応 用 数 学 Ⅲ　定 期 試 験 問 題

福井大学工学部機械工学科２年生対象,　担当教員 田嶋,　2011 年 2 月 4 日 2 限実施

各人に問題用紙１枚, 答案用紙２枚 (B4 版 表裏使用) を配布する。答案用紙は必ず２枚とも提出し, 問題用紙は持ち帰れ。答案用紙の答案用紙番号の欄は、１枚目の答案用紙は「１」を、２枚目は「２」を丸で囲め。答は, １枚目の表, １枚目の裏, ２枚目の表, ２枚目の裏という順に続けて書け。解答にあたっては, スカラー量とベクトル量が一目で判別できるよう, ベクトル量を表す記号は太字にするか上に矢印をのせるようにせよ。スカラーのゼロとゼロベクトルとを明確に区別して書け。また内積や外積を表すドットやクロス記号を省略してはならない。各種の場の積分定理やその他の有用な公式を覚えている場合は証明なくそれらを利用して答を求めてよい。

【Ⅰ】 (20 点) スカラー場 $\varphi = \dfrac{z}{x^2+y^2+1}$ およびベクトル場 $\mathbf{A} = \mathrm{grad}\,\varphi$ に関して, 以下の小問 (1),(2) に答えよ。

(1) $\mathbf{A}$ を求めよ。（即ち, $\mathbf{A}$ の各成分を「変数として x,y,z のみを含み得る数式」で表せ)。

(2) 下記で定義した曲線 C に沿ってのベクトル場 $\mathbf{A}$ の接線線積分 $I_{\mathrm{C}} = \displaystyle\int_{\mathrm{C}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ の値を求めよ。

$$\mathrm{C} = \{(x,y,z) \mid x = t\cos 2\pi t,\ y = t\sin 2\pi t,\ z = t,\ 1 \le t \le 10\}$$

ただし, $t=1$ に対応する点が C の始点, $t=10$ に対応する点が C の終点であるとする。

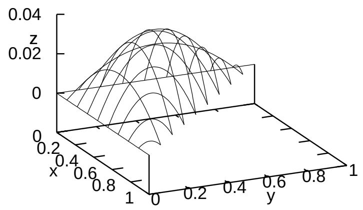
【Ⅱ】 (20 点) ベクトル場 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, 曲面 S を以下の通り定義する。

$$\mathbf{A} = (x^2+2y+3z,\ x+2y^2+3z,\ x+2y+3z^2), \quad \mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A},$$

$$\mathrm{S} = \{(x,y,z) \mid z = xy(1-x-y),\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 1\}.$$

ただし, S の表裏は, 点 $(0,\,0,\,+\infty)$ から見える側を表（おもて）面と定める。このとき, 以下の小問 (1),(2) に答えよ。

なお参考のため曲面 S を描いた図を右に示す。



(1) $\mathbf{B}$ を求めよ。（即ち, $\mathbf{B}$ の各成分を求めよ)。

(2) 曲面 S 上での法線面積分 $I_{\mathrm{S}} = \displaystyle\int_{\mathrm{S}} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$ の値を求めよ。

【Ⅲ】 (20 点) ベクトル場 $\mathbf{A}$, スカラー場 φ, ３次元領域 V を以下の通り定義する。

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}}{r^3+1}, \qquad \varphi = \mathrm{div}\mathbf{A}, \qquad \mathrm{V} = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le a^2\right\}.$$

ただし,　$\mathbf{r} = (x,y,z)$,　$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,　$a > 0$　とする。このとき, 以下の小問 (1),(2) に答えよ。

(1) φ を求めよ。（φ を「変数として r だけを含み得る数式」で表せ)。

(2) スカラー場 φ の３次元領域 V 内での体積積分 $I_{\mathrm{V}} = \displaystyle\int_{\mathrm{V}} \varphi\, dv$ の値を求めよ。

【Ⅳ】 (20 点) ３次元領域　$\mathrm{V} = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le a^2,\ 0 \le z \le 1\right\}$

の表面 (ひょうめん) を曲面 S とするとき, ベクトル場 $\mathbf{A} = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z+1\right)$ の曲面 S 上での法線面積分 $I_{\mathrm{S}} = \displaystyle\int_{\mathrm{S}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$ の値を求めよ。ただし, S は外側が表（おもて）面とし, $a > 0$ とする。

