応 用 数 学 Ⅲ　定 期 試 験 問 題

福井大学工学部機械工学科２年生対象,　担当教員 田嶋,　2014 年 1 月 31 日 2 限実施

各人に問題用紙１枚 (B4 判), 答案用紙２枚 (B4 判 表裏使用) を配布する。答案用紙を提出し, 問題用紙は持ち帰れ。全ての問題について、最終的な答だけでなく、その導出過程も答案用紙に記せ。解答の記入にあたっては, スカラー量とベクトル量が一目で判別できるよう, ベクトル量を表す記号は太字にするか上に矢印をのせるようにせよ。スカラーのゼロとゼロベクトルとを明確に区別して書け。また内積や外積を表すドットやクロス記号を省略してはならない。これらの指示に従わない答案は、回答者が「ベクトルとスカラーの区別をよく理解していない」「ベクトル同士の積に複数の種類があることをよく理解していない」ことの証拠とみなす。各種の場の積分定理やその他の有用な公式を覚えている場合は証明なくそれらを利用して答を求めてよい。

【1】 (10 点) 3 点 A$(-1, 1, -1)$, B$(0, -3, 4)$, C$(-3, 2, -4)$ について, 下記の (1)〜(2) を求めよ。

(1) $\angle$BAC　　　(2) 三角形 ABC の面積 S

【2】 (10 点) 任意の２ベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ について下記の等式が恒等的に成り立つようにスカラー α, β を $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ を用いて表せ。

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}))) = \alpha \boldsymbol{A} + \beta \boldsymbol{B}$$

【3】 (10 点) ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ のスカラーポテンシャル φ とは何か？その数学的な定義を述べよ。また、スカラーポテンシャルが存在するためにベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が満たすべき条件を述べよ（証明不要)。

【4】 (20 点) 曲線 C を下記のパラメータ表示で定義する。

$$\boldsymbol{r} = \left(\cos t,\ \sin t,\ \sin^2 t\right), \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad t = 0 \text{ に対応する点が始点、} t = 2\pi \text{ に対応する点が終点.}$$

このとき下記の小問に答えよ。

(1) 曲線 C の弧長 L を　$L = \displaystyle\int_0^{2\pi} \boxed{\text{ア}}\, dt$　の形に表すとき、$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまる t を変数とする関数を答えよ。(導出過程も忘れずに記せ。)

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (y, -x, yz)$ の、曲線 C に沿っての接線線積分　$I_{\mathrm{C}} = \displaystyle\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$　の値を求めよ。

【5】 (30 点) $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする。このとき下記の小問に答えよ。

(1) $\mathrm{grad}\dfrac{1}{r}$ を求めよ。(7 点)　　　(2) $\mathrm{div}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ を求めよ。(7 点)

(3) $\triangle \dfrac{e^{-\alpha r}}{r}$ を求めよ。 ただし、$\triangle$ はラプラス演算子であり、α は定数である。(8 点)

(4) ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (y + az,\ z + bx,\ x + cy)$ が、任意の点 (x, y, z) で $\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = (0, 0, 1)$ を満たすように、定数 a, b, c の値を定めよ。(8 点)

【6】 (20 点) 曲面 S は、a, b, c を正の定数とし、u, v をパラメータとするパラメータ表示で

$$\boldsymbol{r} = \Big(a\,u\cos v,\ b\,u\sin v,\ c\,(1 - u^2)\Big) \qquad (0 \le u \le 1, \quad 0 \le v \le 2\pi)$$

と表される曲面（楕円放物面）である。ただし、原点 $(0,0,0)$ から見える側を裏面とする。このとき下記の小問に答えよ。

(1) ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (y, x, z^2)$ の、曲面 S 上での法線面積分　$I_{\mathrm{S}} = \displaystyle\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$　の値を求めよ。

(2) $a = b = 1$ の場合について、曲面 S の面積 S を求めよ。(注意: c は値を定めず、c のままとする。従って答は c を含んだ数式となる。)

応 用 数 学 Ⅲ　定 期 試 験　答 案 用 紙 (全2枚中1枚目)

福井大学工学部機械工学科 2 年生 対象、 担当教員 田嶋、 2014 年 1 月 31 日 2 限実施

【1】

【2】

【3】

【4】 は裏面に解答せよ.

