dt = \big[t - t^2 + \tfrac{2}{3}t^3\big]_{t=0}^{t=1} = 1 - 1 + \tfrac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

有向線分 C_2 を $\boldsymbol{r}(t) = \big(1,\,1,\,0\big) + \big(-1,\,0,\,1\big)\,t = \big(1-t,\,1,\,t\big)$ $(0 \le t \le 1)$ とパラメータ表示すると,

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \big(-1,\,0,\,1\big), \quad \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) = \Big(x(t) + z(t)y(t),\ x(t) - y(t)z(t),\ x(t)y(t)z(t)\Big) = (1,\ 1 - 2t,\ t - t^2).$$

$$\therefore \quad I_{\mathrm{C}_2} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} dt = \int_0^1 (1,\ 1 - 2t,\ t - t^2) \cdot \big(-1,\,0,\,1\big)\,dt = \int_0^1 (-1 + t - t^2)dt = -\frac{5}{6}.$$

有向線分 C_3 を $\boldsymbol{r}(t) = \big(0,\,1,\,1\big) + \big(1,\,-1,\,0\big)\,t = \big(t,\,1-t,\,1\big)$ $(0 \le t \le 1)$ とパラメータ表示すると,

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = \big(1,\,-1,\,0\big), \quad \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) = \Big(x(t) + z(t)y(t),\ x(t) - y(t)z(t),\ x(t)y(t)z(t)\Big) = (1,\ 2t - 1,\ t - t^2).$$

$$\therefore \quad I_{\mathrm{C}_3} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} dt = \int_0^1 (1,\ 2t - 1,\ t - t^2) \cdot \big(1,\,-1,\,0\big)\,dt = \int_0^1 (2 - 2t)dt = 1.$$

従って, $I_{\mathrm{C}} = I_{\mathrm{C}_1} + I_{\mathrm{C}_2} + I_{\mathrm{C}_3} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{6} + 1 = \dfrac{5}{6}$ $\cdots$ (答)

【接線線積分を使ってスカラーポテンシャルを求めること】

問題 $\boxed{3}$　ベクトル場 $\boldsymbol{A}=(x+y,\ x-y,\ 2z)$ について, $\nabla\varphi=\boldsymbol{A}$ を満たすスカラー場 φ を求めよ.

解答:

一般に, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が空間の全ての点で $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ を満たせば $\boldsymbol{\nabla}\varphi=\boldsymbol{A}$ という関係式に従うスカラー場 φ が存在し, $\varphi(\boldsymbol{r})=\varphi(\boldsymbol{r}_0)+\displaystyle\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ と表すことができる. ここで, $\boldsymbol{r}_0$ は任意に選んだ起点であり, 経路 C は起点 $\boldsymbol{r}_0$ から終点 $\boldsymbol{r}$ に向かう任意の曲線である. $-\varphi$ を $\boldsymbol{A}$ のスカラーポテンシャルと呼ぶ.

問題に与えられた $\boldsymbol{A}$ の回転は,

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=\left(\tfrac{\partial}{\partial x},\ \tfrac{\partial}{\partial y},\ \tfrac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(x+y,\ x-y,\ 2z\right)$$

$$=\left(\tfrac{\partial}{\partial y}2z-\tfrac{\partial}{\partial z}(x-y),\ \tfrac{\partial}{\partial z}(x+y)-\tfrac{\partial}{\partial x}2z,\ \tfrac{\partial}{\partial x}(x-y)-\tfrac{\partial}{\partial y}(x+y)\right)$$

$$=\left(0-0,\ 0-0,\ 1-1\right)=\left(0,\ 0,\ 0\right)$$

なので, $\boldsymbol{\nabla}\varphi=\boldsymbol{A}$ を満足する φ は存在し, $\boldsymbol{A}$ を接線線積分することで得られる. 始点として $\left(0,\ 0,\ 0\right)$ を選び, 終点を $\left(\xi,\ \eta,\ \zeta\right)$ として, 積分経路 C を 2 点を結ぶ直線として

$$\boldsymbol{r}(t)=\left(\xi,\ \eta,\ \zeta\right)t\quad(0\leq t\leq 1)$$

のようにパラメータ表示すれば, 積分計算は以下の通り容易にできる

$$\varphi\left(\xi,\ \eta,\ \zeta\right)=\varphi\left(0,\ 0,\ 0\right)+\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\varphi\left(0,\ 0,\ 0\right)+\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\,dt$$

