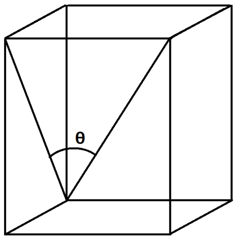
応 用 数 学 Ⅲ　　定 期 試 験　　答 案 用 紙 (全4頁中の1頁目)

福井大学工学部機械工学科２年生 対象、　担当教員 田嶋、　2016 年２月５日２限実施

【1】 右図のように立方体の頂点を結ぶ２線分の交角として定義される角 θ について、$\cos\theta$ を求めよ。(10 点)



【3】 任意の５本のベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}$ について等式 $\mathbf{A}\times[\mathbf{B}\times\{\mathbf{C}\times(\mathbf{D}\times\mathbf{E})\}] = \beta\mathbf{B}+\delta\mathbf{D}+\epsilon\mathbf{E}$ が恒等的に成り立つようにスカラー β, δ, ϵ の値をベクトル $\mathbf{A}\sim\mathbf{E}$ の内積を用いて表せ。
【注意】最終的な答に外積を使ってはならない。(10 点)

【2】 一辺（稜）の長さが l である正四面体の体積 V を求めよ。(10 点)

【4】 ベクトル関数 $\mathbf{A}$ の変数を t とし、$\hat{\mathbf{A}} = \dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$、$\mathbf{A}' = \dfrac{d\mathbf{A}}{dt}$ とするとき、$\dfrac{d\hat{\mathbf{A}}}{dt}$ を $\mathbf{A}$、$\hat{\mathbf{A}}$、$\mathbf{A}'$、$|\mathbf{A}|$ を用いて表せ。(10 点)

学科 機械工学	学籍番号								氏名	得点 [1]	[2]	[3]	[4]	合計

【5】 $\mathbf{A}(t) = \left(\sin t,\, \cos^2 t,\, 0\right)$、$\mathbf{A}'(t) = \dfrac{d\mathbf{A}(t)}{dt}$ とするとき、$I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \mathbf{A}(t)\cdot\mathbf{A}'(t)\,dt$ 求めよ。(10 点)

【6】 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left(x + \alpha y + \beta z,\, 2x + 3y + \gamma z,\, 4x + 5y + 6z\right)$ とする。任意の閉曲線 C に沿っての接線線積分 $I_{\mathrm{C}} = \displaystyle\oint_{\mathrm{C}} \mathbf{A}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ がゼロとなるように、定数 $\alpha,\, \beta,\, \gamma$ の値を定めよ。(10 点)

学科	機械工学	学籍番号								氏名	得点	[5]	[6]

【7】 $\triangle \dfrac{e^{2r}}{r}$ を求めよ。ただし $\triangle$ はラプラス演算子である。(10 点)

【8】 $\mathbf{r} = (t,\, t^2\, 1)$ $(0 \le t \le 1)$ ($t = 0$ に対応する点が始点、$t = 1$ に対応する点が終点) とパラメータ表示された曲線 C に沿ってのベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (x^2,\, xyz,\, \sqrt{y^2 + z^2})$ の接線線積分 $I_{\mathrm{C}} = \displaystyle\int_{\mathrm{C}} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ の値を求めよ。(10 点)

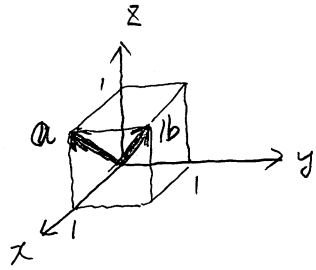
学科	機械工学	学籍番号								氏名		得点	[7]	[8]

【9】 $\mathbf{r} = (u\cos v,\ u\sin v,\ 1-u^2)$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$ (座標原点から見える側が裏面) とパラメータ表示された曲面 S 上でのベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (x,\ y,\ z)$ の法線面積分 $I_{\mathrm{S}} = \displaystyle\int_{\mathrm{S}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ の値を求めよ。(10 点)

【10】 座標原点を中心とし半径が a の球面内の 3 次元領域 V におけるスカラー場 $\varphi(\mathbf{r}) = z^4$ の体積積分 $I_{\mathrm{V}} = \displaystyle\int_{\mathrm{V}} \varphi(\mathbf{r})dv$ の値を求めよ。(10 点)

学科	学籍番号								氏名	得点	[9]	[10]
機械工学												

[1] 座標軸，スケール，ベクトル $\mathbb{a}$，$\mathbb{b}$ を右図のようにとると



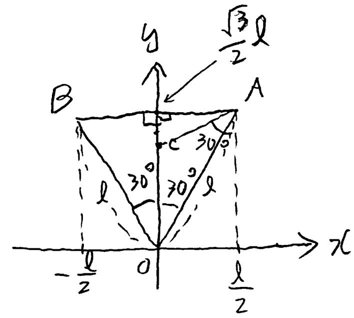
$\mathbb{a} = (1, 0, 1)$

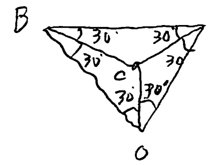
$\mathbb{b} = (1, 1, 1)$

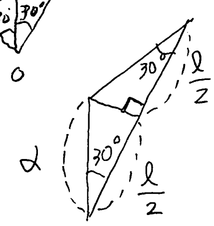
$$\cos\theta = \frac{\mathbb{a}\cdot\mathbb{b}}{|\mathbb{a}||\mathbb{b}|} = \frac{1\cdot1+0\cdot1+1\cdot1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\ \sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\cdot3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (\text{答})$$