学科 機械工学	学籍番号								氏名	得点 [1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	合計

応　用　数　学　Ⅲ　　定　期　試　験　　答　案　用　紙 (全2枚中2枚目)

福井大学工学部機械工学科 2 年生 対象、　担当教員 田嶋、　2014 年 1 月 31 日 2 限実施

【5】

【6】 は裏面に解答せよ.

学科 機械工学	学籍番号								氏名		得点	[5]	[6]

[1] (1) $\overrightarrow{AB} = (0,-3,4)-(-1,1,-1) = (1,-4,5)$

$\overrightarrow{AC} = (-3,2,-4)-(-1,1,-1) = (-2,1,-3)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (1,-4,5)\cdot(-2,1,-3) = 1\cdot(-2)+(-4)\cdot 1+5\cdot(-3) = -2-4-15 = -21$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2+(-4)^2+5^2} = \sqrt{1+16+25} = \sqrt{42}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2+1^2+(-3)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

$$\cos\angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{-21}{\sqrt{42}\sqrt{14}} = \frac{-21}{14\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\angle BAC = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{6}\pi$ (答)

(2) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (1,-4,5)\times(-2,1,-3) = (12-5,-10+3,1+6) = (7,-7,7)$

$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = |7(1,1,1)| = 7\sqrt{3}$

$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{7}{2}\sqrt{3}$ (答)

[2] $\mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times(\mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times\mathbb{A})))$

$= \mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times(\mathbb{A}^2\mathbb{B}-\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\,\mathbb{A}))$

$= \mathbb{A}^2\,\mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times\mathbb{B}) - \mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\,\mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times\mathbb{A})$

$= \mathbb{A}^2\,\mathbb{A}\times\mathbb{O} - \mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\,(\mathbb{A}^2\mathbb{B}-\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\,\mathbb{A})$

$= (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})^2\,\mathbb{A} - \mathbb{A}^2\,\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\,\mathbb{B} = \alpha\mathbb{A}+\beta\mathbb{B}$

$$\therefore\ \left.\begin{array}{l}\alpha = (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})^2\\ \beta = -\mathbb{A}^2\,\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\end{array}\right\}\text{(答)}$$

[3] $\mathrm{grad}\,\varphi = -\mathbb{A}$ を満たすスカラー場 φ を，$\mathbb{A}$ のスカラーポテンシャルとよぶ。

$\mathrm{rot}\,\mathbb{A} = \mathbb{O}$ が $\mathbb{A}$ のスカラーポテンシャルが存在するための必要十分条件である。

[4] (1)

$$\mathbb{r} = (\cos t,\ \sin t,\ \sin^2 t)$$

$$\frac{d\mathbb{r}}{dt} = (-\sin t,\ \cos t,\ 2\sin t\cos t)$$

$$\left|\frac{d\mathbb{r}}{dt}\right| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (2\sin t\cos t)^2} = \sqrt{1 + 4\sin^2 t\cos^2 t}$$

$$\left(= \sqrt{1+\sin^2 2t}\right)$$

$$L = \int_0^{2\pi} \left|\frac{d\mathbb{r}}{dt}\right| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+4\sin^2 t\cos^2 t}\, dt$$

$$\therefore\ \boxed{ア} = \sqrt{1+4\sin^2 t\cos^2 t} \quad (答)$$

$$= \sqrt{1+\sin^2 2t} \quad (答)$$

(2) $\mathbb{A} = (y,\ -x,\ yz)$

$= (\sin t,\ -\cos t,\ \sin t\cdot\sin^2 t)$ 　（C上での値）

$$\mathbb{A}\cdot\frac{d\mathbb{r}}{dt} = -\sin^2 t - \cos^2 t + 2\sin^4 t\cos t = 2\sin^4 t\cos t - 1$$

$$I_C = \int_0^{2\pi} \mathbb{A}\cdot\frac{d\mathbb{r}}{dt}\, dt = \int_0^{2\pi} (2\sin^4 t\cos t - 1)\, dt = -2\pi \quad (答)$$

$$\because \int_0^{2\pi} \sin^4 t\cos t\, dt = \int_0^0 \sin^4 t\, d(\sin t) = \left[\frac{1}{5}\sin^5 t\right]_{\sin t=0}^{\sin t=0} = 0$$

