応 用 数 学 Ⅲ　定 期 試 験 問 題

福井大学工学部機械工学科２年生対象，　担当教員 田嶋，　2015 年 2 月 6 日 2 限実施

各人に問題用紙１枚 (B4 判), 答案用紙２枚 (B4 判 表裏使用) を配布する。答案用紙を提出し, 問題用紙は持ち帰れ。全ての問題について, 最終的な答だけでなく, その導出過程も答案用紙に記せ。解答の記入にあたっては, スカラー量とベクトル量が一目で判別できるよう, ベクトル量を表す記号は太字にするか上に矢印をのせるようにせよ。スカラーのゼロとゼロベクトルとを明確に区別して書け。また内積や外積を表すドットやクロス記号を省略してはならない。これらの指示に従わない答案は, 回答者が「ベクトルとスカラーの区別をよく理解していない」「ベクトル同士の積に複数の種類があることをよく理解していない」ことの証拠とみなす。各種の場の積分定理やその他の有用な公式を覚えている場合は証明なくそれらを利用して答を求めてよい。

【1】 (20 点) 4 点 A(0, 1, 2), B(1, 0, 2), C(2, 0, 1), D(3, 2, 3) について, 下記の (1),(2) を求めよ。

(1) 三角形 ABC の面積 S (10 点)　　(2) 四面体 ABCD の体積 V (10 点)

【2】 (10 点) $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を１変数ベクトル関数 (変数を t とする), $\boldsymbol{k}$ を定ベクトルとし, $F = \boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$ とする。また, $F' = \dfrac{dF}{dt}$, $\boldsymbol{A}' = \dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}$, $\boldsymbol{B}' = \dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}$ とする。このとき, F' を $F' = \boldsymbol{A}' \cdot \left(\boxed{\text{ア}}\right) + \boldsymbol{B}' \cdot \left(\boxed{\text{イ}}\right)$ の形に書き表せ。但し, $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ には $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{k}$ は含まれてよいが, $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{B}'$, F' は含まれない。(10 点)

【3】 (20 点) 下記の小問 (1)〜(4) に答えよ。(1)〜(3) は, 応用上の意味付けでなく, 数学的定義を述べよ。

(1) grad とは何か？ (4 点)　　(2) div とは何か？ (4 点)　　(3) rot とは何か？ (4 点)

(4) $\triangle e^{-r^2}$ を求めよ。但し, $\triangle$ はラプラシアンを表す記号である。(8 点)

【4】 (15 点) ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (y, z, x)$ について下記の小問 (1),(2) に答えよ。

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ はスカラーポテンシャルを持つか？　必ず理由を付けて答えよ。(5 点)

(2) 曲線 C を, 始点の座標が (0,0,1), 終点の座標が (1,3,0) の線分とするとき, 接線線積分 $I_{\mathrm{C}} = \displaystyle\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ の値を計算せよ。(10 点)

【5】 (15 点) t をパラメータとするパラメータ表示で

$$\boldsymbol{r} = \bigl(\cos t,\ \sin t,\ \log(\cos t)\bigr) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

と表される曲線の $t = \frac{\pi}{4}$ に対応する点における接線単位ベクトル $\boldsymbol{t}$ と主法線単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を成分表示で求めよ。(15 点)

【6】 (20 点) S を閉曲面（外側をおもて面とする）, $\boldsymbol{A}$ をベクトル場とし, $I_{\mathrm{S}} = \displaystyle\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ とする。このとき, 下記の小問 (1),(2) に答えよ。

(1) $\boldsymbol{A}$ の x 成分が x に依存せず, y 成分が y に依存せず, z 成分が z に依存しないとき, 法線面積分 I_{S} は必ずゼロとなる。その理由を説明せよ。説明においては, S の内部の３次元領域を V とし, V を積分領域とする体積積分 $I_{\mathrm{V}} = \displaystyle\int_{\mathrm{V}} \mathrm{div}\boldsymbol{A}\, dxdydz$ を使用せよ。また根拠となる場の積分定理の名称を説明文中に必ず含めよ。(5 点)