$$=\varphi\left(0,\ 0,\ 0\right)+\int_0^1(\xi t+\eta t,\ \xi t-\eta t,\ 2\zeta t)\cdot\left(\xi,\ \eta,\ \zeta\right)dt=\varphi\left(0,\ 0,\ 0\right)+(\xi^2+2\xi\eta-\eta^2+2\zeta^2)\int_0^1 tdt$$

$$=\varphi\left(0,\ 0,\ 0\right)+\frac{1}{2}(\xi^2+2\xi\eta-\eta^2+2\zeta^2)$$

$\left(\xi,\ \eta,\ \zeta\right)$ を $\left(x,\ y,\ z\right)$ と書き直し, $\varphi\left(0,\ 0,\ 0\right)$ を任意の定数 c で表せば, 下式を得る.

$$\varphi\left(x,\ y,\ z\right)=\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2+z^2+c\qquad(c\ \text{は任意の定数})\ \cdots\ (\text{答})$$

$\boxed{1}$ の別解法：$I_{\mathrm{C}}=\varphi\big(\boldsymbol{r}(t=1)\big)-\varphi\big(\boldsymbol{r}(t=0)\big)=\varphi(1,0,1)-\varphi(0,1,0)=\frac{3}{2}-(-\frac{1}{2})=2.$

$\boxed{1\mathrm{a}}$ の別解法：$\varphi_{\mathrm{B}}=z^2-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}y^2$ は $\boldsymbol{\nabla}\varphi_{\mathrm{B}}=\boldsymbol{B}$ を満たすので,

$$\textstyle\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r}=\varphi_{\mathrm{B}}\big(\boldsymbol{r}(t=1)\big)-\varphi_{\mathrm{B}}\big(\boldsymbol{r}(t=0)\big)=\varphi_{\mathrm{B}}(1,0,1)-\varphi_{\mathrm{B}}(0,1,0)=\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})=1.$$

$\boxed{1\mathrm{b}}$ の別解法：$\varphi_{\mathrm{D}}=xyz$ は $\boldsymbol{\nabla}\varphi_{\mathrm{D}}=\boldsymbol{D}$ を満たすので,

$$\textstyle\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{r}=\varphi_{\mathrm{D}}\big(\boldsymbol{r}(t=1)\big)-\varphi_{\mathrm{D}}\big(\boldsymbol{r}(t=0)\big)=\varphi_{\mathrm{D}}(1,0,1)-\varphi_{\mathrm{D}}(0,1,0)=0-0=0.$$

【パラメータ表示された曲線・曲面上での接線線積分・法線面積分の計算 / ストークスの定理】

問題 $\boxed{4}$ ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (yz,\ x,\ 0),\quad \boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$,

曲線 C : $\boldsymbol{r} = (\cos t,\ \sin t,\ 0),\quad 0 \le t \le 2\pi$,

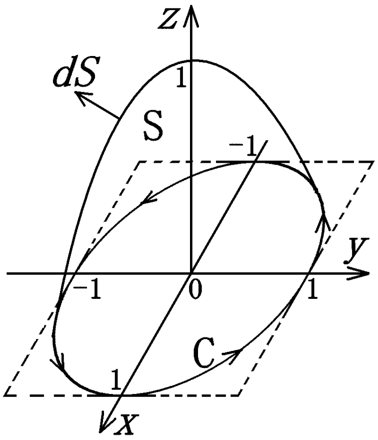
曲面 S : $\boldsymbol{r} = (u\cos v,\ u\sin v,\ 1-u^2),\quad 0 \le u \le 1,\quad 0 \le v \le 2\pi$,

に関して以下の小問に答えよ. 右図に C と S の向きを示す.

(i) $I_{\mathrm{C}} = \oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ を線積分を実行して求めよ.

(ii) $I_{\mathrm{S}} = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$ を面積分を実行して求めよ.

なお, C は S の縁であるため, ストークスの定理により 2 つの積分値は等しくなるはずである.