[5] (1) $\mathrm{grad}\,\frac{1}{r} = \nabla\frac{1}{r} = \left(\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\right)\nabla r = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathbb{r}}{r} = -\frac{\mathbb{r}}{r^3}$ (答)

(2) $\mathrm{div}\,\frac{\mathbb{r}}{r} = \nabla\cdot\left(\frac{1}{r}\mathbb{r}\right) = \left(\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot\mathbb{r} + \frac{1}{r}\nabla\cdot\mathbb{r} = -\frac{\mathbb{r}}{r^3}\cdot\mathbb{r} + \frac{1}{r}3$

$$= -\frac{r^2}{r^3} + \frac{3}{r} = \frac{2}{r} \quad (答)$$

(3) $\frac{d}{dr} r^{-1}e^{-\alpha r} = -r^{-2}e^{-\alpha r} - \alpha r^{-1}e^{-\alpha r} = -(\alpha r^{-1} + r^{-2})e^{-\alpha r}$

$$\frac{d^2}{dr^2} r^{-1}e^{-\alpha r} = 2r^{-3}e^{-\alpha r} + \alpha r^{-2}e^{-\alpha r} + \alpha r^{-2}e^{-\alpha r} + \alpha^2 r^{-1}e^{-\alpha r}$$

$$= (\alpha^2 r^{-1} + 2\alpha r^{-2} + 2r^{-3})e^{-\alpha r}$$

$$\Delta\frac{e^{-\alpha r}}{r} = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right) r^{-1}e^{-\alpha r}$$

$$= (\alpha^2 r^{-1} + 2\alpha r^{-2} + 2r^{-3} - 2\alpha r^{-2} - 2r^{-3})\, e^{-\alpha r}$$

$$= \alpha^2 r^{-1}e^{-\alpha r} = \alpha^2\frac{e^{-\alpha r}}{r} \quad (答)$$

(4) $\mathrm{rot}\,\mathbb{A} = (c-1,\ a-1,\ b-1) = (0,0,1)$ 　$\therefore\ a=1,\ b=2,\ c=1$ (答)

[6] (1) $\mathbf{r} = (au\cos v,\ bu\sin v,\ c(1-u^2))$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (a\cos v,\ b\sin v,\ -2cu)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-au\sin v,\ bu\cos v,\ 0)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (2bcu^2\cos v,\ 2acu^2\sin v,\ abu)$$

$(u, v) = (1, 0)$ で $\mathbf{r} = (a, 0, 0)$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (2bc, 0, ab)$ は

表(おもて)側を向いていることが確かめられた

S 上で

$$\mathbf{A} = (y, x, z^2) = (bu\sin v,\ au\cos v,\ c^2(1-u^2)^2)$$

$$\mathbf{A}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) = 2b^2cu^3\cos v\sin v + 2a^2cu^3\sin v\cos v + abc^2u(1-u^2)^2$$

$$\begin{aligned}
I_S &= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv\, \mathbf{A}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) \\
&= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv \left\{ 2(a^2+b^2)cu^3\sin v\cos v + abc^2u(1-u^2)^2 \right\} \\
&= abc^2\, 2\pi \int_0^1 u(1-u^2)^2\, du \\
&= 2\pi abc^2 \left[-\frac{1}{6}(1-u^2)^3 \right]_{u=0}^{u=1} \\
&= \frac{\pi}{3} abc^2 \quad (\text{答})
\end{aligned}$$

[6] (2) $\mathbf{r} = (u\cos v,\ u\sin v,\ c(1-u^2))$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (\cos v,\ \sin v,\ -2cu)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 0)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (2cu^2\cos v,\ 2cu^2\sin v,\ u)$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{4c^2u^4 + u^2} = u\sqrt{4c^2u^2+1} \qquad (\because u \geqq 0)$$

$$S = \int_S dS = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|$$

$$= 2\pi \int_0^1 u\sqrt{4c^2u^2+1}\, du$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{12c^2}(4c^2u^2+1)^{3/2}\right]_{u=0}^{u=1}$$

$$= \frac{\pi}{6c^2}\left\{(4c^2+1)^{3/2} - 1\right\} \quad (答)$$

$c=1$ $\quad \dfrac{\pi}{6}(5^{3/2}-1)$

別解法

[6](1) は、ガウスの発散定理を利用して、体積々分として求めることもできる。

曲面と xy 平面（平面 $z=0$）とで囲まれた三次元領域を V とする。また

V の表面（ひょうめん）のうち、xy 平面上の部分を S_0 とする。即ち、

$$S_0 = \{(x, y, 0) \mid x = au\cos v,\ y = bu\sin v,\ 0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 2\pi\}$$