[2] 正四面体の4頂点を O，A，B，C とし，A，B を右図のように x-y 平面内にとると，対称性より C は y-z 平面内にあり，$\angle OAC = 30^\circ$ である。







C の座標を $(0, \alpha, \beta)$ とおくと

$\alpha\cos30^\circ = \frac{l}{2} \qquad \therefore\ \alpha = \frac{l}{\sqrt{3}}$

$|OC| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = l$ より

$\frac{l^2}{3} + \beta^2 = l^2 \qquad \therefore\ \beta = \sqrt{\frac{2}{3}}\,l$

$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ を3稜とする平行六面体の体積は

$$(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC} = \left\{\left(\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l, 0\right)\times\left(-\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l, 0\right)\right\}\cdot\left(0, \frac{l}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$$

$$= \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}l^2\right)\cdot\left(0, \frac{l}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$$

$$= \frac{l^3}{\sqrt{2}}$$

正四面体の体積はその $\frac{1}{6}$ 倍なので $\quad V = \dfrac{l^3}{6\sqrt{2}} \quad$ (答)

($\because$ 六面体を三角柱2個に分けて $\frac{1}{2}$ 倍。錐体の体積は柱体の $\frac{1}{3}$ 倍。

[3] $\mathbb{A}\times[\mathbb{B}\times\{\mathbb{C}\times(\mathbb{D}\times\mathbb{E})\}]$

$= \mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times\mathbb{F}) \qquad (\mathbb{F} = \mathbb{C}\times(\mathbb{D}\times\mathbb{E})$ とおく$)$

$= (\mathbb{A}\cdot\mathbb{F})\mathbb{B} - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})\mathbb{F} \qquad$ ($\because$ ベクトル三重積の公式)

$= (※)$

ここで $\mathbb{F} = (\mathbb{C}\cdot\mathbb{E})\mathbb{D} - (\mathbb{C}\cdot\mathbb{D})\mathbb{E} \qquad$ ($\because$ ベクトル三重積の公式)

を代入すると

$(※) = (\mathbb{C}\cdot\mathbb{E})(\mathbb{A}\cdot\mathbb{D})\mathbb{B} - (\mathbb{C}\cdot\mathbb{D})(\mathbb{A}\cdot\mathbb{E})\mathbb{B}$

$\quad - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})(\mathbb{C}\cdot\mathbb{E})\mathbb{D} + (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})(\mathbb{C}\cdot\mathbb{D})\mathbb{E}$

$$= \{(\mathbb{A}\cdot\mathbb{D})(\mathbb{C}\cdot\mathbb{E}) - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{E})(\mathbb{C}\cdot\mathbb{D})\}\mathbb{B}$$
$$-(\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})(\mathbb{C}\cdot\mathbb{E})\mathbb{D} + (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})(\mathbb{C}\cdot\mathbb{D})\mathbb{E}$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} \beta &= (\mathbb{A}\cdot\mathbb{D})(\mathbb{C}\cdot\mathbb{E}) - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{E})(\mathbb{C}\cdot\mathbb{D}) \\ \delta &= -(\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})(\mathbb{C}\cdot\mathbb{E}) \\ \varepsilon &= (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})(\mathbb{C}\cdot\mathbb{D}) \end{aligned}\right\} \text{(答)}$$

[4] ・ $\dfrac{d\hat{\mathbb{A}}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{|\mathbb{A}|}\mathbb{A}\right) = \left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{|\mathbb{A}|}\right)\mathbb{A} + \dfrac{1}{|\mathbb{A}|}\underbrace{\dfrac{d\mathbb{A}}{dt}}_{\mathbb{A}'}$

・ $\dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{|\mathbb{A}|} = \left(\dfrac{d}{d|\mathbb{A}|}\dfrac{1}{|\mathbb{A}|}\right)\cdot\dfrac{d|\mathbb{A}|}{dt} = -\dfrac{1}{|\mathbb{A}|^2}\dfrac{d|\mathbb{A}|}{dt}$

・ $\dfrac{d|\mathbb{A}|}{dt} = \dfrac{d}{dt}\sqrt{\mathbb{A}^2} = \left(\dfrac{d}{d(\mathbb{A}^2)}\sqrt{\mathbb{A}^2}\right)\cdot\dfrac{d(\mathbb{A}^2)}{dt}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\mathbb{A}^2}}\cdot 2\mathbb{A}\cdot\frac{d\mathbb{A}}{dt} = \frac{\mathbb{A}}{|\mathbb{A}|}\cdot\frac{d\mathbb{A}}{dt} = \hat{\mathbb{A}}\cdot\mathbb{A}'$$

$$\therefore \frac{d\hat{\mathbb{A}}}{dt} = -\frac{1}{|\mathbb{A}|^2}(\hat{\mathbb{A}}\cdot\mathbb{A}')\mathbb{A} + \frac{1}{|\mathbb{A}|}\mathbb{A}' = \frac{\mathbb{A}' - (\hat{\mathbb{A}}\cdot\mathbb{A}')\hat{\mathbb{A}}}{|\mathbb{A}|} \quad \text{(答)}$$

[5] 一般に $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}'dt = [\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\mathbb{A}'\cdot\mathbb{A}\,dt$ (∵部分積分法)

$\therefore \displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}'dt = \frac{1}{2}[\mathbb{A}^2]_{t_1}^{t_2}$ である.