解答:

(i) $$I_{\mathrm{C}} = \oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{r}(t)\big)\cdot\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}\,dt \qquad (t_1 = 0,\ t_2 = 2\pi).$$

C 上では $\boldsymbol{r}(t) = \big(x(t),\ y(t),\ z(t)\big) = (\cos t,\ \sin t,\ 0)$ なので,

$$\boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) = \big(y(t)z(t),\ x(t),\ 0\big) = \big((\sin t)\cdot 0,\ \cos t,\ 0\big) = \big(0,\ \cos t,\ 0\big), \qquad \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = (-\sin t,\ \cos t,\ 0).$$

従って, $\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \cot^2 t$ となるので, $I_{\mathrm{C}} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 t\ dt = \pi\ \cdots$(答)

(ii) $\boldsymbol{B} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\times(yz,\ x,\ 0) = \left(\frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial z}x,\ \frac{\partial}{\partial z}yz - \frac{\partial}{\partial x}0,\ \frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}yz\right) = (0,\ y,\ 1-z)$ である.

一般に, パラメータ表示曲面上での法線面積分は, 下式のようなパラメータによる二重積分として計算できる.

$$I_{\mathrm{S}} = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{\mathrm{D}} du\,dv\,\boldsymbol{B}\Big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\Big)\cdot\left\{\frac{\partial\boldsymbol{r}(u,v)}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}(u,v)}{\partial v}\right\}.$$

上式で D=$\big\{(u,v)\ \big|\ 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 2\pi\big\}$ であり, 従って $\displaystyle\iint_{\mathrm{D}} du\,dv = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv$ である.

また, 曲面 S 上では $\boldsymbol{r} = \big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\big) = (u\cos v,\ u\sin v,\ 1-u^2)$ なので下式を得る.

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u} = \big(\cos v,\ \sin v,\ -2u\big), \quad \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v} = \big(-u\sin v,\ u\cos v,\ 0\big), \quad \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v} = \big(2u^2\cos v,\ 2u^2\sin v,\ u\big).$$

ここで, 最後のベクトル $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}$ が曲面 S の表 (おもて) を向いていることを確認しておく必要がある. 任意に選んだ 1 点 $\boldsymbol{r}$ で正しい向きを持てば全ての点で正しい向きを持つ. そこで, 例えば $u = 1,\ v = 0$ ととれば, $\boldsymbol{r} = (1,0,0)$ で $\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v} = (2,0,1)$ なので向きは正しいことが分かる. (もし裏面を向いているなら, このベクトルを -1 倍してから使う必要がある).

$$\boldsymbol{B} = (0,\ y(u,v),\ 1-z(u,v)) = (0,\ u\sin v,\ u^2)$$

とこのベクトルとの内積は

$$\boldsymbol{B}\cdot\left\{\frac{\partial\boldsymbol{r}(u,v)}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}(u,v)}{\partial v}\right\} = 0\cdot 2u^2\cos v\ +\ u\sin v\cdot 2u^2\sin v\ +\ u^2\cdot u = 2u^3\sin^2 v + u^3$$

なので,

$$I_{\mathrm{S}} = \int_0^1 du\int_0^{2\pi} dv\,\big(2u^3\sin^2 v + u^3\big) = \int_0^1 du\left(2u^3\int_0^{2\pi}\sin^2 v dv + u^3\int_0^{2\pi} dv\right) = \int_0^1 du\,\big(2u^3\cdot\pi + u^3\cdot 2\pi\big)$$

$$= 4\pi\int_0^1 u^3 du = 4\pi\cdot\tfrac{1}{4} = \pi\ \cdots\ (\text{答})$$

【平面多角形上での法線面積分の計算（３角形の場合） / ストークスの定理】

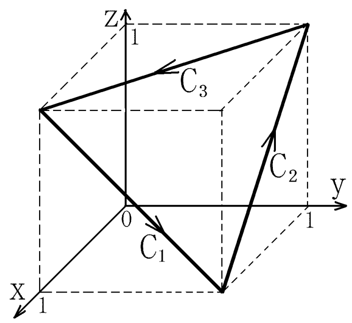
問題 $\boxed{5}$ ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (x + yz,\ x - yz,\ xyz)$ の，

右図に示した正三角形の形状をした積分経路

$$\mathrm{C}\ (= \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3)$$

に沿っての接線線積分 $I_\mathrm{C} = \displaystyle\int_\mathrm{C} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ の値を，

ストークスの定理を利用して法線面積分の値として計算せよ．



解答:

S を積分経路 C を縁とする正三角形とすると，ストークスの定理により，I_C は $I_\mathrm{S} = \displaystyle\int_\mathrm{S} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ に等しい．ただし，S は座標原点 O に面する側を裏面と定める．$\boldsymbol{a} = \big(1,\,1,\,0\big),\ \boldsymbol{p} = \big(-1,\,0,\,1\big),\ \boldsymbol{q} = \big(0,\,-1,\,1\big)$ とすると，S は

