福井大学工学部 機械工学科２年生 応用数学 III (担当教員 田嶋) 中間試験問題:　2010 年 12 月 3 日 3 限実施

各人に問題用紙１枚, 答案用紙１枚 (表裏使用), 計算用紙１枚を配布する。

解答にあたっては, スカラー量とベクトル量が一目で判別できるよう, ベクトル量を表す記号は太字にするか上に矢印をのせるようにせよ。

スカラーのゼロとゼロベクトルとを明確に区別して書け。また内積や外積を表すドットやクロス記号を省略してはならない。

【1】 下記の等式 (1)〜(10) のうち任意のベクトル $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ について成り立つものに ◯ を、そうでないものに × をつけよ。理由は述べず答だけを解答用紙の解答欄に記せ。

(1) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$　(2) $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{B}-\mathbf{A}$　(3) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$　(4) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{B}\times\mathbf{A}$

(5) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$　(6) $(\mathbf{A}-\mathbf{B})-\mathbf{C}=\mathbf{A}-(\mathbf{B}-\mathbf{C})$

(7) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$　(8) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$

(9) $\mathbf{A}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{A})=\mathbf{0}$　(10) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{A}\times\mathbf{C})=\mathbf{0}$

【2】 任意の１変数ベクトル関数 $\mathbf{r}(t)$ および t に関する任意の積分区間 $[p,q]$ について、$\mathbf{v}(t)=\dfrac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$、$\mathbf{a}(t)=\dfrac{d\mathbf{v}(t)}{dt}$ とするとき、

$$\int_p^q \mathbf{r}(t)\times\mathbf{a}(t)dt=\mathbf{r}(q)\times\mathbf{v}(q)-\mathbf{r}(p)\times\mathbf{v}(p)$$

が成り立つことを証明せよ。

【3】 3 点 A$(1,2,3)$, B$(2,3,1)$, C$(3,1,2)$ について, 下記の (1)〜(6) を求めよ。

(1) $\overline{\mathrm{AB}}\ \left(=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\right)$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　(3) $\angle\mathrm{BAC}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　(成分表示で答えよ)

(5) 三角形 ABC の面積 S　(6) 三角形 ABC に垂直な単位ベクトル $\mathbf{n}$ (成分表示で答えよ)

【4】 パラメータ表示された曲線 $\mathbf{r}=\left((t-2)^2,\ (t+2)^2,\ 4\sqrt{2}\log t\right)$ の $1\le t\le 2$ に対応する部分の弧長 s を求めよ。

【5】 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ は一変数 t のベクトル関数であり, $\mathbf{B}=\mathbf{A}\exp\left(|\mathbf{A}|^3\right)$ という関係がある。このとき $\mathbf{B}'$ を $\mathbf{A}$, $|\mathbf{A}|$, $\mathbf{A}'$ を用いて表せ。ただし, $\mathbf{A}'=\dfrac{d\mathbf{A}(t)}{dt}$, $\mathbf{B}'=\dfrac{d\mathbf{B}(t)}{dt}$ とする。

【6】 パラメータ表示で $\mathbf{r}=\left(e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ 0\right)$ と表される曲線について以下の小問 (1), (2) に答えよ。

(1) 曲率半径 ρ を t の関数として求めよ。

(2) 曲率半径の中心 $\mathbf{r}_{\mathrm{c}}$ の座標を t の関数として求めよ。

【ヒント】解答に際しては、下記の諸式を参考にするとよい。

$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ のとき　$\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$,　$\mathbf{a}=d\mathbf{v}/dt$,
$v=\lvert\mathbf{v}\rvert$,　$\mathbf{t}=\mathbf{v}/v$,　$\mathbf{a}_{\mathrm{n}}=\mathbf{a}-(\mathbf{t}\cdot\mathbf{a})\mathbf{t}$,　$a_{\mathrm{n}}=\lvert\mathbf{a}_{\mathrm{n}}\rvert$,
$\kappa=a_{\mathrm{n}}/v^2$,　$\rho=1/\kappa$,　$\mathbf{n}=\mathbf{a}_{\mathrm{n}}/a_{\mathrm{n}}$,　$\mathbf{r}_{\mathrm{c}}=\mathbf{r}+\rho\mathbf{n}$

福井大学 工学部
機械工学 2 年生

応用数学 III　中間試験　答案用紙

2010 年 12 月 3 日 3 限実施

【1】
20 点
=2×10

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

【2】
15 点

【3】
15 点

【4】
15 点

【5】
15 点

【6】は裏面に解答せよ. 20 点

学科 機械工学

学籍番号

氏名

得点

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	合計

応用数学Ⅲ 中間試験の解答・解説 (2010年12月3日実施分)

