応 用 数 学 Ⅲ 定 期 試 験 問 題

福井大学工学部機械工学科２年生対象, 担当教員 田嶋, 2012 年 2 月 10 日 2 限実施

各人に問題用紙１枚 (A4 判), 計算用紙２枚 (A4 判), 答案用紙１枚 (B4 判 表裏使用) を配布する。答案用紙だけを提出し, 問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。解答にあたっては, スカラー量とベクトル量が一目で判別できるよう, ベクトル量を表す記号は太字にするか上に矢印をのせるようにせよ。スカラーのゼロとゼロベクトルとを明確に区別して書け。また内積や外積を表すドットやクロス記号を省略してはならない。各種の場の積分定理やその他の有用な公式を覚えている場合は証明なくそれらを利用して答を求めてよい。

【I】（60 点） 下記の小問 (1)〜(6) に答えよ。

これらの小問に限っては、答案用紙の回答欄には、答の導出過程は記さず、最終的な答のみを記せ。

(注意) これらの小問は全て独立した相互に無関係な問題である。

(1) $\boldsymbol{\omega} = (1,\ 1,\ 1)$, $\boldsymbol{r} = (x,\ y,\ z)$ のとき、$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$ を成分表示で求めよ。

(2) パラメータ表示で $\boldsymbol{r} = \left(\cos t,\ \sin t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$ $(0 \le t \le 1)$ と表される曲線の弧長を求めよ。

(参考) 必要なら不定積分の公式 $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left\{x\sqrt{x^2+1} + \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right\}$ を利用せよ。

(3) $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{r}' = \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)$, $r = |\boldsymbol{r}|$ とする。n が正の整数 のとき $\dfrac{d}{dt}r^n$ を、$n,\ r,\ \boldsymbol{r},\ \boldsymbol{r}'$ を用いて表せ。

(4) スカラー場 $\varphi = \sin r$ にラプラシアンを作用させて得られるスカラー場 $\triangle\varphi$ を r の関数として表せ。

ただし、$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である。

(5) スカラー場 $\varphi = x + y^2 + z^3$ を用いて, ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\,\varphi$ と定義する。また、点 (1,1,1) を始点とし点 (2,2,2) を終点とする線分を C とする。このとき、C に沿っての $\boldsymbol{A}$ の接線線積分 $I_{\mathrm{C}} = \displaystyle\int_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ の値を求めよ。

(6) ストークスの定理の内容を簡潔に記せ。（直観的な意味づけを書くのではなく、定理の表す数学的命題を書くこと）

【Ⅱ】（20 点） ３点 A,B,C の座標が A$(a,0,0)$、B$(0,b,0)$、C$(0,0,c)$ であるとき、以下の小問 (1), (2) に答えよ。ただし a, b, c は正の実数の定数である。

(1) 三角形 ABC の面積 S を求めよ。

(2) 定ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ の、三角形 ABC 上での法線面積分 $I = \displaystyle\int_{\triangle\mathrm{ABC}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$ の値を求めよ。ただし、三角形 ABC の表裏は、座標原点 (0,0,0) から見える側を裏面と定める。また、$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は実数の定数である。（定ベクトル場とは、空間のあらゆる点で同一のベクトル値をとるベクトル場を意味する。）

【Ⅲ】（20 点） 閉曲面 S をパラメータ表示

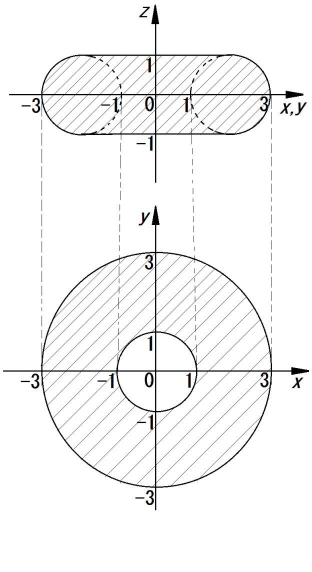
$$\boldsymbol{r} = \Big((2+\cos v)\cos u,\ (2+\cos v)\sin u,\ \sin v\Big) \qquad (0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le 2\pi)$$

により定義するとき、ベクトル場

$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 0\right)$$

の閉曲面 S 上での法線面積分 $I_{\mathrm{S}} = \displaystyle\int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$ の値を求めよ。

だたし、S は外側を表（おもて）面とする。なお、ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ は z 軸上で（x, y 成分の分母がゼロになるため）定義されていないが、右図に示した通り、閉曲面 S は z 軸と交わらないので、積分を求める際に支障は生じない。



応　用　数　学　Ⅲ　　定　期　試　験　　答　案　用　紙

福井大学工学部機械工学科 2 年生 対象、　担当教員 田嶋、　2012 年 2 月 10 日 2 限実施

【Ⅰ】 10 点× 6 問=60 点.　(注意) この大問 [I] についてのみ、導出過程は省略して最終的な答だけを記せ。

(1)	(5)
(2)	(6)
(3)	
(4)	