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + u\,\boldsymbol{p} + v\,\boldsymbol{q}, \quad 0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 1 - u$$

のようにパラメータ表示できる．$d\boldsymbol{S} = \big(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\big)\,du\,dv = (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q})\,du\,dv$ であるから，

$$I_\mathrm{S} = \int_\mathrm{S} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q})$$

という 2 重積分で I_S は表される．ここで，

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \Big(\tfrac{\partial}{\partial y}(xyz) - \tfrac{\partial}{\partial z}(x - yz),\ \tfrac{\partial}{\partial z}(x + yz) - \tfrac{\partial}{\partial x}(xyz),\ \tfrac{\partial}{\partial x}(x - yz) - \tfrac{\partial}{\partial y}(x + yz)\Big) = \big(xz + y,\ y - yz,\ 1 - z\big)$$

であり，また，$\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q} = \big(-1,\,0,\,1\big) \times \big(0,\,-1,\,1\big) = \big(1,\,1,\,1\big)$ なので（正しく表向きになっていることが確認できる），

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}) = \big(xz + y,\ y - yz,\ 1 - z\big) \cdot (1,1,1) = (x - y - 1)z + 2y + 1$$

である．さらに，S 上では

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} + u\,\boldsymbol{p} + v\,\boldsymbol{q} = \big(1,\,1,\,0\big) + u\big(-1,\,0,\,1\big) + v\big(0,\,-1,\,1\big) = (1 - u,\ 1 - v,\ u + v)$$

なので，

$$(x - y - 1)z + 2y + 1 = (1 - u - 1 + v - 1)(u + v) + 2(1 - v) + 1 = v^2 - 3v - u^2 - u + 3$$

となる．従って，

$$\begin{aligned}
I_\mathrm{S} &= \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv\big(v^2 - 3v - u^2 - u + 3\big) = \int_0^1 du\Big[\tfrac{1}{3}v^3 - \tfrac{3}{2}v^2 + (-u^2 - u + 3)v\Big]_{v=0}^{v=1-u} \\
&= \int_0^1 du\Big\{\tfrac{1}{3}(1 - u)^3 - \tfrac{3}{2}(1 - u)^2 - u^2(1 - u) - u(1 - u) + 3(1 - u)\Big\} \\
&= \tfrac{1}{3}\textstyle\int_0^1 u'^3 du' - \tfrac{3}{2}\int_0^1 u'^2 du' - \int_0^1 (u^2 - u^3)du - \int_0^1 (u - u^2)du + 3\int_0^1 u' du' \quad \Big(\because\ u' = 1 - u \text{ で } \int_0^1 du = \int_0^1 du'\Big) \\
&= \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{1}{3} - \big(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\big) - \big(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\big) + 3 \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1 - 6 - 1 - 2 + 18}{12} = \tfrac{10}{12} = \frac{5}{6} \cdots (\text{答})
\end{aligned}$$

【平面多角形上での法線面積分の計算（４辺形の場合） / ストークスの定理】

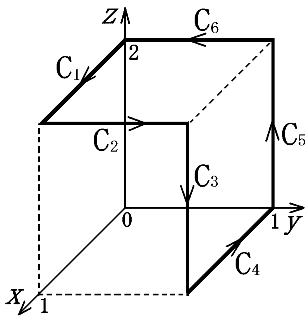
問題 $\boxed{6}$ 右図に示した積分経路

$$\mathrm{C}\ (=\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 + \mathrm{C}_4 + \mathrm{C}_5 + \mathrm{C}_6)$$

に沿ってのベクトル場

$$\boldsymbol{A} = \left(x^2 - y,\ x^2 + y,\ xyz^2\right)$$

の接線線積分 $I_{\mathrm{C}} = \displaystyle\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ．



解答:

点 (1,1,2) から点 (0,1,2) へ向かう経路を C_7 , その逆方向の経路を $\overline{\mathrm{C}}_7$ とする．$\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_7, \mathrm{C}_7$ を４辺とする正方形を S_1 とし, $\mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4, \mathrm{C}_5, \overline{\mathrm{C}}_7$ を４辺とする正方形を S_2 とする．S_1 および S_2 の法線単位ベクトルは, それぞれ (0,0,1) および (0,1,0) である（そのように表裏を定義する）．