[補足説明] V は, z 軸を対称軸とし半径が a の円柱の内部で, $0 \le z \le 1$ を満たす部分である。S は, 円柱の側面の部分および底面 (床面) と頂面 (天井面) からなる。側面は曲面だが, 底面と頂面は平面（半径 a の円）である。

【Ⅴ】 (20 点) スカラー場 $\varphi = \dfrac{x}{r^2}$ にラプラス演算子 Δ を作用させた結果として得られるスカラー場 $\Delta\varphi$ を求めよ。ただし, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする。

応　用　数　学　Ⅲ　　定　期　試　験　　答　案　用　紙

福井大学工学部機械工学科２年生 対象、　担当教員 田嶋、　2011 年２月４日２限実施

学科	学籍番号								氏名	答案用紙番号	得点	(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)	合計
機械工学										１・２							

[I] (1) $\mathbb{A} = \mathrm{grad}\,\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{z}{x^2+y^2+1} = \left(-\frac{2xz}{(x^2+y^2+1)^2}, -\frac{2yz}{(x^2+y^2+1)^2}, \frac{1}{x^2+y^2+1}\right)$

(2) $I_c = \int_c \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \int_c (\nabla\varphi)\cdot d\mathbb{r} = \varphi(t=10) - \varphi(t=1)$ (∵ 仮称「スカラーポテンシャルの定理」による.)

$\varphi(t=1) = \varphi(x=1, y=0, z=1) = \frac{1}{1^2+0^2+1} = \frac{1}{2}$

$\varphi(t=10) = \varphi(x=10, y=0, z=10) = \frac{10}{10^2+0^2+1} = \frac{10}{101}$

$I_c = \frac{10}{101} - \frac{1}{2} = \frac{20-101}{202} = -\frac{81}{202}$

[II] (1) $\mathbb{B} = \mathrm{rot}\,\mathbb{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\times(x^2+2y+3z,\ x+2y^2+3z,\ x+2y+3z^2)$

$= (2-3,\ 3-1,\ 1-2) = (-1,\ 2,\ -1)$

(2) 3点 $(0,0,0)\to(1,0,0)\to(0,1,0)\to(0,0,0)$ を、この順に線分でつないだ閉じた折れ線経路を C とし、C を縁とする三角形領域を S′ とすると.

ストークスの定理により

$I_s = \int_S \mathbb{B}\cdot d\mathbb{S} = \int_c \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \int_{S'} \mathbb{B}\cdot d\mathbb{S}$.

定ベクトルなので積分の外に出せる.

$\int_{S'} \mathbb{B}\cdot d\mathbb{S} = \mathbb{B}\cdot\int_{S'} d\mathbb{S} = \mathbb{B}\cdot\frac{1}{2}\mathbb{e}_z = (-1,2,-1)\cdot\frac{1}{2}(0,0,1) = -\frac{1}{2}$

S′の面積　S′の法線方向

[解説: S′上では $d\mathbb{S} = \mathbb{e}_z dS$, $\mathbb{e}_z = (0,0,1)$.
∴ $\int_{S'} d\mathbb{S} = \mathbb{e}_z\int_{S'} dS = \mathbb{e}_z\cdot$(S′の面積)]

[III] (1) $\varphi = \mathrm{div}\,\mathbb{A} = \nabla\cdot\frac{\mathbb{r}}{r^3+1} = (\nabla\cdot\mathbb{r})\frac{1}{r^3+1} + \left(\nabla\frac{1}{r^3+1}\right)\cdot\mathbb{r}$

$= 3\cdot\frac{1}{r^3+1} - \frac{3r^2}{(r^3+1)^2}\frac{\mathbb{r}}{r}\cdot\mathbb{r} = \frac{3}{r^3+1} - \frac{3r^3}{(r^3+1)^2}$

$= \frac{3r^3+3-3r^3}{(r^3+1)^2} = \frac{3}{(r^3+1)^2}$

(2) V の表面(外側がおもて)を S とすると、ガウスの発散定理により

$I_v = \int \varphi\, dv = \int_S \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S} = \int_S \frac{\mathbb{r}}{r^3+1}\cdot\frac{\mathbb{r}}{r}dS$

