応 用 数 学 Ⅲ　定 期 試 験 問 題

福井大学工学部機械工学科２年生対象、　担当教員 田嶋、　2010 年２月５日２限実施

各人に問題用紙１枚、答案用紙１枚 (B4 版 表裏使用)、計算用紙１枚を配布する。答案用紙１枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。解答にあたっては、スカラー量とベクトル量が一目で判別できるよう、ベクトル量を表す記号は太字にするか上に矢印をのせるようにせよ。スカラーのゼロとゼロベクトルとを明確に区別して書け。また内積や外積を表すドットやクロス記号を省略してはならない。
各種の場の積分定理やその他の有用な公式を覚えている場合は証明なくそれらを利用して答を求めてよい。

【I】 $\varphi = xy^2z^3$、$\mathbf{A} = \left(x-y,\, \sin(y-z),\, e^{z-x}\right)$ として、以下の小問 (1)〜(6) に指定した場の微分を求め、解答用紙の解答欄に答のみを記せ。計算過程を記す必要はない。

(1) $\mathrm{grad}\,\varphi$　　**(2)** $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\varphi)$　　**(3)** $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$　　**(4)** $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})$　　**(5)** $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})$

(6) $\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{A})$

【Ⅱ】 ベクトル場 $\mathbf{A}$ を $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left(x-y,\, x+y,\, e^{x+y+z}\right)$ と定義する。また、線分 C を、点 (3, 1, 2) を始点とし、点 (1, 2, 3) を終点とする線分とする。このとき、ベクトル場 $\mathbf{A}$ の線分 C に沿っての接線線積分 $I_{\mathrm{C}} = \int_{\mathrm{C}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ の値を計算せよ。

【Ⅲ】 スカラー場 $f(\mathbf{r}) = xyz$ の、3 次元領域 $\mathrm{V} = \left\{(x,y,z)\,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \le 1,\, x\ge 0,\, y\ge 0,\, z\ge 0\right\}$ での体積積分 $I_{\mathrm{V}} = \int_{\mathrm{V}} f(\mathbf{r})\, dv$ の値を求めよ。**（注意事項）**座標原点 (0, 0, 0) を中心とし半径 1 の球の $\frac{1}{8}$ が領域 V であるが、球全体に渡って積分した結果を 8 で割っても I_{V} に等しくはならない。

【Ⅳ】 ベクトル場 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left(x^2yz,\, xy^2z,\, xyz^2\right)$ の、曲面 $\mathrm{S} = \left\{(x,y,z)\,\middle|\, x^2+y^2+z^2 = 1,\, x\ge 0,\, y\ge 0,\, z\ge 0\right\}$ 上での法線面積分 $I_{\mathrm{S}} = \int_{\mathrm{S}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$ の値を求めよ。ただし、S の表裏は、座標原点 (0, 0, 0) に面した側を裏面と定める。

【V】 スカラー場 φ が $\varphi(\mathbf{r}) = zf(r)$ という形をしているとき、$\Delta\varphi$ を $r,\, z,\, f'(r),\, f''(r)$ を用いて表せ。ただし Δ はラプラス演算子である。また、$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\ f'(r) = \dfrac{df(r)}{dr},\ f''(r) = \dfrac{d^2 f(r)}{dr^2}$ とする。

（ヒント）参考のため計算の始めの部分を以下に示す。$\mathbf{k} = (0, 0, 1)$（z 軸方向の単位ベクトル）とする。

$$\nabla\varphi = \nabla\{zf(r)\} = (\nabla z)\, f(r) + z\nabla f(r) = \mathbf{k}f(r) + zf'(r)\nabla r = \mathbf{k}f(r) + zf'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

$$\Delta\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = \nabla\cdot\left\{\mathbf{k}f(r) + z\frac{f'(r)}{r}\mathbf{r}\right\} = \cdots\cdots$$