$I_{\mathrm{C}_i} = \int_{\mathrm{C}_i} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}\quad (i = 1, \cdots, 7),\quad I_{\overline{\mathrm{C}}_7} = \int_{\overline{\mathrm{C}}_7} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ とすれば, ストークスの定理により,

$$I_{\mathrm{S}_1} \equiv \int_{\mathrm{S}_1} (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S} = I_{\mathrm{C}_1} + I_{\mathrm{C}_2} + I_{\mathrm{C}_7} + I_{\mathrm{C}_6}, \qquad I_{\mathrm{S}_2} \equiv \int_{\mathrm{S}_2} (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S} = I_{\mathrm{C}_3} + I_{\mathrm{C}_4} + I_{\mathrm{C}_5} + I_{\overline{\mathrm{C}}_7}$$

が成立する．（記号 $\equiv$ は定義を表す．）$I_{\overline{\mathrm{C}}_7} = -I_{\mathrm{C}_7}$ なので下式が成り立つ．

$$I_{\mathrm{S}_1} + I_{\mathrm{S}_2} = I_{\mathrm{C}_1} + I_{\mathrm{C}_2} + I_{\mathrm{C}_3} + I_{\mathrm{C}_4} + I_{\mathrm{C}_5} + I_{\mathrm{C}_6} = I_{\mathrm{C}}$$

S_1 上の点を $\boldsymbol{r} = \Big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\Big) = \big(u,\ v,\ 2\big),\quad 0 \le u \le 1,\quad 0 \le v \le 1$ とパラメータ表示すれば,

$$d\boldsymbol{S} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\, du\, dv = \big(1,\ 0,\ 0\big) \times \big(0,\ 1,\ 0\big)\, du\, dv = \big(0,\ 0,\ 1\big)\, du\, dv,$$

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S} = (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) \cdot \big(0,\ 0,\ 1\big)\, du\, dv = (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_z\ du\, dv = \left\{\tfrac{\partial}{\partial x}(x^2 + y) - \tfrac{\partial}{\partial y}(x^2 - y)\right\} du\, dv = (2x + 1)\ du\, dv$$

である．S_1 上では $x = x(u,v) = u$ なので, 結局, $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S} = (2u + 1)\ du\, dv$ を得る．故に,

$$I_{\mathrm{S}_1} = \int_0^1 du \int_0^1 dv\, (2u + 1) = \left\{\int_0^1 (2u + 1) du\right\}\left\{\int_0^1 dv\right\} = \Big[u^2 + u\Big]_{u=0}^{u=1} \cdot \Big[v\Big]_{v=0}^{v=1} = 2 \cdot 1 = 2.$$

S_2 上の点を $\boldsymbol{r} = \Big(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\Big) = \big(v,\ 1,\ 2u\big),\quad 0 \le u \le 1,\quad 0 \le v \le 1$ とパラメータ表示すれば,

$$d\boldsymbol{S} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\, du\, dv = \big(0,\ 0,\ 2\big) \times \big(1,\ 0,\ 0\big) = \big(0,\ 2,\ 0\big)\, du\, dv,$$

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S} = (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) \cdot \big(0,\ 2,\ 0\big)\, du\, dv = 2\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})_y\ du\, dv = 2\left\{\tfrac{\partial}{\partial z}(x^2 - y) - \tfrac{\partial}{\partial x}(xyz^2)\right\} du\, dv = 2\left(-yz^2\right)\ du\, dv$$

である．S_2 上では $y = y(u,v) = 1,\ z = z(u,v) = 2u$ なので, 結局, $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S} = 2\left(-1 \cdot (2u)^2\right)\ du\, dv = -8u^2\, du\, dv$ を得る．故に,

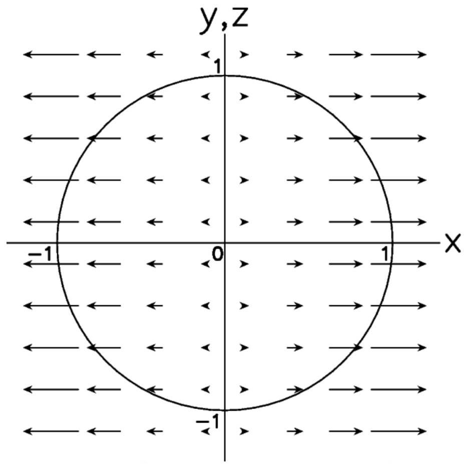
$$I_{\mathrm{S}_2} = \int_0^1 du \int_0^1 dv\, (-8u^2) = -8\left\{\int_0^1 u^2 du\right\}\left\{\int_0^1 dv\right\} = -8\Big[\tfrac{1}{3}u^3\Big]_{u=0}^{u=1} \cdot \Big[v\Big]_{v=0}^{v=1} = -8 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 1 = -\frac{8}{3}.$$

