応用数学Ⅲ　定期試験問題

福井大学工学部機械工学科２年生対象,　担当教員 田嶋,　2013 年 2 月 1 日 4 限実施

各人に問題用紙１枚 (B4 判), 答案用紙１枚 (B4 判 表裏使用), 計算用紙１枚 (B4 判 表裏使用) を配布する。答案用紙と計算用紙を提出し, 問題用紙は持ち帰れ。大問 [1]〜[6] は答案用紙には最終的な答のみを記し, 導出過程は計算用紙に記せ。大問 [7]〜[9] は答の導出過程も答案用紙に記せ。解答の記入にあたっては, スカラー量とベクトル量が一目で判別できるよう, ベクトル量を表す記号は太字にするか上に矢印をのせるようにせよ。スカラーのゼロとゼロベクトルとを明確に区別して書け。また内積や外積を表すドットやクロス記号を省略してはならない。これらの指示に従わない答案は、回答者が「ベクトルとスカラーとの区別をよく理解していない」「積に複数の種類があることをよく理解していない」ことの証拠とみなす。各種の場の積分定理やその他の有用な公式を覚えている場合は証明なくそれらを利用して答を求めてよい。

【1】 (10 点) 下記の等式 (1)〜(5) のうち任意のベクトル $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ について成り立つものに ◯ を、そうでないものに × をつけよ。

(1) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$　(2) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$

(3) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$　(4) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$

(5) $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|^2+|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}|^2=\Big(|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\Big)^2$

【2】 (10 点) 下記の等式 (1)〜(5) のうち、任意のスカラー場 φ または任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について成立するものに ◯、そうでないものに × をつけよ。

(1) $\nabla\cdot(\nabla\varphi)=0$　(2) $\nabla\times(\nabla\varphi)=\boldsymbol{0}$　(3) $\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$

(4) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$　(5) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$

【3】 (10 点) 3 点 A$(2,0,0)$, B$(-3,4,1)$, C$(5,-1,-2)$ について, 下記の (1)〜(2) を求めよ。

(1) $\angle$BAC　(2) 三角形 ABC の面積 S

【4】 (10 点) $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{F}$ は一変数 t のベクトル関数であり, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})$ という関係がある。また、$\boldsymbol{A}'=\dfrac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}$, $\boldsymbol{B}'=\dfrac{d\boldsymbol{B}(t)}{dt}$, $\boldsymbol{F}'=\dfrac{d\boldsymbol{F}(t)}{dt}$ と書くことにする。このとき $\boldsymbol{F}'$ を $\boldsymbol{F}'=\Big(\boxed{\text{ア}}\Big)\boldsymbol{A}+\Big(\boxed{\text{イ}}\Big)\boldsymbol{B}+\Big(\boxed{\text{ウ}}\Big)\boldsymbol{A}'+\Big(\boxed{\text{エ}}\Big)\boldsymbol{B}'$ の形に表すとき、$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{エ}}$にあてはまるスカラー式を求めよ。答は、外積記号 $(\times)$ を使わずに、４つのベクトル $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}'$,$\boldsymbol{B}'$ 間の内積を使って表せ。

【5】 (10 点) 下記の小問 (1),(2) に答えよ。

(1) スカラー場 $\varphi=\sin(xyz)$ について $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\varphi)$ を求めよ。

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{A}=\Big(x^2y,\, y^2z,\, z^2x\Big)$ について $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})$ を成分表示で求めよ。

【6】「ガウスの発散定理」の内容を簡潔に記せ。（直観的な意味づけを書くのではなく、定理の表す数学的命題を書くこと。具体的には、定理を数式で書き下し、その数式に現れる記号の意味を文章で説明せよ。）
(10 点)

【7】ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \left(y^2,\ x^2,\ x + y^2 + z^3\right)$ と定義する。また、線分 C を、点 (1, 1, 0) を始点とし、点 (0, 0, 1) を終点とする線分とする。このとき、ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の線分 C に沿っての接線線積分 $I_{\mathrm{C}} = \int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ。
(10 点)

【8】a, b, c を正の定数とし、u, v をパラメータとするパラメータ表示で
(15 点)

$$\boldsymbol{r} = \left(a \sin u \cos v,\ \ b \sin u \sin v,\ \ c \cos u\right) \quad (0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi)$$

