応 用 数 学 Ⅲ　　定 期 試 験　　答 案 用 紙 (全 4 頁中の 1 頁目)

福井大学工学部機械工学科 2 年生 対象、　担当教員 田嶋、　2017 年 2 月 10 日 2 限実施

【1】 $\vec{A} = (x + 2y + 3z,\ xy,\ xyz)$ のとき、$\mathrm{div}\,\vec{A}$ および $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ を求めよ。(10 点)

【2】 $\varphi = xy^2z^3$ のとき、$\mathrm{grad}\,\varphi$ および $\triangle\varphi$ を求めよ。但し、$\triangle$ はラプラス演算子である。(10 点)

【3】 $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ を任意のベクトルとするとき、$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \left(\vec{C} \times \vec{D}\right)$ を外積を使わずに表せ。(10 点)

【4】 下記の空欄 [1:] 〜 [4:] に、適当な人名や数式を選択肢から選び、ア〜コ の記号を空欄内に書き込め。(10 点)

[1:] の定理により、空間内のすべての点で [2:] なら接線線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{C}} \vec{A} \cdot d\vec{r}$ は任意の閉曲線 C に対してゼロとなる。また、[3:] の定理により、空間内のすべての点で [4:] なら法線面積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{S}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$ は任意の閉曲面 S に対してゼロとなる。

選択肢：　ア：テイラー　イ：ストークス
ウ：ライプニッツ　エ：ピタゴラス　オ：ガウス
カ：$\mathrm{grad}\vec{A} \neq \vec{0}$　キ：$\mathrm{div}\vec{A} = 0$　ク：$\mathrm{div}\vec{A} \neq 0$
ケ：$\mathrm{rot}\vec{A} = \vec{0}$　コ：$\mathrm{rot}\vec{A} \neq \vec{0}$

学科	学籍番号	氏名	得点
機械工学			[1] [2] [3] [4] 合計

【5】 点 A の座標を $(-1,\ 1,\ -1)$、点 B の座標を $(-1,\ 2,\ 1)$、点 C の座標を $(1,\ -3,\ -4)$ とするとき、$\cos\angle\mathrm{ABC}$ を求めよ。また、三角形 ABC の面積 S を求めよ。(10 点)

【6】 t をパラメータとして表された xyz 空間内の曲線 $(x, y, z) = \left(\dfrac{1}{3}t^3,\ t^2,\ 2t\right)$ の $1 \leq t \leq 2$ に対応する部分の長さ L を求めよ。(10 点)

学科 機械工学	学籍番号								氏名		得点	[5]	[6]	合計

【7】 曲線Cを、$\mathrm{C}=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x=2t^2+t,\ y=t^2-1,\ z=2t-1,\ 0\leq t\leq 1\right\}$ と定義する。
ただし、$t=0$ に対応する点を始点、$t=1$ に対応する点を終点とする。
このとき、ベクトル場 $\vec{A}=\left(x,\ y^2+z^2,\ 2yz\right)$ の、曲線Cに沿っての接線線積分 $I=\displaystyle\int_{\mathrm{C}}\vec{A}\cdot d\vec{r}$ の値を求めよ。(10点)

【8】 曲面Sを、$\mathrm{S}=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x=u+uv,\ y=v-uv,\ z=uv,\ 0\leq u\leq 1,\ 0\leq v\leq 1\right\}$ と定義する。
ただし、Sの表・裏は次のように定める: $(u,v)=(0,0)$ に対応する点 (即ち $(x,y,z)=(0,0,0)$) における
Sの法線ベクトルが表（おもて）側を向いているとき、その z 成分は正であるとする。
このとき、ベクトル場 $\vec{A}=\left(y,\ -x,\ y+z\right)$ の、S上での法線面積分 $I=\displaystyle\int_{\mathrm{S}}\vec{A}\cdot d\vec{S}$ の値を求めよ。(10点)

学科	学籍番号								氏名	得点	[7]	[8]	合計
機械工学													

【9】 z 軸を対称軸とし半径が 2 の円柱の内部の領域で、$x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq z \leq 3$ を満たす部分を V とする。
スカラー場 $f = xyz^3$ の領域 V での体積積分 $I = \displaystyle\int_{\mathrm{V}} f\, dxdydz$ の値を求めよ。(10 点)

