福井大学工学部 機械工学科２年生 応用数学 III (担当教員 田嶋) 中間試験問題: 2009 年 12 月 11 日 2 限実施

各人に問題用紙１枚, 答案用紙１枚 (表裏使用), 計算用紙１枚を配布する。

答案用紙１枚のみを提出し, 問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。解答にあたっては, スカラー量とベクトル量が一目で判別できるよう, ベクトル量を表す記号は太字にするか上に矢印をのせるようにせよ。また内積や外積を表すドットやクロス記号を省略してはならない。

【1】 下記の等式 (1)〜(10) のうち任意のベクトル $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$、$\mathbf{D}$ について成り立つものに ◯ を、そうでないものに × をつけよ。理由は述べず答だけを解答用紙の解答欄に記せ。

(1) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$　(2) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{B}\times\mathbf{A}$　(3) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$

(4) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$　(5) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=0$　(6) $\mathbf{A}\times\mathbf{A}=\mathbf{0}$

(7) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$　(8) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}$

(9) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$

(10) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})=(\mathbf{A}\times\mathbf{C})\times(\mathbf{B}\times\mathbf{D})-(\mathbf{A}\times\mathbf{D})\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$

【2】 ベクトルの内積を利用して、余弦定理を証明せよ。ここで、余弦定理とは、三角形の３辺の長さを a, b, c とし、長さ a の辺と長さ b の辺の交わる角を θ とするとき、$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$ が成り立つという定理である。

【3】 3 点 $\mathrm{A}(0,-1,-1)$, $\mathrm{B}(-1,1,-1)$, $\mathrm{C}(-1,-1,2)$ について, 下記の (1)〜(6) を求めよ。

(1) $\overline{\mathrm{AB}}\ \left(=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\right)$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　(3) $\angle\mathrm{BAC}$　(4) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　(成分表示で答えよ)

(5) 三角形 ABC の面積 S　(6) 三角形 ABC に垂直な単位ベクトル $\mathbf{n}$ (成分表示で答えよ)

【4】 パラメータ表示された曲線 $\mathbf{r}=\left(\frac{3}{2}t^2,\ \sqrt{\frac{2}{3}}\,t^3,\ \frac{1}{4}t^4\right)$ の $0\le t\le 1$ に対応する部分の弧長 s を求めよ。

【5】 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ は一変数 t のベクトル関数であり, $\mathbf{B}=\mathbf{A}\exp\left(-|\mathbf{A}|^2\right)$ という関係がある。このとき $\mathbf{B}'$ を $\mathbf{A}$, $|\mathbf{A}|$, $\mathbf{A}'$ を用いて表せ。ただし, $\mathbf{A}'=\dfrac{d\mathbf{A}(t)}{dt}$, $\mathbf{B}'=\dfrac{d\mathbf{B}(t)}{dt}$ とする。

【6】 パラメータ表示で $\mathbf{r}=(t,\ \sin t,\ 0)$ と表される曲線について以下の小問 (1), (2) に答えよ。

(1) 曲率半径 ρ を t の関数として求めよ。

(2) $t=\dfrac{\pi}{2}$ に対応する点での曲率半径の中心 $\mathbf{r}_{\mathrm{c}}$ の座標を求めよ。

【ヒント】t に具体的な値を代入して計算すると、
$t=0$ で $\rho=\infty$,　$t=\frac{\pi}{6}$ で $\rho=\frac{7}{4}\sqrt{7}$,　$t=\frac{\pi}{3}$ で $\rho=\frac{5}{12}\sqrt{15}$,　$t=\frac{\pi}{2}$ で $\rho=1$
が得られる。小問 (1) で求めた ρ の表式がこれらの値を与えることを確かめれば計算ミス防止に効果的であろう。
また、解答に際しては、下記の諸式を参考にするとよい。

$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ のとき　$\mathbf{v}=d\mathbf{r}/dt$,　$\mathbf{a}=d\mathbf{v}/dt$,
$v=|\mathbf{v}|$,　$\mathbf{t}=\mathbf{v}/v$,　$\mathbf{a}_{\mathrm{n}}=\mathbf{a}-(\mathbf{t}\cdot\mathbf{a})\mathbf{t}$,　$a_{\mathrm{n}}=|\mathbf{a}_{\mathrm{n}}|$,
$\kappa=a_{\mathrm{n}}/v^2$,　$\rho=1/\kappa$,　$\mathbf{n}=\mathbf{a}_{\mathrm{n}}/a_{\mathrm{n}}$,　$\mathbf{r}_{\mathrm{c}}=\mathbf{r}+\rho\mathbf{n}$

福井大学 工学部
機械工学 2 年生

応用数学 III　中間試験　答案用紙

2009 年 12 月 11 日 2 限実施

【1】
20 点
=2×10

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

【2】
15 点

【3】
15 点

【4】
15 点

【5】
15 点

【6】は裏面に解答せよ. 20 点

学科 機械工学	学籍番号								氏名		得点	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	合計