$= \frac{a}{a^3+1}\int_S dS = \frac{a}{a^3+1}4\pi a^2 = \frac{4\pi a^3}{a^3+1}$

[IV] ガウスの発散定理より

$$I_s = \int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathrm{div}\,\mathbf{A}\, dv.$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial}{\partial z}(z+1)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} + \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} + 1$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} + 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1$$

$$\int_V \mathrm{div}\,\mathbf{A}\, dv = \int_V \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1\right) dv$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz \int_0^a d\rho\cdot\rho \left(\frac{1}{\rho} + 1\right)$$

$$= 2\pi \cdot 1 \cdot \left[\rho + \frac{1}{2}\rho^2\right]_{\rho=0}^{\rho=a}$$

$$= 2\pi\left(a + \frac{a^2}{2}\right) = \underline{\pi a(a+2)}$$

[V]

$$\Delta \frac{x}{r^2} = \nabla\cdot\nabla\frac{x}{r^2} = \nabla\cdot\left\{(\nabla x)\frac{1}{r^2} + x\left(\nabla\frac{1}{r^2}\right)\right\}$$

$$= \nabla\cdot\left\{\mathbf{e}_x\frac{1}{r^2} + x\left(-\frac{2}{r^3}\right)\frac{\mathbf{r}}{r}\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^2} - \left(\nabla\frac{2x}{r^4}\right)\cdot\mathbf{r} - \frac{2x}{r^4}\nabla\cdot\mathbf{r}$$

$$= -\frac{2}{r^3}\frac{x}{r} - \left\{2\mathbf{e}_x\frac{1}{r^4} + 2x\left(\frac{-4}{r^5}\right)\frac{\mathbf{r}}{r}\right\}\cdot\mathbf{r} - \frac{2x}{r^4}\cdot 3$$

$$= -\frac{2x}{r^4} - \frac{2x}{r^4} + \frac{8x}{r^4} - \frac{6x}{r^4}$$

$$= \underline{-\frac{2x}{r^4}}$$

以上で解答は一応終わりです。

次頁以降では別解法を示しますが、全て上述の解法より効率の悪い計算方法となっています。

以下は効率の悪い別解法です

[I] (2) の別解（素直に線積分を実行して求める）

$$C: \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\cos 2\pi t - 2\pi t \sin 2\pi t ,\ \sin 2\pi t + 2\pi t \cos 2\pi t ,\ 1\right)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) = \left(-\frac{2t^2 \cos 2\pi t}{(t^2+1)^2} ,\ -\frac{2t^2 \sin 2\pi t}{(t^2+1)^2} ,\ \frac{1}{t^2+1}\right)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{2t^2}{(t^2+1)^2}\left\{\cos^2 \pi t - 2\pi t \sin 2\pi t \cos 2\pi t + \sin^2 \pi t + 2\pi t \sin 2\pi t \cos 2\pi t\right\} + \frac{1}{t^2+1}$$

$$= -\frac{2t^2}{(t^2+1)^2} + \frac{1}{t^2+1} = \frac{2}{(t^2+1)^2} - \frac{1}{t^2+1} \quad \left(= \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\right)$$

$$I_c = \int_1^{10} \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt = \int_1^{10} \left\{\frac{2}{(t^2+1)^2} - \frac{1}{t^2+1}\right\} dt$$

$$= \Bigg[\underbrace{\frac{t}{t^2+1}} \Bigg]_{t=1}^{t=10} = \frac{10}{101} - \frac{1}{2} = -\frac{81}{202}$$

$\varphi(\mathbf{r}(t)) = \dfrac{t}{t^2+1}$ に等しいはずなので、$\dfrac{t}{t^2+1}$ を微分してみると

確かに被積分関数に等しくなっていることが確かめられる。

（$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$ の求め方は http://serv.apphy.u-fukui.ac.jp/~tajima/cs/ cs_supp2.pdf を見よ。）

[II] (2) の別解(i)（C に沿っての線積分として求める）

$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

C_1: $(0,0,0) \to (1,0,0)$: $\mathbf{r} = (t, 0, 0)$, $0 \leq t \leq 1$

$$I_{C_1} = \int_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^2, t, t) \cdot (1,0,0)\, dt = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}$$