と表される楕円体面 S の面積を S_0 とする。このとき下記の小問に答えよ。

(1) S_0 を $S_0 = \int_{\mathrm{S}} dS = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} du \left(\boxed{\text{オ}}\right)$ の形に表すとき、$\boxed{\text{オ}}$ に当てはまる数式を答えよ。

(2) $a = b = c = 1$ の場合について、S_0 を求めよ。

【9】a, b, c を正の定数とし、u, v, w をパラメータとするパラメータ表示で
(15 点)

$$\boldsymbol{r} = \left(aw \sin u \cos v,\ \ bw \sin u \sin v,\ \ cw \cos u\right) \quad (0 \leq u \leq \pi,\ \ 0 \leq v \leq 2\pi,\ \ 0 \leq w \leq 1)$$

と表される楕円体面の内部領域 V の体積を V_0 とする。このとき下記の小問に答えよ。

(1) スカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ の領域 V での体積積分を

$$I_{\mathrm{V}} = \iiint_{\mathrm{V}} \varphi(\boldsymbol{r}) dxdydz = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} du \int_0^{1} dw \left\{\boxed{\text{カ}}\, \varphi\Big(\boldsymbol{r}(u, v, w)\Big)\right\}$$

の形に表すとき、$\boxed{\text{カ}}$ に当てはまる数式を答えよ。

(2) I_{V} の表式に $\varphi(\boldsymbol{r}) = 1$ を代入することで、V_0 を求めよ。

応 用 数 学 Ⅲ　定 期 試 験　答 案 用 紙

福井大学工学部機械工学科 2 年生 対象、 担当教員 田嶋、 2013 年 2 月 1 日 4 限実施

【1】

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

【2】

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

【3】

(1)	(2)

【4】

ア	イ	ウ	エ

【5】

(1)	(2) の x 成分	(2) の y 成分	(2) の z 成分

【6】

【7】

【8】と【9】 は裏面に解答せよ.

学科	機械工学	学籍番号									氏名		得点	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	合計

[1] (1) × 外積は交換則には従わない。しかし反交換則 $\mathbb{A}\times\mathbb{B}=-\mathbb{B}\times\mathbb{A}$ には従う。

(2) ○ スカラー三重積のもつ対称性より $\mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{C})=\mathbb{C}\cdot(\mathbb{A}\times\mathbb{B})=(※)$

内積は交換則に従うので $(※)=(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot\mathbb{C}$

(3) × 外積は結合則に従わない。実際.

$$\mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times\mathbb{C})=(\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})\mathbb{B}-(\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})\mathbb{C}$$

$$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\times\mathbb{C}=(\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})\mathbb{B}-(\mathbb{B}\cdot\mathbb{C})\mathbb{A}$$

で、右辺同士が一致するのは特別な場合だけである.

(4) ×

$$\mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times\mathbb{C})=(\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})\mathbb{B}-(\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})\mathbb{C}$$

$$\mathbb{B}\times(\mathbb{C}\times\mathbb{A})=(\mathbb{B}\cdot\mathbb{A})\mathbb{C}-(\mathbb{B}\cdot\mathbb{C})\mathbb{A}$$

の右辺同士は一般には一致しない.

(5) ○ $|\mathbb{A}\times\mathbb{B}|=|\mathbb{A}||\mathbb{B}|\sin\theta$ （θは$\mathbb{A}$と$\mathbb{B}$の交角）.

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}=|\mathbb{A}||\mathbb{B}|\cos\theta$$

$$\therefore |\mathbb{A}\times\mathbb{B}|^2+|\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}|^2=|\mathbb{A}|^2|\mathbb{B}|^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=|\mathbb{A}|^2|\mathbb{B}|^2.$$

[2] (1) ×

(2) ○

(3) ×

(4) ○

(5) ×

[3]