【10】 座標原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ を中心とし半径が 2 の球の内部の領域のうち、$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ である部分を V とする。
スカラー場 $f = xyz^3$ の領域 V での体積積分 $I = \displaystyle\int_{\mathrm{V}} f\, dxdydz$ の値を求めよ。(10 点)

学科	機械工学	学籍番号									氏名		得点	[9]	[10]	合計

応 用 数 学 Ⅲ 定 期 試 験 答 案 用 紙 (全4頁中の1頁目)

福井大学工学部機械工学科 2 年生 対象、 担当教員 田嶋、 2017 年 2 月 10 日 2 限実施

【1】 $\vec{A}=(x+2y+3z,\ xy,\ xyz)$ のとき、$\mathrm{div}\,\vec{A}$ および $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ を求めよ。(10 点)

解答例

$\mathrm{div}\,\vec{A}=\frac{\partial}{\partial x}(x+2y+3z)+\frac{\partial}{\partial y}(xy)+\frac{\partial}{\partial z}(xyz)$

$=1+x+xy\ \ \cdots$(答)

$\mathrm{rot}\,\vec{A}=\Big(\frac{\partial}{\partial y}(xyz)-\frac{\partial}{\partial z}(xy),$

$\frac{\partial}{\partial z}(x+2y+3z)-\frac{\partial}{\partial x}(xyz),$

$\frac{\partial}{\partial x}(xy)-\frac{\partial}{\partial y}(x+2y+3z)\Big)$

$=(xz,\ 3-yz,\ y-2)\ \ \cdots$(答)

【2】 $\varphi=xy^2z^3$ のとき、$\mathrm{grad}\,\varphi$ および $\triangle\varphi$ を求めよ。但し、$\triangle$ はラプラス演算子である。(10 点)

解答例

$\mathrm{grad}\,\varphi=\Big(\frac{\partial}{\partial x}(xy^2z^3),\ \frac{\partial}{\partial y}(xy^2z^3),\ \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z^3)\Big)$

$=\Big(y^2z^3,\ 2xyz^3,\ 3xy^2z^2\Big)\cdots$(答)

$\triangle\varphi=\frac{\partial}{\partial x}(y^2z^3)+\frac{\partial}{\partial y}(2xyz^3)+\frac{\partial}{\partial z}(3xy^2z^2)$

$=2xz^3+6xy^2z\cdots$(答)

【3】 $\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{D}$ を任意のベクトルとするとき、$\big(\vec{A}\times\vec{B}\big)\cdot\big(\vec{C}\times\vec{D}\big)$ を外積を使わずに表せ。(10 点)

解答例

$\big(\vec{A}\times\vec{B}\big)\cdot\big(\vec{C}\times\vec{D}\big)$

$=\vec{C}\cdot\big(\vec{D}\times(\vec{A}\times\vec{B})\big)$

$=\vec{C}\cdot\big((\vec{D}\cdot\vec{B})\vec{A}-(\vec{D}\cdot\vec{A})\vec{B}\big)$

$=(\vec{A}\cdot\vec{C})\,(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\cdot\vec{D})\,(\vec{B}\cdot\vec{C})\ \ \cdots$(答)

【4】 下記の空欄 $\boxed{1:\quad}$〜$\boxed{4:\quad}$ に、適当な人名や数式を選択肢から選び、ア〜コ の記号を空欄内に書き込め。(10 点)

$\boxed{1:\quad}$ の定理により、空間内のすべての点で $\boxed{2:\quad}$ なら接線線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{C}}\vec{A}\cdot d\vec{r}$ は任意の閉曲線 C に対してゼロとなる。また、$\boxed{3:\quad}$ の定理により、空間内のすべての点で $\boxed{4:\quad}$ なら法線面積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{S}}\vec{A}\cdot d\vec{S}$ は任意の閉曲面 S に対してゼロとなる。

選択肢： ア：テイラー イ：ストークス
ウ：ライプニッツ エ：ピタゴラス オ：ガウス
カ：$\mathrm{grad}\vec{A}\neq\vec{0}$ キ：$\mathrm{div}\vec{A}=0$ ク：$\mathrm{div}\vec{A}\neq 0$
ケ：$\mathrm{rot}\vec{A}=\vec{0}$ コ：$\mathrm{rot}\vec{A}\neq\vec{0}$