求めるべき値は,

$$I_{\mathrm{C}} = I_{\mathrm{S}_1} + I_{\mathrm{S}_2} = 2 - \tfrac{8}{3} = -\frac{2}{3}\ \cdots\ (\text{答})$$

(別解) 線積分を直接計算すると, $I_{\mathrm{C}_1} = \frac{1}{3},\ I_{\mathrm{C}_2} = \frac{3}{2},\ I_{\mathrm{C}_3} = -\frac{8}{3},\ I_{\mathrm{C}_4} = \frac{2}{3},\ I_{\mathrm{C}_5} = 0,\ I_{\mathrm{C}_6} = -\frac{1}{2},\ I_{\mathrm{C}_7} = \frac{2}{3}$.

【球座標を使っての球体内部での体積積分と球面上での法線面積分の計算 / ガウスの発散定理】



問題 $\boxed{7}$ ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (x^3,\ 0,\ 0)$,

原点を中心とし半径が 1 の球面 S,

S の内部の 3 次元領域 V について以下の問に答えよ.

(i) $I_{\mathrm{V}} = \int_{\mathrm{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{A}\, dv$ を計算せよ.

(ii) $I_{\mathrm{S}} = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ を計算し, この場合についてガウスの定理の成立 ($I_{\mathrm{V}} = I_{\mathrm{S}}$) を確認せよ.

解答:

(i) $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(x^3,\, 0,\, 0\right) = \frac{\partial}{\partial x} x^3 + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z} 0 = 3x^2 + 0 + 0 = 3x^2.$

球座標 (3 次元極座標) では一般に, $x = r \sin\theta \cos\varphi,\quad dv = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$ であり,

また, V は $0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$ と表されるので,

$$
\begin{aligned}
I_{\mathrm{V}} &= \int_{\mathrm{V}} 3x^2 dv = \int_0^1 dr\, r^2 \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, 3(r \sin\theta \cos\varphi)^2 \\
&= 3 \left\{ \int_0^1 r^4\, dr \right\} \left\{ \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta \right\} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \right\} = 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi = \frac{4}{5}\pi \cdots (\text{答})
\end{aligned}
$$

(ii) 曲面 S は球座標表示 $(x,\, y,\, z) = (r \sin\theta \cos\varphi,\ r \sin\theta \sin\varphi,\ r \cos\theta)$ において, r を $r = 1$ に固定し, θ と φ を自由に変化させることで描ける. 従って, S は下記のように θ と φ をパラメータとするパラメータ表示で表せる.

$$
\boldsymbol{r} = (\sin\theta \cos\varphi,\ \sin\theta \sin\varphi,\ \cos\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.
$$

パラメータ表示曲面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ 上の法線面積分の公式において, u に θ, v に φ を対応させて計算を行えばよい.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = (\cos\theta \cos\varphi,\ \cos\theta \sin\varphi,\ -\sin\theta), \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = (-\sin\theta \sin\varphi,\ \sin\theta \cos\varphi,\ 0), \\
&\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = \left(\sin^2\theta \cos\varphi,\ \sin^2\theta \sin\varphi,\ \sin\theta \cos\theta\, (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\right) \\
&\qquad\qquad = \sin\theta \left(\sin\theta \cos\varphi,\ \sin\theta \sin\varphi,\ \cos\theta\right).
\end{aligned}
$$

これは $(\sin\theta)\, \hat{\boldsymbol{r}}$ に等しいので, 正しく S の外向きを向いていることが確認できる（$\because\ 0 \le \theta \le \pi$ なので $\sin\theta \ge 0$）.

$$
\begin{aligned}
I_{\mathrm{S}} &= \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(x^3,\, 0,\, 0\right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} \right) \\
&= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\sin^3\theta \cos^3\varphi,\, 0,\, 0\right) \cdot \sin\theta \left(\sin\theta \cos\varphi,\ \sin\theta \sin\varphi,\ \cos\theta\right) \\
&= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \sin^5\theta \cos^4\varphi = \left\{ \int_0^\pi \sin^5\theta\, d\theta \right\} \left\{ \int_0^{2\pi} \cos^4\varphi\, d\varphi \right\} = \frac{16}{15} \cdot \frac{3}{4}\pi = \frac{4}{5}\pi \cdots (\text{答})
\end{aligned}
$$

[補足説明] 三角関数の定積分は, 下記のようにして計算できる (置換積分では $t = \cos\theta$ とおいた).