[1]

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
○	×	○	×	○	×	×	○	○	×

(説明)

(2) $\mathbb{A}-\mathbb{B}=\mathbb{B}-\mathbb{A}$ が成り立つのは $\mathbb{A}=\mathbb{B}$ の場合に限られる。

(4) 外積は交換則でなく、反交換則が成り立つ。即ち $\mathbb{A}\times\mathbb{B}=-\mathbb{B}\times\mathbb{A}$ が成立

(7) ベクトル三重積の2通りの公式を思い出せ。

(8) スカラー三重積の持つ対称性により $(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot\mathbb{C}=(\mathbb{B}\times\mathbb{C})\cdot\mathbb{A}$ が成立.
次に、内積が交換則に従うことより $(\mathbb{B}\times\mathbb{C})\cdot\mathbb{A}=\mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{C})$ が成立.

(9) $\mathbb{A}\times\mathbb{A}=\mathbb{O}$ だから $\mathbb{A}\times(\mathbb{A}\times\mathbb{A})=\mathbb{A}\times\mathbb{O}=\mathbb{O}$ である.

(10) ベクトル三重積の公式を利用すると $(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\times(\mathbb{A}\times\mathbb{C})=\{(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot\mathbb{C}\}\mathbb{A}-\{(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot\mathbb{A}\}\mathbb{C}$ となる. $(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot\mathbb{A}=(\mathbb{A}\times\mathbb{A})\cdot\mathbb{B}=\mathbb{O}\cdot\mathbb{B}=0$ だが
$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot\mathbb{C}$ は一般にはゼロではない。

[2] 部分積分法により

$$\int_p^q \mathbb{r}(t)\times\mathbb{a}(t)\,dt=\Big[\mathbb{r}(t)\times\mathbb{v}(t)\Big]_p^q-\int_p^q \underbrace{\mathbb{v}(t)\times\mathbb{v}(t)}_{=\mathbb{O}}\,dt$$

$$=\mathbb{r}(q)\times\mathbb{v}(q)-\mathbb{r}(p)\times\mathbb{v}(p)$$

[3]

$$\overline{AB}=|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|=|(2,3,1)-(1,2,3)|=|(1,1,-2)|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(1,1,-2)\cdot(2,-1,-1)=2-1+2=3$$

$$\angle BAC=\arccos\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\overline{AB}\ \overline{AC}}=\arccos\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,1,-2)\times(2,-1,-1)=(-1-2,-4+1,-1-2)=(-3,-3,-3)$$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{9+9+9}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathbb{n}=\pm\frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}=\pm\frac{1}{3\sqrt{3}}(-3,-3,-3)=\mp\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

± と書けばよい

[4] $\mathbb{r} = \left((t-2)^2,\ (t+2)^2,\ 4\sqrt{2}\log t \right)$ $\quad (1 \leqq t \leqq 2)$

$$\mathbb{v} = \frac{d\mathbb{r}}{dt} = \left(2(t-2),\ 2(t+2),\ 4\sqrt{2}\,\frac{1}{t} \right)$$

$$v^2 = \mathbb{v}\cdot\mathbb{v} = 4(t^2-4t+4) + 4(t^2+4t+4) + 32\frac{1}{t^2}$$

$$= 8\left(t^2 + 4 + \frac{4}{t^2}\right) = 8\left(t + \frac{2}{t}\right)^2$$

$$v = \sqrt{v^2} = 2\sqrt{2}\left(t + \frac{2}{t}\right) \qquad (\because\ 1 \leqq t \leqq 2 \text{ では } t + \tfrac{2}{t} > 0)$$

$$s = \int_1^2 v\,dt = 2\sqrt{2}\int_1^2 \left(t + \frac{2}{t}\right)dt = 2\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}t^2 + 2\log t\right]_1^2$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{4}{2} + 2\log 2 - \frac{1}{2} - 2\underbrace{\log 1}_{=0}\right) = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\log 2 \quad (答)$$

[5] $\mathbb{B}' = \left\{\mathbb{A}\exp(|\mathbb{A}|^3)\right\}' = \mathbb{A}'\exp(|\mathbb{A}|^3) + \mathbb{A}\left\{\exp(|\mathbb{A}|^3)\right\}'.$

$$\left\{\exp(|\mathbb{A}|^3)\right\}' = \left(\frac{d}{du}e^u\right)\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dt} \qquad (u = v^3,\ v = |\mathbb{A}|)$$

$$= e^u \cdot 3v^2 \cdot \left\{|\mathbb{A}|\right\}' = 3|\mathbb{A}|^2\exp(|\mathbb{A}|^3)\cdot\left\{|\mathbb{A}|\right\}'.$$