解答例

(1)$\cdots$ イ
(2)$\cdots$ ケ
(3)$\cdots$ オ
(4)$\cdots$ キ

学科 機械工学	学籍番号								氏名	得点 [1]	[2]	[3]	[4]	合計

【5】 点 A の座標を $(-1,\ 1,\ -1)$、点 B の座標を $(-1,\ 2,\ 1)$、点 C の座標を $(1,\ -3,\ -4)$ とするとき、$\cos\angle\mathrm{ABC}$ を求めよ。また、三角形 ABC の面積 S を求めよ。(10 点)

解答例

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-1,1,-1)-(-1,2,1)=(-1+1,1-2,-1-1)=(0,-1,-2)$,

$\overline{\mathrm{BA}}=\sqrt{0^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{0+1+4}=\sqrt{5}$,

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,-3,-4)-(-1,2,1)=(1+1,-3-2,-4-1)=(2,-5,-5)$,

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2^2+(-5)^2+(-5)^2}=\sqrt{4+25+25}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$,

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0\cdot 2+(-1)\cdot(-5)+(-2)\cdot(-5)=0+5+10=15$,

$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{BA}}\ \overline{\mathrm{BC}}}=\frac{15}{\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{6}}=\frac{5}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{6}=\sqrt{\frac{5}{6}}\cdots$(答)

$S=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BA}}\ \overline{\mathrm{BC}}\ \sin\angle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{6}\sqrt{1-\frac{5}{6}}=\frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{6}\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdots$(答)

[別解]

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\times\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-5,\ -4,\ 2)$,

$2S=\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\times\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\sqrt{(-5)^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{25+16+4}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$,

$S=\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdots$(答)

【6】 t をパラメータとして表された xyz 空間内の曲線 $(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}t^3,\ t^2,\ 2t\right)$ の $1\le t\le 2$ に対応する部分の長さ L を求めよ。(10 点)

解答例

$L=\int_1^2\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt=\int_1^2\sqrt{(t^2)^2+(2t)^2+2^2}\,dt=\int_1^2\sqrt{t^4+4t^2+4}\,dt=\int_1^2\sqrt{(t^2+2)^2}\,dt=\int_1^2\left|t^2+2\right|\,dt$

$=\int_1^2\left(t^2+2\right)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3+2t\right]_{t=1}^{t=2}=\frac{8}{3}+4-\frac{1}{3}-2=\frac{13}{3}\cdots$(答)

学科	学籍番号								氏名	得点	[5]	[6]	合計
機械工学													

【7】 曲線Cを、$\mathrm{C} = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, x = 2t^2 + t,\ y = t^2 - 1,\ z = 2t - 1,\ 0 \le t \le 1 \right\}$ と定義する。
ただし、$t = 0$ に対応する点を始点、$t = 1$ に対応する点を終点とする。
このとき、ベクトル場 $\vec{A} = \left(x,\ y^2 + z^2,\ 2yz\right)$ の、曲線Cに沿っての接線線積分 $I = \displaystyle\int_{\mathrm{C}} \vec{A} \cdot d\vec{r}$ の値を求めよ。(10点)

解答例

$\mathrm{rot}\,\vec{A} = (0, 0, 0)$ なので $\mathrm{grad}\varphi = \vec{A}$ を満たすスカラー場 φ が存在する。
$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = A_x = x$ より $\varphi = \int A_x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + f_1(y, z).$
$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = A_y = y^2 + z^2$ より $\varphi = \int A_y\,dy = \frac{1}{3}y^3 + yz^2 + f_2(x, z).$
$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = A_z = 2yz$ より $\varphi = \int A_z\,dz = yz^2 + f_3(x, y).$
$f_1(y, z) = \frac{1}{3}y^3 + yz^2,\ f_2(x, z) = \frac{1}{2}x^2,\ f_3(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3$ とすれば3式の与える φ は一致する。
上述の考察により、$\mathrm{grad}\varphi = \vec{A}$ を満たす φ として、$\varphi = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 + yz^2$ が求まった。
$I = \int_{\mathrm{C}} \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r} = \int_{\mathrm{C}} d\varphi = \varphi(\vec{r}(t=1)) - \varphi(\vec{r}(t=0)) = \varphi(3, 0, 1) - \varphi(0, -1, -1) = \frac{9}{2} + \frac{4}{3} = \frac{35}{6}\ \cdots$(答)
[別解]
$I = \int_0^1 \vec{A} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\,dt = \int_0^1 (2t^2 + t, t^4 + 2t^2 - 4t + 2, 4t^3 - 2t^2 - 4t + 2) \cdot (4t + 1, 2t, 2)\,dt$
$= \int_0^1 (2t^5 + 20t^3 - 6t^2 - 3t + 4)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^6 + 5t^4 - 2t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 4t\right]_0^1 = \frac{1}{3} + 5 - 2 - \frac{3}{2} + 4 = \frac{35}{6}\ \cdots$(答)