とする。S_0 の表面（おもてめん）は領域 $z<0$ に面した側とする。

ガウスの発散定理により、

$$\int_S \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S} + \int_{S_0} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S} = \int_V \mathrm{div}\,\mathbb{A}\, d^3r$$

（パラメータの v の微分 dv と区別する為、体積要素を dv でなく d^3r と書いた）

が成立する。S_0 上では $d\mathbb{S} \parallel -\mathbb{e}_z$，$\mathbb{A} = (y, x, 0) \perp \mathbb{e}_z$

なので $\mathbb{A}\cdot d\mathbb{S} = 0$ であり、故に $\int_{S_0} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S} = 0$ である。したがって

$$I_S = I_V = \int_V \mathrm{div}\,\mathbb{A}\, d^3r$$

が成立する。以下では三次元領域 V を2通りのパラメータ表示により積分する

【V の パラメータ表示 その1】

$$V = \{(x, y, z) \mid x = au\cos v,\ y = bu\sin v,\ z = w,\ 0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 2\pi,\ 0 \leq w \leq c(1-u^2)\}$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} = (a\cos v,\ b\sin v,\ 0)$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = (-au\sin v,\ bu\cos v,\ 0)$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = (0,\ 0,\ abu)$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial w} = (0,\ 0,\ 1)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v}\right)\cdot \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial w} = abu$$

$$d^3r = \left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v}\right)\cdot \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial w}\, du\,dv\,dw = abu\, du\,dv\,dw$$

$$\mathrm{div}\,\mathbb{A} = 2z = 2w$$

$$I_V = \int_V \mathrm{div}\,\mathbb{A}\, d^3r = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv \int_0^{c(1-u^2)} dw \cdot abu \cdot 2w$$

$$= 2\pi ab \int_0^1 du \cdot u\, \left[w^2\right]_{w=0}^{w=c(1-u^2)} = 2\pi abc^2 \int_0^1 u(1-u^2)^2\, du$$

$$= 2\pi abc^2 \left[-\frac{1}{6}(1-u^2)^3\right]_{u=0}^{u=1}$$

$$= \frac{\pi}{3} abc^2 \quad \text{(答)}$$

【$\mathbb{V}$のパラメータ表示 その2】

$$\mathbb{V} = \{(x, y, z) \mid x = auw\cos v,\ buw\sin v,\ cw(1-u^2),\ 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 2\pi,\ 0 \leqq w \leqq 1\}$$

(曲面Sを、原点$(0,0,0)$を中心にw倍$(0 \leqq w \leqq 1)$に縮小した曲面の集合として$\mathbb{V}$を表した)

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} = (aw\cos v,\ bw\sin v,\ -2cuw)$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = (-auw\sin v,\ buw\cos v,\ 0)$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = (2bcu^2w^2\cos v,\ 2acu^2w^2\sin v,\ abuw^2)$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial w} = (au\cos v,\ bu\sin v,\ c(1-u^2))$$

$$\left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial w} = 2abcu^3w^2 + abc\,u(1-u^2)w^2 = abc\,u(1+u^2)w^2$$

$$d^3r = \left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial w}\, du\,dv\,dw = abc\,u(1+u^2)w^2\,du\,dv\,dw$$

$$I_V = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 dw \cdot abc\,u(1+u^2)w^2 \cdot \overbrace{2cw(1-u^2)}^{\mathrm{div}\,\mathbb{A} = 2z}$$

$$= 2\pi \int_0^1 u(1-u^4)\,du \int_0^1 w^3\,dw$$

$$= 4\pi abc^2 \left[\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{6}u^6\right]_{u=0}^{u=1} \cdot \left[\frac{1}{4}w^3\right]_{w=0}^{w=1}$$

$$= 4\pi abc^2 \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\pi}{3} abc^2 \quad (答)$$