故に

$$I = \frac{1}{2}\mathbb{A}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\mathbb{A}(0)^2$$
$$= \frac{1}{2}\left|\left(\sin\frac{\pi}{4}, \cos^2\frac{\pi}{4}, 0\right)\right|^2 - \frac{1}{2}\left|(\sin 0, \cos^2 0, 0)\right|^2$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + 0^2\right\} - \frac{1}{2}(0^2 + 1^2 + 0^2)$$
$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} \quad \text{(答)}$$

(別解) $\mathbb{A}' = (\cos t, -2\cos t\sin t, 0)$, $\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}' = (\cos t - 2\cos^3 t)\sin t$,

$$I = \int_0^{\pi/4}(\cos t - 2\cos^3 t)\sin t\,dt = \int_{1/\sqrt{2}}^{1}(u - 2u^3)du \quad (u = \cos t)$$
$$= \left[\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}u^4\right]_{1/\sqrt{2}}^{1} = \frac{1}{2}\left(1 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8} \quad \text{(答)}$$

[6] ストークスの定理により $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ のとき $I_c=0$ となる.

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(x+\alpha y+\beta z,\ 2x+3y+\gamma z,\ 4x+5y+6z)$$

$$=(5-\gamma,\ \beta-4,\ 2-\alpha)=(0,0,0)$$

$$\therefore\ \alpha=2,\quad \beta=4,\quad \gamma=5\quad (答)$$

[7] $\Delta f(r)=\dfrac{d^2f}{dr^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{df}{dr}$ に $f(r)=\dfrac{e^{2r}}{r}$ を代入すると.

$$\frac{df}{dr}=\frac{(e^{2r})'r-e^{2r}r'}{r^2}=\frac{2r-1}{r^2}e^{2r}=(2r^{-1}-r^{-2})e^{2r}$$

$$\frac{d^2f}{dr^2}=(2r^{-1}-r^{-2})'e^{2r}+(2r^{-1}-r^{-2})\,2e^{2r}$$

$$=(-2r^{-2}+2r^{-3})e^{2r}+(4r^{-1}-2r^{-2})e^{2r}$$

$$=(2r^{-3}-4r^{-2}+4r^{-1})e^{2r}$$

$$\Delta f=(2r^{-3}-4r^{-2}+4r^{-1})e^{2r}+2r^{-1}(2r^{-1}-r^{-2})e^{2r}$$

$$=4r^{-1}e^{2r}=\frac{4e^{2r}}{r}\quad (答)$$

[8] $$I_c=\int_0^1 \boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt=\int_0^1(A_x,A_y,A_z)\cdot(1,2t,0)\,dt$$

$$=\int_0^1(A_x+2tA_y)\,dt$$

$$=\int_0^1(x^2+2t\,xyz)\,dt$$

$$=\int_0^1(t^2+2t\cdot t\cdot t^2\cdot 1)\,dt$$ （∵ C上で $x=t,\ y=t^2,\ z=1$ を代入した）

$$=\int_0^1(t^2+2t^4)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{2}{5}t^5\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{11}{15}\quad (答)$$

[9] $\mathbb{r} = (u\cos v,\ u\sin v,\ 1-u^2)$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} = (\cos v,\ \sin v,\ -2u), \quad \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 0)$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = (2u^2\cos v,\ 2u^2\sin v,\ u)$$ これは表側(おもてがわ)を向いている.

$$I_S = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv\ \mathbb{A}\cdot\left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v}\right), \quad \mathbb{A} = (x, y, z) = (u\cos v,\ u\sin v,\ 1-u^2)$$

$$= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv \left(2u^3\cos^2 v + 2u^3\sin^2 v + u - u^3\right)$$

$$= \int_0^1 (u+u^3)\,du \int_0^{2\pi} dv$$

$$= \left[\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4}u^4\right]_{u=0}^{u=1} \cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi \quad (\text{答})$$

[10]

$$I_V = \int_0^a dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot r^2\sin\theta \cdot \underset{r^4\cos^4\theta}{\overset{\shortparallel}{z^4}}$$

$$= \int_0^a r^6 dr \cdot \int_{-1}^{1} \cos^4\theta\ d(\cos\theta) \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{7}a^7 \cdot \frac{2}{5} \cdot 2\pi$$

$$= \frac{4\pi}{35}a^7 \quad (\text{答})$$