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-3,4,1) - (2,0,0) = (-5,4,1)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{25+16+1} = \sqrt{42}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (5,-1,-2) - (2,0,0) = (3,-1,-2)$$

$$\overline{AC} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-5,4,1)\cdot(3,-1,-2) = -15-4-2 = -21$$

$$\cos\angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\overline{AB}\ \overline{AC}} = \frac{-21}{\sqrt{42}\sqrt{14}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore\ \angle BAC = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underset{\text{(1)の答}}{\frac{5}{6}\pi}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (-5,4,1)\times(3,-1,-2)$$

$$= (-8+1,\ 3-10,\ 5-12) = (-7,-7,-7) = -7(1,1,1)$$

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|-7(1,1,1)\right| = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \frac{7}{2}\sqrt{3} \cdots \text{(2)の答}$$

[4]

$$\{\mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times\mathbb{A})\}' = \{(\mathbb{A}\cdot\mathbb{A})\mathbb{B} - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})\mathbb{A}\}'$$

$$= (\mathbb{A}'\cdot\mathbb{A})\mathbb{B} + (\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}')\mathbb{B} + (\mathbb{A}\cdot\mathbb{A})\mathbb{B}' - (\mathbb{A}'\cdot\mathbb{B})\mathbb{A} - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}')\mathbb{A} - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})\mathbb{A}'$$

$$= \{-\mathbb{A}'\cdot\mathbb{B} - \mathbb{A}\cdot\mathbb{B}'\}\mathbb{A} + \{2\mathbb{A}'\cdot\mathbb{A}\}\mathbb{B} + \{-\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\}\mathbb{A}' + \{\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}\}\mathbb{B}'$$

答. $\boxed{ア} = -\mathbb{A}'\cdot\mathbb{B} - \mathbb{A}\cdot\mathbb{B}'$

$\boxed{イ} = 2\mathbb{A}'\cdot\mathbb{A}$

$\boxed{ウ} = -\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}$

$\boxed{エ} = \mathbb{A}\cdot\mathbb{A} \quad (= \mathbb{A}^2 = |\mathbb{A}|^2)$

[5] (1) $\varphi = \sin(xyz)$

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \big(yz\cos(xyz),\ xz\cos(xyz),\ xy\cos(xyz)\big)$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\{yz\cos(xyz)\} + \frac{\partial}{\partial y}\{xz\cos(xyz)\} + \frac{\partial}{\partial z}\{xy\cos(xyz)\}$$

$$= -y^2z^2\sin(xyz) - x^2z^2\sin(xyz) - x^2y^2\sin(xyz)$$

$$= -(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)\sin(xyz) \quad \text{(答)}$$

[5] (2) $\mathbb{A} = (x^2 y,\ y^2 z,\ z^2 x)$

$$\mathrm{rot}\,\mathbb{A} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(z^2 x) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2 z),\ \frac{\partial}{\partial z}(x^2 y) - \frac{\partial}{\partial x}(z^2 x),\ \frac{\partial}{\partial x}(y^2 z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y) \right)$$

$$= (0 - y^2,\ 0 - z^2,\ 0 - x^2)$$

$$= -(y^2,\ z^2,\ x^2)$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbb{A}) = -\left(\frac{\partial}{\partial y} x^2 - \frac{\partial}{\partial z} z^2,\ \frac{\partial}{\partial z} y^2 - \frac{\partial}{\partial x} x^2,\ \frac{\partial}{\partial x} z^2 - \frac{\partial}{\partial y} y^2 \right)$$

$$= -(0 - 2z,\ 0 - 2x,\ 0 - 2y)$$

$$= (2z,\ 2x,\ 2y) \quad \text{(答)}$$

$$= 2(z,\ x,\ y) \quad \text{(答)}$$

[6] 「Sを閉曲面，VをSの内部の3次元領域，$\mathbb{A}$をベクトル場とすると $\int_V \nabla\cdot\mathbb{A}\,dv = \int_S \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}$ が成立する。ただし，左辺はVでの体積積分，右辺はS上での法線面積分を表す。$d\mathbb{S}$はSの外部に向く方向にとる.」

[7] 線分Cは下式でパラメータ表示できる.

$$\mathbb{r} = (1,1,0)\cdot(1-t) + (0,0,1)\cdot t \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