【Ⅱ】 20 点

【Ⅲ】 は裏面に解答せよ. 20 点

学科	機械工学	学籍番号									氏名		得点	(I)	(Ⅱ)	(Ⅲ)	合計

[1] (1) $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}$

$= (x+y+z)(1,1,1) - (1+1+1)(x,y,z)$

$= (-2x+y+z,\ x-2y+z,\ x+y-2z)$ (答)

または

$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = (z-y,\ x-z,\ y-x)$

$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = (y-x-x+z,\ z-y-y+x,\ x-z-z+y)$

$= (-2x+y+z,\ x-2y+z,\ x+y-2z)$ (答)

(2) $\boldsymbol{r} = (\cos t, \sin t, \frac{1}{2}t^2)$

$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (-\sin t, \cos t, t)$

$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + t^2} = \sqrt{1+t^2}$

(弧長) $= \int_0^1 \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt = \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{1+t^2} + \log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_{t=0}^{t=1}$

$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}) - 0 - \underbrace{\log 1}_{=0}\right) = \frac{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})}{2}$ (答)

(3) $\frac{d}{dt}r^n = \frac{dr^n}{dr}\frac{dr}{dt} = nr^{n-1}\frac{dr}{dt}$,

$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}} = \left\{\frac{d}{d(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})^{1/2}\right\}\cdot\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})^{-1/2}(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')$

$= \frac{1}{r}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'$

$\therefore \frac{d}{dt}r^n = nr^{n-1}\frac{1}{r}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}' = nr^{n-2}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'$ (答)

(4) $\Delta\varphi = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)\sin r = -\sin r + \frac{2}{r}\cos r$ (答)

または

$\nabla\varphi = \frac{d\sin r}{dr}\nabla r = \cos r\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}$

$\Delta\varphi = \nabla\cdot\nabla\varphi = \left(\nabla\frac{\cos r}{r}\right)\cdot\boldsymbol{r} + \frac{\cos r}{r}\nabla\cdot\boldsymbol{r}$

$= \left(\frac{d}{dr}\frac{\cos r}{r}\right)(\nabla r)\cdot\boldsymbol{r} + \frac{\cos r}{r}(1+1+1)$

$= \frac{-\sin r\cdot r - \cos r\cdot 1}{r^2}\,\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}{r} + 3\frac{\cos r}{r}$

$= -\sin r - \frac{\cos r}{r} + \frac{3\cos r}{r} = -\sin r + \frac{2}{r}\cos r$ (答)

[I] (5) $I_c = \int_C \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \int_C (\nabla\varphi)\cdot d\mathbb{r} = \varphi(2,2,2) - \varphi(1,1,1)$

$= (2+4+8) - (1+1+1) = 11$ (答)

または. $C : \mathbb{r} = (1,1,1) + t(1,1,1) \quad (0 \leqq t \leqq 1)$

$\mathbb{A} = \mathrm{grad}\,\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(x+y^2+z^3) = (1, 2y, 3z^2)$

C上で $\mathbb{A} = (1, 2(1+t), 3(1+t)^2)$

$I_c = \int_0^1 \mathbb{A}\cdot\frac{d\mathbb{r}}{dt}dt = \int_0^1 (1, 2(1+t), 3(1+t)^2)\cdot(1,1,1)\,dt$

$= \int_0^1 \{1 + 2(1+t) + 3(1+t)^2\}dt = \Big[t + (1+t)^2 + (1+t)^3\Big]_{t=0}^{t=1} = 11$ (答)

(6) 閉曲線Cを縁とする曲面Sを考える. Cの巻く向きに回した右ネジの進む方向をSの表面とする. このとき任意のベクトル場$\mathbb{A}$について

$\oint_C \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \int_S (\mathrm{rot}\,\mathbb{A})\cdot d\mathbb{S}$ が成立する

[II] (1) $\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (bc, ca, ab)$

$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$ (答)

(2) $I_s = \int_S \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S} = \mathbb{A}\cdot\int_S d\mathbb{S}$ ($\because$ $\mathbb{A}$が定ベクトルだから)

$= \mathbb{A}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}) = (\alpha,\beta,\gamma)\cdot\frac{1}{2}(bc, ca, ab)$

$= \frac{1}{2}(\alpha bc + a\beta c + ab\gamma)$ (答)

または. $S : \mathbb{r} = (a,0,0) + (-a,b,0)u + (-a,0,c)v \quad 0\leqq u\leqq 1,\ 0\leqq v\leqq 1-u$

$= (a(1-u-v), bu, cv)$

$\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial u} = (-a, b, 0)$, $\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial v} = (-a, 0, c)$, $\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial v} = (bc, ca, ab)$