(2) 曲面 S が, a, b, c を正の定数とし, u, v をパラメータとするパラメータ表示で

$$\boldsymbol{r} = \Bigl(a\,(1 - \cos u)\cos v,\ b\,(1 - \cos u)\sin v,\ c\,(u - \sin u)\Bigr) \quad (0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le 2\pi)$$

と表される閉曲面（サイクロイド曲線を１回転させて描いた回転体を３座標軸方向に a, b, c 倍に引き伸ばしたものの表面）であり, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{A} = (x, z, y)$ であるとき, I_{S} の値を求めよ。(15 点)

[1]

(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1,0,2) - (0,1,2) = (1-0, 0-1, 2-2) = (1,-1,0)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (2,0,1) - (0,1,2) = (2-0, 0-1, 1-2) = (2,-1,-1)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1,-1,0) \times (2,-1,-1)$

$= ((-1)\cdot(-1) - 0\cdot(-1),\ 0\cdot 2 - 1\cdot(-1),\ 1\cdot(-1) - (-1)\cdot 2) = (1,1,1)$

$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (答)

(2) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (3,2,3) - (0,1,2) = (3-0, 2-1, 3-2) = (3,1,1)$

$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\right| = \frac{1}{6}\left|(3,1,1)\cdot(1,1,1)\right| = \frac{1}{6}|3+1+1| = \frac{5}{6}$ (答)

[2] $F = \mathbb{k}\cdot(\mathbb{A}\times\mathbb{B})$

$F' = \mathbb{k}\cdot(\mathbb{A}'\times\mathbb{B}) + \mathbb{k}\cdot(\mathbb{A}\times\mathbb{B}')$

ここでスカラー三重積の持つ対称性 $\alpha\cdot(\beta\times\gamma) = \beta\cdot(\gamma\times\alpha) = \gamma\cdot(\alpha\times\beta)$ を利用すると

$F' = \mathbb{A}'\cdot\underbrace{(\mathbb{B}\times\mathbb{k})}_{\boxed{ア}} + \mathbb{B}'\cdot\underbrace{(\mathbb{k}\times\mathbb{A})}_{\boxed{イ}}$ (答)

[3]

(1) スカラー場φに対し. $\mathrm{grad}\,\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$.

(2) ベクトル場 $\mathbb{A} = (A_x, A_y, A_z)$に対し. $\mathrm{div}\,\mathbb{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

(3) ベクトル場 $\mathbb{A} = (A_x, A_y, A_z)$に対し.

$\mathrm{rot}\,\mathbb{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$.

(別解)

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, φをスカラー場, $\mathbb{A}$をベクトル場として

$\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla\varphi$, $\mathrm{div}\,\mathbb{A} = \nabla\cdot\mathbb{A}$, $\mathrm{rot}\,\mathbb{A} = \nabla\times\mathbb{A}$

(注)
∇はベクトルなので
$\mathbb{\nabla}$か$\vec{\nabla}$と書き, ∇とは書かない。
$\triangle$はスカラーなので
$\mathbb{\triangle}$とか$\vec{\triangle}$とは書かない。

(4) $\frac{d}{dr}e^{-r^2} = -2r\,e^{-r^2}$, $\frac{d^2}{dr^2}e^{-r^2} = (4r^2-2)\,e^{-r^2}$,

$\triangle e^{-r^2} = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)e^{-r^2} = (4r^2-2)e^{-r^2} - 4e^{-r^2} = (4r^2-6)\,e^{-r^2}$ (答)

[4]

(1) ベクトル場 A がスカラーポテンシャルを持つことと、恒等的に $\mathrm{rot}\, A = 0$ であることは同値である。しかるに、$\mathrm{rot}\, A = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (y, z, x)$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right) = (-1, -1, -1) \neq 0$$ である。