($\because$ $t=0$で $\mathbb{r} = (1,1,0) =$ 始点，$t=1$で $r = (0,0,1) =$ 終点となっている)

$$\mathbb{r} = (1,1,0) + (-1,-1,1)\,t$$

$$I_C = \int_C \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^1 \mathbb{A}\cdot\frac{d\mathbb{r}}{dt}\,dt$$

$$= \int_0^1 (A_x, A_y, A_z)\cdot(-1,-1,1)\,dt$$

$$= \int_0^1 (-A_x - A_y + A_z)\,dt$$

$$= \int_0^1 (-y^2 - x^2 + x + y^2 + z^3)\,dt$$

$$= \int_0^1 (x - x^2 + z^3)\,dt$$

$$= \int_0^1 \{(1-t) - (1-t)^2 + t^3\}\,dt$$

$$= \int_0^1 t'\,dt' - \int_0^1 t'^2\,dt' + \int_0^1 t^3\,dt \qquad (t' = 1-t \text{ とおいた})$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \quad \text{(答)}$$

[8] (1) $\mathbf{r} = (a\sin u\cos v,\ b\sin u\sin v,\ c\cos u)$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (a\cos u\cos v,\ b\cos u\sin v,\ -c\sin u)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-a\sin u\sin v,\ b\sin u\cos v,\ 0\ )$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(bc\sin^2 u\cos v,\ ac\sin^2 u\sin v,\ ab\sin u\cos u\underbrace{(\cos^2 v+\sin^2 v)}_{=1}\right)$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{b^2c^2\sin^4 u\cos^2 v + a^2c^2\sin^4 u\sin^2 v + a^2b^2\sin^2 u\cos^2 u}$$

$$= \sqrt{a^2b^2\cos^2 u + (b^2c^2\cos^2 v + c^2a^2\sin^2 v)\sin^2 u}\cdot\sin u \cdots \boxed{ア}$$ (答)

$S_0 = \int_S dS = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} du \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|$ なので上式が $\boxed{ア}$ である

(2) $a=b=c=1$ を代入すると

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{\cos^2 u + \underbrace{(\cos^2 v+\sin^2 v)}_{=1}\sin^2 u}\cdot\sin u$$

$$= \sqrt{\underbrace{\cos^2 u+\sin^2 u}_{=1}}\cdot\sin u$$

$$= \sin u$$

$$\therefore\ S_0 = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} du\ \sin u = [v]_0^{2\pi}\cdot[-\cos u]_0^{\pi}$$

$$= (2\pi-0)\cdot(-(-1)+1) = 4\pi$$ (答)

[9] (1) $\mathbb{r} = (aw \sin u \cos v,\ bw \sin u \sin v,\ cw \cos u)$

これは [8] での $\mathbb{r}$ に w を乗じたものなので [8] の計算結果を利用して

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = (bc \sin^2 u \cos v,\ ac \sin^2 u \sin v,\ ab \sin u \cos u)\, w^2$$ を得る.

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial w} = (a \sin u \cos v,\ b \sin u \sin v,\ c \cos u)$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial w} \cdot \left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v}\right) = (abc \sin^3 u \underbrace{\cos^2 v + abc \sin^3 u \sin^2 v}_{1} + abc \sin u \cos^2 u)\, w^2$$

$$= abcw^2 \sin u (\sin^2 u + \cos^2 u)$$

$$= abcw^2 \sin u.$$

$$I_V = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} du \int_0^1 dw \left|\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial w} \cdot \left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v}\right)\right] \varphi(\mathbb{r})$$ なので

$\boxed{\text{カ}} = |abc \sin u| = abc w^2 \sin u$ (答) を得る.

(2) $$V_0 = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} du \int_0^1 dw\, abcw^2 \sin u \cdot 1$$

$$= \left\{\int_0^{2\pi} dv\right\} \cdot \left\{\int_0^{\pi} \sin u\, du\right\} \cdot \left\{\int_0^1 w^2 dw\right\} \cdot abc$$

$$= [v]_0^{2\pi} \cdot [-\cos u]_0^{\pi} \cdot \left[\frac{1}{3} w^3\right]_0^1 \cdot abc$$

$$= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot abc$$

$$= \frac{4\pi}{3} abc$$ (答)