C_2: $(1,0,0) \to (0,1,0)$: $\mathbf{r} = (1-t, t, 0)$, $0 \leq t \leq 1$

$$I_{C_2} = \int_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \left((1-t)^2 + 2t,\ 1-t+2t^2,\ 1-t+2t\right) \cdot (-1, 1, 0)\, dt$$

$$= \int_0^1 (-1 + 2t - t^2 - 2t + 1 - t + 2t^2)\, dt = \int_0^1 (-t + t^2)\, dt = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$$

C_3: $(0,1,0) \to (0,0,0)$: $\mathbf{r} = (0, 1-t, 0)$, $0 \leq t \leq 1$

$$I_{C_3} = \int_{C_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \left(2-2t,\ 2(1-t)^2,\ 2-2t\right) \cdot (0,-1,0)\, dt$$

$$= \int_0^1 (-2)(1-t)^2\, dt = -\frac{2}{3}$$

$$I_C = I_{C_1} + I_{C_2} + I_{C_3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{以下は別解法ですが、全て効率の悪い求め方です。}}$

[II] (2) の別解例(元の面積分をそのまま求める)

$$S: \quad \mathbb{r} = (u, v, uv(1-u-v)), \quad 0 \leqq u \leqq 1, \quad 0 \leqq v \leqq 1-u$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} = (1, 0, v - 2uv - v^2), \quad \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = (0, 1, u - 2uv - u^2)$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = (-v + 2uv + v^2, \ -u + 2uv + u^2, \ 1) \qquad \text{向きは正しい}$$

$$I_s = \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \ \mathbb{B} \cdot \left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v}\right) \qquad , \mathbb{B} = (-1, 2, -1)$$

$$= \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \left(v - 2uv - v^2 - 2u + 4uv + 2u^2 - 1\right)$$

$$= \int_0^1 du \int_0^{1-u} dv \left\{ -v^2 + (2u+1)v + 2u^2 - 2u - 1 \right\}$$

$$= \int_0^1 du \left\{ -\frac{1}{3}(1-u)^3 + \frac{1}{2}(2u+1)(1-u)^2 + (2u^2 - 2u - 1)(1-u) \right\}$$

$$= \int_0^1 du \left\{ -\frac{1}{3}(1-u)^3 + \underbrace{\left(u - 1 + \frac{3}{2}\right)(1-u)^2}_{= -(1-u)^3 + \frac{3}{2}(1-u)^2} - 2u^3 + 4u^2 - u - 1 \right\}$$

$$= -\frac{4}{3}\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\frac{1}{3} - 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1$$

$$= -\frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{-\frac{1}{2}} + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \cancel{-1}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

[III] (2) の別解 (体積積分を三次元極座標で実行して求める)

$$I_V = 4\pi \int_0^a dr \cdot r^2 \cdot \varphi$$

$$= 4\pi \int_0^a \frac{3r^2}{(r^3+1)^2} dr$$

$$= 4\pi \left[-\frac{1}{r^3+1} \right]_{r=0}^{r=a}$$

$$= 4\pi \left(-\frac{1}{a^3+1} + 1 \right)$$

$$= 4\pi \frac{a^3}{a^3+1}$$

以下は別解法ですが、効率の悪い求め方です。

[IV]の別解　（面積分を実行して求める）

円柱座標　$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z$ で $\mathbb{A}$ を表すと

$$\mathbb{A}=(\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ z+1)$$

$$S=S_1+S_2+S_3$$

S_1：円柱の側面：$\mathbb{r}=(a\cos\varphi,\ a\sin\varphi,\ z)$，$0\leqq\varphi\leqq2\pi$，$0\leqq z\leqq1$

$$I_{S_1}=\int_{S_1}\mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\varphi\ \mathbb{A}(\mathbb{r}(\varphi,z))\cdot\left(\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial z}=(-a\sin\varphi,\ a\cos\varphi,0)\times(0,0,1)=(a\cos\varphi,\ a\sin\varphi,\ 0)$$

$$\mathbb{A}(\mathbb{r}(\varphi,z))=(\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ z+1)$$

$$I_{S_1}=\int_0^1dz\int_0^{2\pi}d\varphi\ (a\cos^2\varphi+a\sin^2\varphi)=a\int_0^1dz\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi a$$