したがって A はスカラーポテンシャルを持たない。

(2) $r = (x, y, z) = (0, 0, 1)\cdot(1-t) + (1, 3, 0)t = (t, 3t, 1-t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$

は C のパラメータ表示となっている。

$$I_C = \int_C A \cdot dr = \int_0^1 A(t) \cdot \frac{dr(t)}{dt} dt = \int_0^1 (y(t), z(t), x(t)) \cdot (1, 3, -1) dt$$

$$= \int_0^1 (3t, 1-t, t) \cdot (1, 3, -1) dt = \int_0^1 \{3t \cdot 1 + (1-t) \cdot 3 + t \cdot (-1)\} dt$$

$$= \int_0^1 (3t + 3 - 3t - t) dt = \int_0^1 (3 - t) dt = \left[3t - \frac{1}{2}t^2\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= 3 - \frac{1}{2} - (0 - 0) = \frac{5}{2}$$ (答)

[5]

$$r = (\cos t, \sin t, \log(\cos t))$$

$$v = \frac{dr}{dt} = (-\sin t, \cos t, -\tan t)$$, $t = \frac{\pi}{4}$ で $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$

$$a = \frac{dv}{dt} = \left(-\cos t, -\sin t, -\frac{1}{\cos^2 t}\right)$$, $t = \frac{\pi}{4}$ で $a = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -2\right)$

以下、$t = \frac{\pi}{4}$ として計算を進める。

$$v = |v| = \left|\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)\right| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1} = \sqrt{2}$$

$$a_n = a - \left(a \cdot \frac{v}{v}\right)\frac{v}{v} = a - \frac{1}{v^2}(a \cdot v)v$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}, -2 + 1\right) = (0, -\sqrt{2}, -1)$$

$$a_n = |a_n| = \sqrt{0 + 2 + 1} = \sqrt{3}$$

$$t = \frac{v}{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$ (答)

$$n = \frac{a_n}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, -\sqrt{2}, -1) = \left(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$ (答)

[6]

(1) ガウスの(発散)定理により $I_S = I_V$ である.

しかるに. $\mathrm{div}\,\mathbb{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0+0+0=0$ であるから

$I_V = \int_V 0\, dxdydz = 0$ である。ゆえに $I_S = 0$ である.

(2) $\mathbb{A}_1 = (x, 0, 0)$, $\mathbb{A}_2 = (0, z, y)$ とおくと. $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2$ であるから

$I_S = I_{S1} + I_{S2}$, $I_{S1} = \int_S \mathbb{A}_1 \cdot d\mathbb{S}$, $I_{S2} = \int_S \mathbb{A}_2 \cdot d\mathbb{S}$ となるが

(1)での議論により $I_{S2} = 0$ なので $I_S = I_{S1}$ が成り立つ.

$$\mathbb{r} = (a(1-\cos u)\cos v,\ b(1-\cos u)\sin v,\ c(u-\sin u))$$

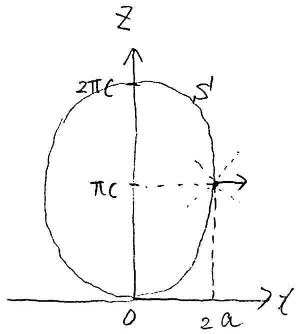
$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = (\underbrace{\cdots}_{\text{計算不要}},\ b(1-\cos u)\cos v,\ 0)$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} = (\underbrace{\cdots}_{\text{計算不要}},\ \underbrace{\cdots}_{\text{計算不要}},\ c(1-\cos u))$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} = (bc(1-\cos u)^2\cos v,\ \cdots,\ \cdots)$$

$u=\pi$, $v=0$ で $\mathbb{r} = (2a, 0, \pi c)$, $\left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u}\right)_x = 4bc$

なので $\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u}$ は S の外(表)側を向いている.