$I_S = \int_0^1 du\int_0^{1-u}dv\,(\alpha,\beta,\gamma)\cdot(bc,ca,ab)$

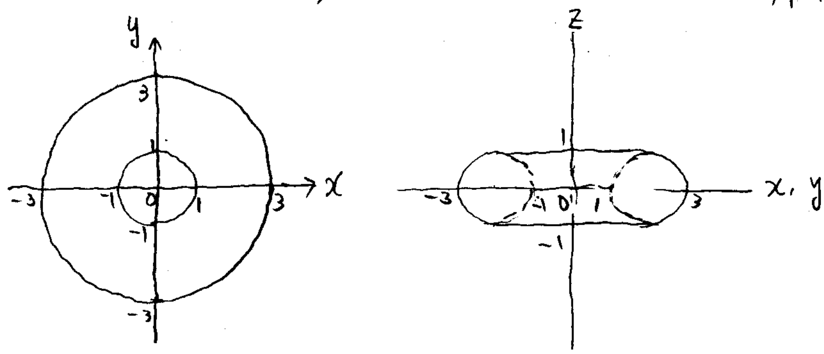
$= (\alpha bc + a\beta c + ab\gamma)\int_0^1 du\,(1-u)$

$= \frac{1}{2}(\alpha bc + a\beta c + ab\gamma)$ (答)

[Ⅲ] $\boxed{\text{解法Ⅰ}}$

$$\mathbf{r} = \left((2+\cos v)\cos u,\ (2+\cos v)\sin u,\ \sin v \right)$$ (閉曲面Sのパラメータ表示)

$0 \leqq u \leqq 2\pi,\quad 0 \leqq v \leqq 2\pi$ 外側をおもて面とする



$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(-(2+\cos v)\sin u,\ (2+\cos v)\cos u,\ 0 \right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(-\sin v \cos u,\ -\sin v \sin u,\ \cos v \right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left((2+\cos v)\cos v \cos u,\ (2+\cos v)\cos v \sin u,\ (2+\cos v)\sin v \right)$$

$$= (2+\cos v)\left(\cos v \cos u,\ \cos v \sin u,\ \sin v \right)$$

$u = v = 0$ で $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 3\,(1, 0, 0)$ 正しく外側(表側)をむいている.

ベクトル場 $\mathbf{A} = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 0 \right)$

$$x^2+y^2 = (2+\cos v)^2\cos^2 u + (2+\cos v)^2 \sin^2 u = (2+\cos v)^2$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y, 0) = \frac{1}{2+\cos v}\left((2+\cos v)\cos u,\ (2+\cos v)\sin u,\ 0 \right)$$

$$= (\cos u,\ \sin u,\ 0)$$

$$\mathbf{A}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) = (2+\cos v)\left(\cos v \cos^2 u + \cos v \sin^2 u + 0 \right)$$

$$= (2+\cos v)\cos v$$

$$I_S = \int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi} dv\, (2+\cos v)\cos v$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} 2\cos v\, dv + 2\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 v\, dv$$

$$= 2\pi \cdot 0 + 2\pi\, \frac{2\pi}{2} = \underline{2\pi^2} \text{ (答)}$$

[Ⅲ] $\boxed{\text{解法Ⅱ}}$

Sの囲む3次元領域をVとすると

$$V=\left\{(x,y,z)\;\middle|\; x=(2+w\cos v)\cos u,\ y=(2+w\cos v)\sin u,\ z=w\sin v,\right.$$
$$\left. 0\leqq u\leqq 2\pi,\ 0\leqq v\leqq 2\pi,\ 0\leqq w\leqq 1\right\}$$

とパラメータ表示できる。

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}=\left(-(2+w\cos v)\sin u,\ (2+w\cos v)\cos u,\ 0\right)$$
$$=(2+w\cos v)(-\sin u,\ \cos u,\ 0)$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=(-w\sin v\cos u,\ -w\sin v\sin u,\ w\cos v)$$
$$=w(-\sin v\cos u,\ -\sin v\sin u,\ \cos v)$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}=(\cos v\cos u,\ \cos v\sin u,\ \sin v)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=w(2+w\cos v)(\cos u\cos v,\ \sin u\cos v,\ \sin v)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)=w(2+w\cos v)\underbrace{(\underbrace{\cos^2u\cos^2v+\sin^2u\cos^2v}_{=\cos^2 v}+\sin^2v)}_{=1}$$
$$=w(2+w\cos v)$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\partial}{\partial z}0$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-3/2}\cdot 2x+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-3/2}\cdot 2y$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(1-\frac{x^2}{x^2+y^2}+1-\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(2+w\cos v)^2\cos^2u+(2+w\cos v)^2\sin^2u}}$$
$$=\frac{1}{2+w\cos v}$$

ガウスの発散定理により

$$I_S=\int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\int_V \mathrm{div}\,\mathbf{A}\,d^3r$$
$$=\int_0^1 dw\int_0^{2\pi}du\int_0^{2\pi}dv\,\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\right|\mathrm{div}\,\mathbf{A}$$
$$=\int_0^1 dw\int_0^{2\pi}du\int_0^{2\pi}dv\ w(2+w\cos v)\cdot\frac{1}{2+w\cos v}=(2\pi)^2\int_0^1 w\,dw=2\pi^2\ (\text{答})$$