結果のチェック用に $f(r)$ に具体的な関数形を設定した場合の結果を１例だけ示しておく。例えば $f(r) = \dfrac{1}{r}$ の場合は下記を得る。

$$\Delta\frac{z}{r} = -\frac{2z}{r^3}$$

応 用 数 学 Ⅲ　　定 期 試 験　　答 案 用 紙

福井大学工学部機械工学科 2 年生 対象、　担当教員 田嶋、　2010 年 2 月 5 日 2 限実施

【Ⅰ】5 点× 6 問=30 点

(1)	(4)
(2)	(5)
(3)	(6)

【Ⅱ】20 点

【Ⅲ】20 点

【Ⅳ】【Ⅴ】 は裏面に解答せよ．15+15 点

学科	機械工学	学籍番号									氏名		得点	(Ⅰ)	(Ⅱ)	(Ⅲ)	(Ⅳ)	(Ⅴ)	合計

応用数学III 定期試験 解答・解説 (2010年2月5日実施分)

[I] (1) $\mathrm{grad}(xy^2z^3) = \left(\frac{\partial}{\partial x}xy^2z^3, \frac{\partial}{\partial y}xy^2z^3, \frac{\partial}{\partial z}xy^2z^3\right) = \underline{(y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)}$

(2) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\varphi) = \mathrm{div}(y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2) = \frac{\partial}{\partial x}y^2z^3 + \frac{\partial}{\partial y}2xyz^3 + \frac{\partial}{\partial z}3xy^2z^2$

$= 0 + 2xz^3 + 6xy^2z = \underline{2xz^3 + 6xy^2z} = \underline{2xz(z^2+3y^2)}$

(3) $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\times(x-y, \sin(y-z), e^{z-x})$

$= \left(\frac{\partial}{\partial y}e^{z-x} - \frac{\partial}{\partial z}\sin(y-z), \frac{\partial}{\partial z}(x-y) - \frac{\partial}{\partial x}e^{z-x}, \frac{\partial}{\partial x}\sin(y-z) - \frac{\partial}{\partial y}(x-y)\right)$

$= (0 + \cos(y-z), 0 + e^{z-x}, 0 + 1)$

$= \underline{(\cos(y-z), e^{z-x}, 1)}$

(4) $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\cos(y-z), e^{z-x}, 1)$

$= \left(\frac{\partial}{\partial y}1 - \frac{\partial}{\partial z}e^{z-x}, \frac{\partial}{\partial z}\cos(y-z) - \frac{\partial}{\partial x}1, \frac{\partial}{\partial x}e^{z-x} - \frac{\partial}{\partial y}\cos(y-z)\right)$

$= (0 - e^{z-x}, \sin(y-z) - 0, -e^{z-x} + \sin(y-z))$

$= \underline{(-e^{z-x}, \sin(y-z), \sin(y-z) - e^{z-x})}$

(5) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(-e^{z-x}, \sin(y-z), \sin(y-z)-e^{z-x})$

$= \frac{\partial}{\partial x}(-e^{z-x}) + \frac{\partial}{\partial y}\sin(y-z) + \frac{\partial}{\partial z}\{\sin(y-z) - e^{z-x}\}$

$= e^{z-x} + \cos(y-z) - \cos(y-z) - e^{z-x} = \underline{0}$

実は任意のベクトル場$\mathbf{A}$について $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) = 0$ が成立する。

(6) $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}(x-y) + \frac{\partial}{\partial y}\sin(y-z) + \frac{\partial}{\partial z}e^{z-x}$

$= 1 + \cos(y-z) + e^{z-x}$

$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\mathbf{A}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\{1+\cos(y-z)+e^{z-x}\}, \frac{\partial}{\partial y}\{1+\cos(y-z)+e^{z-x}\}, \frac{\partial}{\partial z}\{1+\cos(y-z)+e^{z-x}\}\right)$

$= (-e^{z-x}, -\sin(y-z), \sin(y-z) + e^{z-x})$

[II] 線分Cは以下の通りパラメータ表示できる。

$$\mathbb{r} = \underbrace{(3, 1, 2)}_{\text{始点の座標}} \cdot (1-t) + \underbrace{(1, 2, 3)}_{\text{終点の座標}} t \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

$$= (3\cdot(1-t) + 1\cdot t,\ 1\cdot(1-t) + 2\cdot t,\ 2\cdot(1-t) + 3\cdot t)$$

$$= (3 - 3t + t,\ 1 - t + 2t,\ 2 - 2t + 3t)$$

$$= (3 - 2t,\ 1 + t,\ 2 + t)$$

線分C上の点でのベクトル場$\mathbb{A}$は

$$\mathbb{A}(\mathbb{r}) = (x - y,\ x + y,\ e^{x+y+z})$$

のx, y, zに，(x, y, z)のパラメータ表示式

$$\mathbb{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (3 - 2t,\ 1 + t,\ 2 + t)$$