S_2：円柱の底面：$\mathbb{r}=(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ 0)$，$0\leqq\varphi\leqq2\pi$，$0\leqq\rho\leqq a$

$$I_{S_2}=\int_{S_2}\mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}=\int_0^a d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\ \mathbb{A}(\mathbb{r}(\rho,\varphi))\cdot\left(\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\varphi}\right)$$

$$\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\rho}\times\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\varphi}=(\cos\varphi,\ \sin\varphi,0)\times(-\rho\sin\varphi,\ \rho\cos\varphi,0)=(0,0,\rho)$$

これは内向きなので−1倍する

$$\mathbb{A}(\mathbb{r}(\rho,\varphi))=(\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 1)$$

$$I_{S_2}=\int_0^a d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\cdot(-\rho)=-\frac{a^2}{2}\cdot2\pi=-\pi a^2$$

S_3：円柱の頂面：$\mathbb{r}=(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ 1)$，$0\leqq\rho\leqq a$，$0\leqq\varphi\leqq2\pi$

$$I_{S_3}=\int_{S_3}\mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}=\int_0^a d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi\ (\cos\varphi,\sin\varphi,1)\cdot(0,0,\rho)$$

$$=\int_0^a 2\rho\, d\rho\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot2\pi=2\pi a^2$$

$$I_S=I_{S_1}+I_{S_2}+I_{S_3}=2\pi a-\pi a^2+2\pi a^2=\underline{\pi a(a+2)}$$

以下は別解法です。

[V]の別解　$\left(\Delta(\psi\varphi) = (\Delta\psi)\varphi + 2(\nabla\psi)\cdot(\nabla\varphi) + \psi\Delta\varphi\right.$ を公式として利用する)

$$\Delta \frac{x}{r^2} = (\nabla^2 x)\frac{1}{r^2} + 2(\nabla x)\cdot\left(\nabla\frac{1}{r^2}\right) + x\,\nabla^2\frac{1}{r^2}$$

$$\nabla x = \mathbf{e}_x = (1,0,0)$$

$$\nabla^2 x = 0$$

$$\nabla\frac{1}{r^2} = -\frac{2}{r^3}\frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{2}{r^4}\mathbf{r}$$

$$\nabla^2\frac{1}{r^2} = -2\left(\nabla\frac{1}{r^4}\right)\cdot\mathbf{r} - 2\frac{1}{r^4}\nabla\cdot\mathbf{r} = -2\frac{-4}{r^5}\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{r} - 2\frac{1}{r^4}3 = \frac{2}{r^4}$$

$$\Delta\frac{x}{r^2} = 0\cdot\frac{1}{r^2} + 2\left(-\frac{2}{r^4}\right)x + \frac{2x}{r^4} = -\frac{2x}{r^4}$$

[V]の別解　$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right.$ として計算する)

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^2} = -\frac{2}{r^3}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{2}{r^3}\frac{x}{r} = -\frac{2}{r^4}x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r^2} = -\frac{2}{r^4}y$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r^2} = -\frac{2}{r^4}z$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r^2} = \frac{8}{r^5}\frac{x}{r}x - \frac{2}{r^4} = \frac{8x^2}{r^6} - \frac{2}{r^4}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{r^2} = \frac{8y^2}{r^6} - \frac{2}{r^4}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r^2} = \frac{8z^2}{r^6} - \frac{2}{r^4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^2} = \frac{1}{r^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{x}{r^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^2} + x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r^2} = 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^2} + x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r^2}$$

$$= -\frac{4}{r^4}x + x\left(\frac{8x^2}{r^6} - \frac{2}{r^4}\right) = \frac{8x^3}{r^6} - \frac{6x}{r^4}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{r^2} = x\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{x}{r^2} = x\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{r^2} = \frac{8xy^2}{r^6} - \frac{2x}{r^4}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{r^2} = x\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{x}{r^2} = x\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r^2} = \frac{8xz^2}{r^6} - \frac{2x}{r^4}$$

$$\Delta\frac{x}{r^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{x}{r^2} = \frac{8x^3}{r^6} - \frac{6x}{r^4} + \frac{8xy^2}{r^6} - \frac{2x}{r^4} + \frac{8xz^2}{r^6} - \frac{2x}{r^4}$$

$$= \frac{8(x^2+y^2+z^2)x}{r^6} - \frac{10x}{r^4} = \frac{8x}{r^4} - \frac{10x}{r^4} = -\frac{2x}{r^4}$$