$$\left\{|\mathbb{A}|\right\}' = \left\{\sqrt{\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}}\right\}' = \left(\frac{d}{dw}w^{1/2}\right)\left(\frac{dw}{dt}\right) \qquad (w = \mathbb{A}\cdot\mathbb{A})$$

$$= \frac{1}{2}w^{-1/2}(\mathbb{A}'\cdot\mathbb{A} + \mathbb{A}\cdot\mathbb{A}') = \frac{\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}'}{|\mathbb{A}|}.$$

$$\therefore\ \mathbb{B}' = \mathbb{A}'\exp(|\mathbb{A}|^3) + \mathbb{A}\cdot 3|\mathbb{A}|^2\exp(|\mathbb{A}|^3)\cdot\frac{\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}'}{|\mathbb{A}|}$$

$$= \underline{\left\{\mathbb{A}' + 3|\mathbb{A}|(\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}')\mathbb{A}\right\}\exp(|\mathbb{A}|^3)}$$

【注意事項】 今回の試験の答案では、

$\mathbb{A}(\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}')$ を $\mathbb{A}^2\mathbb{A}'$ に書きかえてしまう間違いが目立った。

これは

$$\mathbb{A}(\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}') = \mathbb{A}\ \ \mathbb{A}\cdot\mathbb{A}' \overset{(誤)}{=} \mathbb{A}\cdot\mathbb{A}\ \ \mathbb{A}' = \mathbb{A}^2\mathbb{A}'$$

カッコを省いても間違いではない

$\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}$ は $\mathbb{A}^2$ と書いてもよい

という、（$\mathbb{A}$ と $\mathbb{A}'$ が同じ方向をもつという）特殊な場合でしか成立しない式変形を行うことにあたる。一般のベクトル $\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}$ について

$(\mathbb{a}\cdot\mathbb{b})\mathbb{c} = \mathbb{a}(\mathbb{b}\cdot\mathbb{c})$ は成り立たない。

[6] $\mathbb{r} = (e^t \cos t,\ e^t \sin t)$ 本問ではz成分は常にゼロなので省略することにする。

$$\mathbb{v} = \frac{d\mathbb{r}}{dt} = (e^t \cos t - e^t \sin t,\ e^t \sin t + e^t \cos t)$$

$$\mathbb{a} = \frac{d\mathbb{v}}{dt} = (e^t \cos t - e^t \sin t - e^t \sin t - e^t \cos t,$$
$$e^t \sin t + e^t \cos t + e^t \cos t - e^t \sin t)$$
$$= (-2e^t \sin t,\ 2e^t \cos t)$$

$$v^2 = \mathbb{v}\cdot\mathbb{v} = e^{2t}\{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2\}$$
$$= e^{2t}(\cos^2 t \cancel{- 2\cos t \sin t} + \sin^2 t + \sin^2 t \cancel{+ 2\sin t \cos t} + \cos^2 t)$$
$$= 2e^{2t}$$

$$\mathbb{v}\cdot\mathbb{a} = 2e^{2t}\{(\cos t - \sin t)(-\sin t) + (\sin t + \cos t)\cos t\}$$
$$= 2e^{2t}(\sin^2 t + \cos^2 t) = 2e^{2t}$$

$$\mathbb{a}_n = \mathbb{a} - \frac{\mathbb{v}\cdot\mathbb{a}}{v^2}\mathbb{v} = 2e^t(-\sin t, \cos t) - \frac{2e^{2t}}{2e^{2t}} e^t(\cos t - \sin t,\ \cos t + \sin t)$$
$$= e^t(-\sin t - \cos t,\ \cos t - \sin t)$$

$$a_n = |\mathbb{a}_n| = e^t\sqrt{(-\sin t - \cos t)^2 + (\cos t - \sin t)^2}$$
$$= e^t\sqrt{\sin^2 t \cancel{+ 2\sin t \cos t} + \cos^2 t + \cos^2 t \cancel{- 2\cos t \sin t} + \sin^2 t}$$
$$= \sqrt{2}\, e^t$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{2e^{2t}}{\sqrt{2}\, e^t} = \sqrt{2}\, e^t \qquad \therefore\ \rho = \sqrt{2}\, e^t$$

$$\mathbb{r}_c = \mathbb{r} + \rho\frac{\mathbb{a}_n}{a_n} = e^t(\cos t, \sin t) + \cancel{\sqrt{2} e^t}\frac{1}{\cancel{\sqrt{2} e^t}} e^t(-\sin t - \cos t,\ \cos t - \sin t)$$
$$= e^t(-\sin t, \cos t)$$

$$\therefore\ \mathbb{r}_c = e^t(-\sin t, \cos t, 0)$$