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2\theta) \sin\theta\, d\theta = \int_{-1}^1 (1 - t^2)\, dt = \left[t - \tfrac{1}{3} t^3\right]_{t=-1}^{t=1} = \frac{4}{3}. \\
&\int_0^\pi \sin^5\theta\, d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2\theta)^2 \sin\theta\, d\theta = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^2\, dt = \int_{-1}^1 (1 - 2t + t^2)\, dt = \left[t - \tfrac{2}{3} t^3 + \tfrac{1}{5} t^5\right]_{t=-1}^{t=1} = \frac{16}{15}. \\
&\int_0^{2\pi} \cos^4\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, \left(1 - \sin^2\varphi\right)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = \pi - \tfrac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi.
\end{aligned}
$$

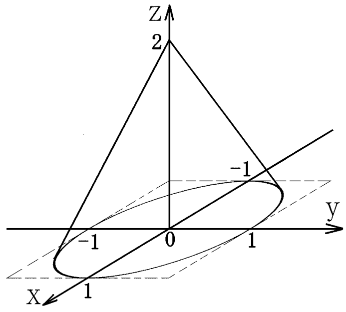
【円柱座標を使っての円錐内部での体積積分と円錐面上での法線面積分の計算 / ガウスの発散定理】

問題 $\boxed{8}$ ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (xy^2,\ x^2yz,\ x^2z + y^2z)$ の,

曲面 $\mathrm{S} = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, 0 \le z \le 2,\ x^2 + y^2 = \left(1 - \dfrac{z}{2}\right)^2 \right\}$ 上での

法線面積分 $I_{\mathrm{S}} = \displaystyle\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ の値を求めよ. ただし, S の表裏は, 体積領域

$\mathrm{V} = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, 0 \le z \le 2,\ x^2 + y^2 \le \left(1 - \dfrac{z}{2}\right)^2 \right\}$ に接する側を裏面と定める.



解法 I: 平面分 S_0 を, $\mathrm{S}_0 = \left\{ (x,y,0) \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 1 \right\}$ と定義する. S_0 の表裏は, 領域 V に接する側を裏面と定める. このとき, $I_{\mathrm{V}} = \displaystyle\int_{\mathrm{V}} \mathrm{div}\, \boldsymbol{A}\, dv,\quad I_{\mathrm{S}_0} = \int_{\mathrm{S}_0} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ とすると, ガウスの発散定理により, $I_{\mathrm{V}} = I_{\mathrm{S}} + I_{\mathrm{S}_0}$ が成立する.

S_0 上では, $d\boldsymbol{S}$ は z 軸の負の方向を向くが, $\boldsymbol{A}$ の z 成分はゼロなので $\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$ となり, $I_{\mathrm{S}_0} = 0$ である. したがって, $I_{\mathrm{S}} = I_{\mathrm{V}}$ であり, I_{V} を計算することによって I_{S} の値を求めることができる. 領域 V は z 軸に関して軸対称な形状をしているので, 円柱座標による扱いが適している. 円柱座標を用いて V を表すと,

$$\mathrm{V} = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ 0 \le z \le 2,\ \ 0 \le \rho \le 1 - \frac{z}{2} \right\}$$

である. また, $\mathrm{div}\, \boldsymbol{A}$ は,

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{A} \ = \ \frac{\partial}{\partial x} xy^2 + \frac{\partial}{\partial y} x^2yz + \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2z + y^2z\right) \ = \ y^2 + x^2z + x^2 + y^2 = x^2(z+1) + 2y^2$$

である. これを円柱座標 ρ, φ, z で表すために $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ を代入すれば,

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{A} = (\rho\cos\varphi)^2\ (z+1) + 2\,(\rho\sin\varphi)^2 = (\rho\cos\varphi)^2\ (z+1) + 2\rho^2\left(1 - \cos^2\varphi\right) = \rho^2\left\{(z-1)\cos^2\varphi + 2\right\}$$