$$I_S = \int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi} dv\ \mathbb{A}_1 \cdot \left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u}\right) = \int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi} dv\ A_{1x} \cdot \left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u}\right)_x$$

$$= \int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi} dv\ a(1-\cos u)\cos v\ bc(1-\cos u)^2 \cos v$$

$$= abc \int_0^{2\pi} (1-\cos u)^3 du \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 v\, dv$$

$$= abc \cdot 5\pi \cdot \pi = 5\pi^2 abc$$ (答)

$\because$ $\int_0^{2\pi} (1-\cos u)^3 du = \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos u + 3\cos^2 u + \cos^3 u) du$

$= 2\pi - 3\cdot 0 + 3\cdot\pi + 0 = 5\pi$

$\because$ n を整数として

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1} x\, dx = \int_0^{2\pi} (\cos^2 x)^n \cos x\, dx = \int_0^0 (1-\sin^2 x)^n d(\sin x) = 0$$

また $\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = \pi$

[6] (2) の別解　（体積積分の練習になるが、効率の悪い計算法である）

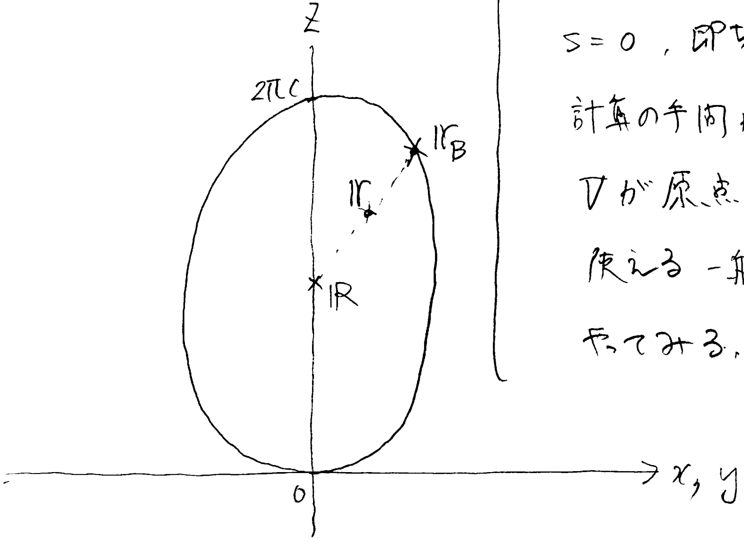
S 上の点を $\mathbb{r}_B(u,v)$,　V の中心を $\mathbb{R}=(0,0,\pi cs)$　$(0\leqq s\leqq 1)$ とおくと、

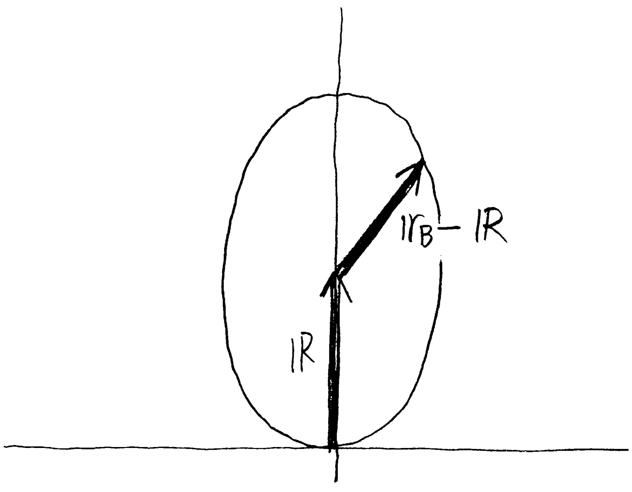
V 内の点 $\mathbb{r}(u,v,w)$ は　$0\leqq w\leqq 1$ の範囲をとるパラメータ w を使って