を代入して得られる

$$\mathbb{A}(\mathbb{r}(t)) = \left(\underbrace{(3-2t)}_{x} - \underbrace{(1+t)}_{y},\ \underbrace{(3-2t)}_{x} + \underbrace{(1+t)}_{y},\ e^{\overbrace{(3-2t)}^{x} + \overbrace{(1+t)}^{y} + \overbrace{(2+t)}^{z}} \right)$$

$$= (2 - 3t,\ 4 - t,\ e^6)$$

で表される．（この式は，パラメータtで指定されたC上の点$\mathbb{r}$における$\mathbb{A}$を表している。）

$$I_C = \int_C \mathbb{A} \cdot d\mathbb{r} = \int_0^1 \mathbb{A}(\mathbb{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbb{r}(t)}{dt}\, dt$$

$$= \int_0^1 (2-3t,\ 4-t,\ e^6) \cdot \frac{d}{dt}(3-2t,\ 1+t,\ 2+t)\, dt$$

$$= \int_0^1 (2-3t,\ 4-t,\ e^6) \cdot (-2, 1, 1)\, dt$$

$$= \int_0^1 \{(2-3t)\cdot(-2) + (4-t)\cdot 1 + e^6 \cdot 1\}\, dt$$

$$= \int_0^1 (-4 + 6t + 4 - t + e^6)\, dt$$

$$= \int_0^1 (e^6 + 5t)\, dt$$

$$= \left[e^6 t + \frac{5}{2} t^2 \right]_{t=0}^{t=1}$$

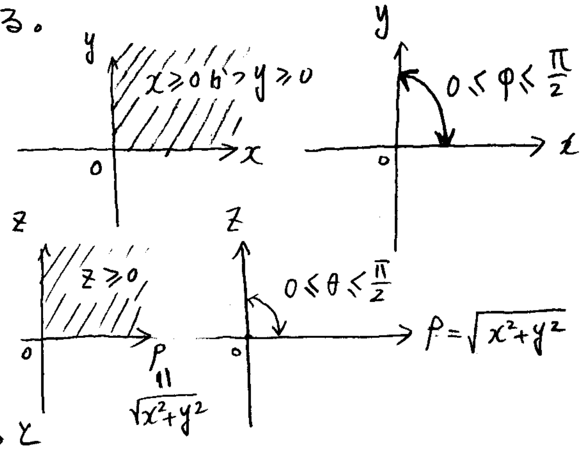
$$= e^6 + \frac{5}{2}$$

[Ⅲ]　球座標 r, θ, φ　$(0 \leqq r < \infty,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq \varphi < 2\pi)$ を用いて x, y, z を

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

と表せば、条件　$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$ は．　$r^2 \leqq 1$ と表され，従って

$0 \leqq r \leqq 1$ という条件におきかえられる。



$x \geqq 0$　かつ　$y \geqq 0$　という条件は

$0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ におきかえられ

$z \geqq 0$　という条件は

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$　におきかえられる

したがって V は．極座標を用いると

$$0 \leqq r \leqq 1, \quad 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$$

という条件で表現することができる．

$$dx\,dy\,dz = \underbrace{r^2\sin^2\theta}_{\text{ヤコビアン}}\,dr\,d\theta\,d\varphi$$ に注意を払うと

$$I_V = \int_V f(\mathbf{r})\,dv$$

$$= \int_0^1 dr \cdot r^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot \sin\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi\ \underbrace{r\sin\theta\cos\varphi}_{x} \cdot \underbrace{r\sin\theta\sin\varphi}_{y} \cdot \underbrace{r\cos\theta}_{z}$$

$$= \int_0^1 dr \cdot r^2 \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot \sin\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot r^3 \sin^2\theta\cos\theta\ \sin\varphi\cos\varphi$$

$$= \left\{\int_0^1 r^5\,dr\right\}\left\{\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta\right\}\left\{\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\right\}$$

$$= \left[\frac{1}{6}r^6\right]_{r=0}^{r=1} \cdot \left[\frac{1}{4}\sin^4\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \cdot \left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{48}$$