を得る. 円柱座標のヤコビアンが ρ であること (即ち, $dv \ = \ \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$) に注意を払うと,

$$\begin{aligned}
I_{\mathrm{V}} &= \int_0^2 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1-\frac{z}{2}} d\rho \cdot \rho \cdot \rho^2 \left\{(z-1)\cos^2\varphi + 2\right\} \\
&= \int_0^2 dz \left\{ \left((z-1)\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi + 2\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_0^{1-\frac{z}{2}} \rho^3 d\rho \right) \right\} \\
&= \int_0^2 dz \frac{1}{4}\left(1 - \frac{z}{2}\right)^4 \left\{(z-1)\pi + 4\pi\right\} = \frac{\pi}{4}\int_0^2 \left(1 - \frac{z}{2}\right)^4 (z+3)\, dz.
\end{aligned}$$

計算を容易にするためには例えば $z' = 1 - \dfrac{z}{2}$ とおいて置換積分すればよい. 即ち, $\displaystyle\int_0^2 dz \cdots = 2\int_0^1 dz' \cdots$ なので,

$$I_{\mathrm{V}} = \frac{\pi}{4} \cdot 2\int_0^1 dz' z'^4 (5 - 2z') = \frac{\pi}{2}\int_0^1 (5z'^4 - 2z'^5) dz' = \frac{\pi}{2}\left(\frac{5}{5} - \frac{2}{6}\right) = \frac{\pi}{3} \ \cdots \text{(答)}.$$

問題 $\boxed{8}$ （つづき）

解法 II:

計算練習のため面積分のまま計算を実行してみよう．デカルト座標と円柱座標の関係式

$$(x, y, z) = (\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)$$

において, $\rho = 1 - \dfrac{z}{2}$ とし, z を v で, φ を u で置き換えると, 曲面 S のパラメータ表示として下記のものを得る.

$$\mathrm{S} = \left\{ \boldsymbol{r} \,\middle|\, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = \left(\left(1 - \frac{v}{2}\right)\cos u,\ \left(1 - \frac{v}{2}\right)\sin u,\ v \right),\ 0 \le v \le 2,\ 0 \le u \le 2\pi \right\}.$$

従って,

$$I_{\mathrm{S}} = \int_0^2 dv \int_0^{2\pi} du\, \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{r}\left(u, v\right)\right) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right).$$

ここで,

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{r}\left(u, v\right)\right) = \left(\left(1 - \frac{v}{2}\right)^3 \cos u \sin^2 u,\ v\left(1 - \frac{v}{2}\right)^3 \cos^2 u \sin u,\ v\left(1 - \frac{v}{2}\right)^2 \right).$$

また,

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \left(1 - \tfrac{v}{2}\right) \Big(-\sin u,\ \cos u,\ 0 \Big) \times \left(-\frac{1}{2}\cos u,\ -\frac{1}{2}\sin u,\ 1 \right) = \left(1 - \tfrac{v}{2}\right) \left(\cos u,\ \sin u,\ \frac{1}{2} \right).$$

なお, このベクトルは正しく表側を向いているが, もし裏向きなら, -1 倍して表向きに変えておかねばならない.

故に,

$$I_{\mathrm{S}} = \int_0^2 dv \int_0^{2\pi} du \left\{ \left(1 - \frac{v}{2}\right)^4 \cos^2 u \sin^2 u + v\left(1 - \frac{v}{2}\right)^4 \cos^2 u \sin^2 u + \frac{1}{2} v \left(1 - \frac{v}{2}\right)^3 \right\}.$$

ここで

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 u\ \sin^2 u\, du = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2 2u\, du = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{2\pi} du = 2\pi$$

を用いると,

$$I_{\mathrm{S}} = \int_0^2 dv \left\{ \left(1 - \frac{v}{2}\right)^4 \frac{\pi}{4} + v\left(1 - \frac{v}{2}\right)^4 \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} v \left(1 - \frac{v}{2}\right)^3 2\pi \right\}$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^2 dv \left\{ \left(1 - \frac{v}{2}\right)^4 (1 + v) + 4v\left(1 - \frac{v}{2}\right)^3 \right\}.$$

$v' = 1 - \dfrac{v}{2}$ とおいて置換積分すると, $\displaystyle\int_0^2 dv \cdots = 2\int_0^1 dv' \cdots$ なので,

$$I_{\mathrm{S}} = \frac{\pi}{4}\, 2 \int_0^1 dv' \left\{ v'^4 (3 - 2v') + 4(2 - 2v') v'^3 \right\}$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 dv' \left(-5v'^4 - 2v'^5 + 8v'^3 \right) = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{5}{5} - \frac{2}{6} + \frac{8}{4} \right) = \frac{\pi}{3}\ \cdots (答).$$