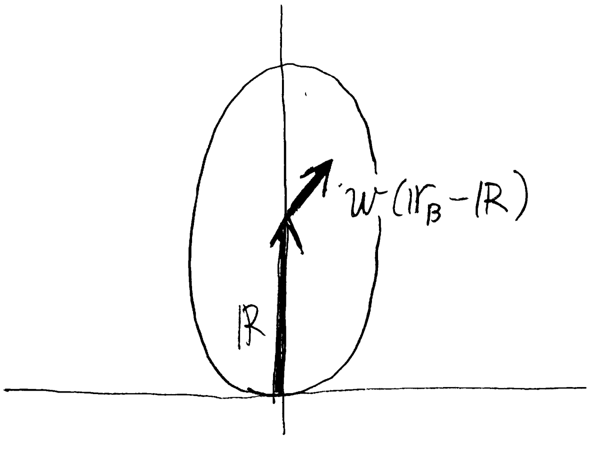
$$\mathbb{r}(u,v,w)=\mathbb{R}+w(\mathbb{r}_B(u,v)-\mathbb{R})$$

とパラメータ表示できる。

注　この問題では原点が V に含まれるので $s=0$，即ち $\mathbb{R}=\mathbb{0}$ としてもよいが 計算の手間があまり増えないので、V が原点を含まない問題にも使える一般性の高い計算方法でやってみる。







$$\mathbb{r} = \left(aw(1-\cos u)\cos v,\ bw(1-\cos u)\sin v,\ c\left(w(u-\sin u-\pi s)+\pi s\right)\right)$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} = \left(aw \sin u \cos v,\ bw \sin u \sin v,\ cw(1-\cos u)\right)$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = \left(-aw(1-\cos u)\sin v,\ bw(1-\cos u)\cos v,\ 0\right)$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial w} = \left(a(1-\cos u)\cos v,\ b(1-\cos u)\sin v,\ c(u-\sin u-\pi s)\right)$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} = \left(bcw^2(1-\cos u)^2\cos v,\ acw^2(1-\cos u)^2\sin v,\ -abw^2(1-\cos u)\sin u\right)$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial w}\cdot\left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v}\times\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u}\right) = abcw^2\left\{(1-\cos u)^3\cos^2 v + (1-\cos u)^3\sin^2 v - (1-\cos u)\sin u\,(u-\sin u-\pi s)\right\}$$

$$= abc\,w^2\left\{2(1-\cos u)^2 + (\pi s-u)(1-\cos u)\sin u\right\}$$

これは $u=v=0$ で $2abcw^2 \geq 0$ なので $d^3r = \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial w}\cdot\left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v}\times\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u}\right)du\,dv\,dw$ である.

$$I_s = \int_V \mathrm{div}\,\mathbb{A}\, d^3r = \int_V 1\, d^3r$$

$$= \int_0^{2\pi}du\int_0^{2\pi}dv\int_0^1 dw\ abcw^2\left\{2(1-\cos u)^2 + (\pi s-u)(1-\cos u)\sin u\right\}$$

$$= abc\cdot\int_0^1 w^2dw\cdot\int_0^{2\pi}dv\cdot\int_0^{2\pi}\left\{2(1-\cos u)^2 + \pi s(1-\cos u)\sin u - u(1-\cos u)\sin u\right\}du$$

$$= abc\cdot\frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot\left(2\cdot 3\pi + \pi s\cdot 0 + \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$= 5\pi^2 abc \quad (\text{答})$$

$$\left[\begin{array}{l}
\because \int(1-\cos u)\sin u\,du = -\cos u + \frac{1}{2}\cos^2 u + C,\quad \int_0^{2\pi}(1+\cos u)\sin u\,du = 0, \\
\int_0^{2\pi} u(1-\cos u)\sin u\,du = \left[u\left(-\cos u + \frac{1}{2}\cos^2 u\right)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\left(-\cos u + \frac{1}{2}\cos^2 u\right)du \\
= 2\pi\cdot\left(-1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\pi = -\frac{3}{2}\pi \\
\int_0^{2\pi}(1-\cos u)^2 du = \int_0^{2\pi}\left(1-2\cos u+\cos^2 u\right)du = 2\pi - 2\cdot 0 + \pi = 3\pi
\end{array}\right]$$