[Ⅲ]の別解　　デカルト座標のまま計算を実行すると.

$$I_V = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \cdot f(x, y, z)$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \cdot xyz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \left[\frac{1}{2} x y z^2 \right]_{z=0}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \cdot \frac{1}{2} xy (1-x^2-y^2)$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \cdot \frac{1}{2} x \left\{ (1-x^2) y - y^3 \right\}$$

$$= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} x \left\{ \frac{1}{2} (1-x^2) y^2 - \frac{1}{4} y^4 \right\} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{8} x (1-x^2)^2 dx$$

$t = 1-x^2$ とおくと. $\int_0^1 \cdots x dx = -\frac{1}{2}\int_1^0 \cdots dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \cdots dt$ なので

$$I_V = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{8} t^2 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{48}$$

[IV] 球座標では S は $r=1$, $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ で表されることに着目すると、

θ, φ をパラメータとする S の表示

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta) \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \tfrac{\pi}{2},\ 0 \leqq \varphi \leqq \tfrac{\pi}{2}\right)$$

を得る。曲面 S 上の面積分は、パラメータ θ, φ に関する二重積分として下式で表される。

$$I_S = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi\ \mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta,\varphi)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}(\theta,\varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}(\theta,\varphi)}{\partial \varphi}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}(\theta,\varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}(\theta,\varphi)}{\partial \varphi} &= (\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta) \times (-\sin\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi,\ 0) \\
&= (\sin^2\theta\cos\varphi,\ \sin^2\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)) \\
&= \sin\theta\,(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta) \\
&= \sin\theta\,(x(\theta,\varphi),\ y(\theta,\varphi),\ z(\theta,\varphi))
\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}(\mathbf{r}(\theta,\varphi)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}(\theta,\varphi)}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}(\theta,\varphi)}{\partial \varphi} \\
&= (x^2yz,\ xy^2z,\ xyz^2) \cdot \sin\theta\,(x, y, z) \\
&= \sin\theta \cdot (x^3yz + xy^3z + xyz^3) \\
&= \sin\theta \cdot xyz\,\underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{=1} \\
&= \sin\theta \cdot \underbrace{\sin\theta\cos\varphi}_{x(\theta,\varphi)} \cdot \underbrace{\sin\theta\sin\varphi}_{y(\theta,\varphi)} \cdot \underbrace{\cos\theta}_{z(\theta,\varphi)} \cdot 1 \\
&= \sin^3\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi.
\end{aligned}$$

（これらの式中の x, y, z は $x(\theta,\varphi)$, $y(\theta,\varphi)$, $z(\theta,\varphi)$ と書くべきものを略記したと考えよ）

$$\begin{aligned}
\therefore\ I_S &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \cdot \sin^3\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi \\
&= \left\{\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos\theta\, d\theta\right\} \cdot \left\{\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi\right\} \\
&= \left[\frac{1}{4}\sin^4\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \cdot \left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

[IV] の別解

$$\mathrm{div}\,\mathbb{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(x^2yz,\ xy^2z,\ xyz^2\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}x^2yz + \frac{\partial}{\partial y}xy^2z + \frac{\partial}{\partial z}xyz^2$$
$$= 2xyz + 2xyz + 2xyz$$
$$= 6xyz$$
$$= 6f(\mathbb{r}) \qquad (f(\mathbb{r}) = xyz \text{ は 問[III]のスカラー場に等しい。})$$

問[III]の3次元領域 V の表面から曲面 S を除いた部分を S' とすると
ガウスの発散定理により

$$6\int_V f(\mathbb{r})\,dv = \int_S \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S} + \int_{S'} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}$$