福井大学 工学部
機械工学 2年生

応用数学III 中間試験 答案用紙

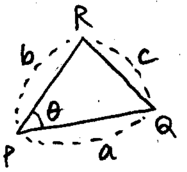
2009年12月11日2限実施

【1】 20点 =2×10

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
○	×	○	○	×	○	○	×	○	×

【2】 15点

3辺の長さが a, b, c である三角形の頂点を右図のとおり P, Q, R とする



このとき、内積の定義により、

$$\vec{PQ}\cdot\vec{PR} = \overline{PQ}\ \overline{PR}\cos\angle PQR$$

$$= ab\cos\theta \quad \cdots\text{①}$$

また、

$$c^2 = \overline{QR}^2 = |\vec{PR}-\vec{PQ}|^2 = (\vec{PR}-\vec{PQ})\cdot(\vec{PR}-\vec{PQ})$$

$$= \vec{PR}^2 - 2\vec{PQ}\cdot\vec{PR} + \vec{PQ}^2 \quad \cdots\text{②}$$

②に①を代入すると

$$c^2 = b^2 - 2ab\cos\theta + a^2$$

$\therefore\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$ が示された。

【3】 15点

$$\overline{AB} = \sqrt{5}$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 1$$

$$\angle BAC = \arccos\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = (6, 3, 2)$$

$$S = \frac{7}{2}$$

$$n = \pm\left(\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}\right)$$

【4】 15点

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (3t,\ \sqrt{6}t^2,\ t^3)$$

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{9t^2+6t^4+t^6} = \sqrt{t^2(3+t^2)^2} = 3t+t^3$$

$(\because t \geqq 0)$

$$s = \int_0^1 \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt$$

$$= \int_0^1 (3t+t^3)\,dt$$

$$= \left[\frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^4\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \quad (\text{答})$$

【5】 15点

$$\mathbb{B}' = \{\mathbb{A}\ \exp(-|\mathbb{A}|^2)\}'$$

$$= \mathbb{A}'\exp(-|\mathbb{A}|^2) + \mathbb{A}\{\exp(-|\mathbb{A}|^2)\}'$$

$$= \mathbb{A}'\exp(-|\mathbb{A}|^2) + \mathbb{A}\exp(-|\mathbb{A}|^2)(-2\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}')$$

$$= \{\mathbb{A}' - 2(\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}')\mathbb{A}\}\exp(-|\mathbb{A}|^2) \quad (\text{答})$$

【6】は裏面に解答せよ。 20点

学科	学籍番号	氏名	得点
機械工学			[1] [2] [3] [4] [5] [6] 合計

[6]（20点）

$\mathbb{r} = (x, y, z) = (t, \sin t, 0)$.

以下では (x, y) 座標のみを書くことにする。z 座標は必ずゼロである.

$v = \frac{d\mathbb{r}}{dt} = (1, \cos t)$.　　$a = \frac{d^2\mathbb{r}}{dt^2} = (0, -\sin t)$.

$$v = \sqrt{1+\cos^2 t}, \quad t = \frac{1}{v}v$$

$$a_t = a\cdot v\frac{1}{v} = \frac{-\sin t\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}$$

$$a_n = a - a_t t$$

$$= (0, -\sin t) + \frac{\sin t\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}}\frac{(1, \cos t)}{\sqrt{1+\cos^2 t}}$$

$$= \left(\frac{\sin t \cos t}{1+\cos^2 t}, \frac{\sin t\cos^2 t}{1+\cos^2 t} - \sin t\right)$$

$$= \left(\frac{\sin t\cos t}{1+\cos^2 t}, \frac{\cancel{\sin t\cos^2 t} - \sin t - \cancel{\sin t\cos^2 t}}{1+\cos^2 t}\right)$$

$$= \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}(\cos t, -1)$$

$$a_n = \frac{|\sin t|}{1+\cos^2 t}\sqrt{\cos^2 t+1} = \frac{|\sin t|}{\sqrt{1+\cos^2 t}}$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{1+\cos^2 t}{\frac{|\sin t|}{\sqrt{1+\cos^2 t}}} = \frac{(1+\cos^2 t)^{3/2}}{|\sin t|}$$

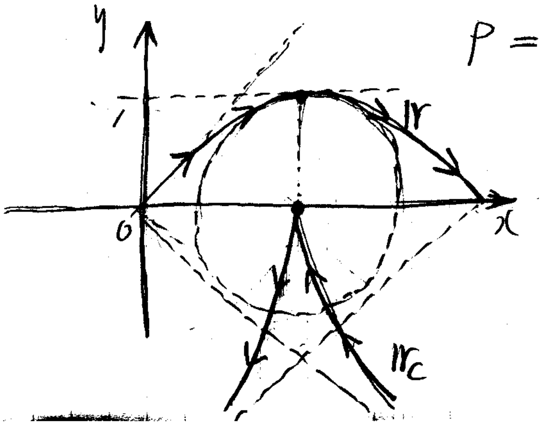
（但し $t \neq n\pi$（n は整数）のとき。$t = n\pi$ では $\rho = \infty$。）

絶対値抜けは -1 点。

$t = \frac{\pi}{2}$ で, $\mathbb{r} = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

$$n \propto a_n \propto (\cos t, -1) = (0, -1)$$

$\therefore n = (0, -1)$　（$\because n = \alpha(0, -1)$ として $|n| = 1$ を要請すると $\alpha = 1$）



$$\rho = \frac{(1+\cos^2\frac{\pi}{2})^{3/2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{(1+0)^{3/2}}{1} = 1$$ （実は問題文中に記しておいた）

$$\therefore \mathbb{r}_c = \mathbb{r} + \rho n$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}, 1\right) + 1\cdot(0, -1) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

$$\therefore \mathbb{r}_c = \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right)$$