【8】 曲面Sを、$\mathrm{S} = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, x = u + uv,\ y = v - uv,\ z = uv,\ 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1 \right\}$ と定義する。
ただし、Sの表・裏は次のように定める: $(u, v) = (0, 0)$ に対応する点 (即ち $(x, y, z) = (0, 0, 0)$) における
Sの法線ベクトルが表（おもて）側を向いているとき、その z 成分は正であるとする。
このとき、ベクトル場 $\vec{A} = \left(y,\ -x,\ y + z\right)$ の、S上での法線面積分 $I = \displaystyle\int_{\mathrm{S}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$ の値を求めよ。(10点)

解答例

$\vec{r} = (u + uv, v - uv, uv)$ のとき、$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (v + 1, -v, v),\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (u, -u + 1, u),\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-v, -u, -u + v + 1)$
$(u, v) = (0, 0)$ で $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (0, 0, 1)$ は z 成分が正であり、Sの表（おもて）側を向いている。
S上で $\vec{A} = (y, -x, y + z) = (-uv + v, -uv - u, v)$
$\vec{A} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right) = u^2 v + uv^2 + u^2 - uv + v$
$I = \int_0^1 du \int_0^1 dv (u^2 v + uv^2 + u^2 - uv + v)$
$\int_0^1 u^2\,du = \int_0^1 v^2\,dv = \frac{1}{3},\ \int_0^1 u\,du = \int_0^1 v\,dv = \frac{1}{2},\ \int_0^1 du = \int_0^1 dv = 1$ であるから、
$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{1} = \frac{11}{12}\ \cdots$(答)

学科	機械工学	学籍番号									氏名		得点	[7]	[8]	合計

応用数学Ⅲ　定期試験　答案用紙 (全 4 頁中の 4 頁目)

福井大学工学部機械工学科 2 年生 対象、　担当教員 田嶋、　2017 年 2 月 10 日 2 限実施

【9】 z 軸を対称軸とし半径が 2 の円柱の内部の領域で、$x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq z \leq 3$ を満たす部分を V とする。
スカラー場 $f = xyz^3$ の領域 V での体積積分 $I = \int_{\mathrm{V}} f\, dxdydz$ の値を求めよ。(10 点)

解答例

円柱座標 ρ, φ, z を使うと、$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z,$
$dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz,\ f = xyz^3 = \rho\cos\varphi\,\rho\sin\varphi\, z^3 = \rho^2\cos\varphi\sin\varphi z^3$ である。

$I = \int_0^2 d\rho\ \int_0^{\pi/2} d\varphi\ \int_0^3 dz \rho\cdot\rho^2 \sin\varphi\cos\varphi z^3$

$= \int_0^2 \rho^3 d\rho\ \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi\ \int_0^3 z^3 dz$

$= \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_{\rho=0}^{\rho=2} \left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \left[\frac{1}{4}z^4\right]_{z=0}^{z=3} = \frac{2^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3^4}{4} = \frac{81}{2}$ $\cdots$(答)

【10】 座標原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ を中心とし半径が 2 の球の内部の領域のうち、$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ である部分を V とする。
スカラー場 $f = xyz^3$ の領域 V での体積積分 $I = \int_{\mathrm{V}} f\, dxdydz$ の値を求めよ。(10 点)

解答例

3 次元極座標 r, θ, φ を使うと、$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta,$
$dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi,\ f = xyz^3 = r^5\sin^2\theta\cos^3\theta\sin\varphi\cos\varphi$ である。

$I = \int_0^2 r^7 dr\ \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos^3\theta d\theta\ \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$

$= \left[\frac{1}{8}r^8\right]_{r=0}^{r=2} \int_0^1 \sin^3\theta(1-\sin^2\theta)d(\sin\theta)\ \left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2}$

$= \frac{2^8}{8}\cdot \left[\frac{1}{4}\sin^4\theta - \frac{1}{6}\sin^6\theta\right]_{\sin\theta=0}^{\sin\theta=1}\cdot\frac{1}{2}$

$= 2^5\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4}{3}$ $\cdots$(答)

学科	機械工学	学籍番号		氏名		得点	[9]	[10]	合計