が成立する。 S' は xy または yz または zx 平面上にあるので
S' 上の点では x, y, z のうち 2つはゼロである。 従って
S' 上では $\mathbb{A} = (x^2yz,\ xy^2z,\ xyz^2) = (0, 0, 0)$ である。
故に右辺第2項 $\int_{S'} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}$ はゼロである。

$$\therefore\ I_S = \int_S \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S} = 6\int_V f(\mathbb{r})\,dv = 6\underbrace{I_V}_{\text{問III の答}} = 6\cdot\frac{1}{48} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore\ I_S = \frac{1}{8}$$

[V] $\Delta\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi)$

$$= \nabla\cdot\left\{\mathbb{k} f(r) + z\frac{f'(r)}{r}\mathbb{r}\right\}$$

$$= \mathbb{k}\cdot\nabla f(r) + \left(\nabla z\frac{f'(r)}{r}\right)\cdot\mathbb{r} + z\frac{f'(r)}{r}\nabla\cdot\mathbb{r}$$

$$= \mathbb{k}\cdot f'(r)\nabla r + \left\{(\nabla z)\frac{f'(r)}{r} + z\left(\nabla\frac{f'(r)}{r}\right)\right\}\cdot\mathbb{r} + z\frac{f'(r)}{r}\cdot 3$$

$$= \mathbb{k}\cdot f'(r)\frac{\mathbb{r}}{r} + \left\{\mathbb{k}\frac{f'(r)}{r} + z\left(\frac{f'(r)}{r}\right)'(\nabla r)\right\}\cdot\mathbb{r} + 3z\frac{f'(r)}{r}$$

$$= \frac{f'(r)}{r}\mathbb{k}\cdot\mathbb{r} + \left\{\mathbb{k}\frac{f'(r)}{r} + z\frac{f''(r)r - f'(r)}{r^2}\frac{\mathbb{r}}{r}\right\}\cdot\mathbb{r} + 3z\frac{f'(r)}{r}$$

$$= \frac{f'(r)}{r}z + \mathbb{k}\cdot\mathbb{r}\frac{f'(r)}{r} + z\{f''(r)r - f'(r)\}\frac{\overbrace{\mathbb{r}\cdot\mathbb{r}}^{=r^2}}{r^3} + 3z\frac{f'(r)}{r}$$

$$= z\frac{f'(r)}{r} + z\frac{f'(r)}{r} + z\{f''(r)r - f'(r)\}\frac{1}{r} + 3z\frac{f'(r)}{r}$$

$$= z\frac{f'(r)}{r} + z\frac{f'(r)}{r} + zf''(r) - z\frac{f'(r)}{r} + 3z\frac{f'(r)}{r}$$

$$= zf''(r) + 4z\frac{f'(r)}{r}$$

[チェック] $f(r) = \frac{1}{r}$ の場合は $f'(r) = -\frac{1}{r^2}$, $f''(r) = \frac{2}{r^3}$ なので

$zf''(r) + 4z\frac{f'(r)}{r} = \frac{2z}{r^3} - \frac{4z}{r^3} = -\frac{2z}{r^3}$ となる。

[別解] f, g をスカラー場として $\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2(\nabla f)\cdot(\nabla g) + f\Delta g$ が成立する。

また $\Delta f(r) = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$ という公式は既知とする。

これらを利用すると

$$\Delta(zf(r)) = (\Delta z)f + 2(\nabla z)\cdot(\nabla f(r)) + z\Delta f(r)$$

$$= 0 + 2\mathbb{k}\cdot f'(r)\frac{\mathbb{r}}{r} + z\left(f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)\right)$$

$$= 0 + 2\underbrace{\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}}_{=z}\frac{f'(r)}{r} + zf''(r) + \frac{2z}{r}f'(r)$$

$$= \frac{2z}{r}f'(r) + zf''(r) + \frac{2z}{r}f'(r)$$

$$= zf''(r) + \frac{4z}{r}f'(r)$$

[注意] 内積を表す・(ドット記号)は省略してはならない。

また、∇(ナブラ記号)はベクトルなので太字で書く($\boldsymbol{\nabla}$のように)

か、または上に矢印をのせる($\vec{\nabla}$のように)べきである。