応 用 数 学 Ⅲ　定 期 試 験 問 題

福井大学工学部機械工学科２年生対象、　担当教員 田嶋、　2009 年 1 月 30 日 2 限実施

各人に問題用紙１枚、答案用紙１枚 (B4 版 表裏使用)、計算用紙１枚を配布する。答案用紙１枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。解答にあたっては、スカラー量とベクトル量が一目で判別できるよう、ベクトル量を表す記号は太字にするか上に矢印をのせるようにせよ。スカラーのゼロとゼロベクトルとを明確に区別して書け。また内積や外積を表すドットやクロス記号を省略してはならない。
各種の場の積分定理やその他の有用な公式を覚えている場合は証明なくそれらを利用して答を求めてよい。

【I】 $\varphi = x\sin\left(yz^2\right)$、$\mathbf{A} = (xyz,\ xyz,\ xyz)$ として、以下の小問 (1)〜(6) に指定した場の微分を求め、解答用紙の解答欄に答のみを記せ。計算過程を記す必要はない。

(1) $\mathrm{grad}\,\varphi$　**(2)** $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\varphi)$　**(3)** $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$　**(4)** $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})$　**(5)** $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})$

(6) $\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{A})$

【Ⅱ】 ストークスの定理の内容を述べよ。

【Ⅲ】 ベクトル場 $\mathbf{A}$ を $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (xy,\ x+y,\ z^2)$ と定義する。また、線分 C を、座標原点 (0, 0, 0) を始点とし、点 (2, 3, 4) を終点とする線分とする。このとき、ベクトル場 $\mathbf{A}$ の線分 C に沿っての接線線積分 $I_{\mathrm{C}} = \displaystyle\int_{\mathrm{C}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ の値を計算せよ。

【Ⅳ】 スカラー場 $\varphi = \log r$ について、座標原点 (0, 0, 0) 以外の点における $\Delta\varphi$ を求めよ。ただし $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である。また Δ はラプラス演算子である。

【V】 ベクトル場 $\mathbf{A} = (xy^2,\ x^2yz,\ x^2z+y^2z)$ の、曲面 $\mathrm{S} = \left\{(x,y,z)\ \middle|\ 0 \le z \le 1,\ x^2+y^2 = (1-z)^2\right\}$ 上での法線面積分 $I_{\mathrm{S}} = \displaystyle\int_{\mathrm{S}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$ の値を求めよ。ただし、S の表裏は、
体積領域 $\mathrm{V} = \left\{(x,y,z)\ \middle|\ 0 \le z \le 1,\ x^2+y^2 \le (1-z)^2\right\}$ に接する側を裏面と定める。

応 用 数 学 Ⅲ　定 期 試 験　答 案 用 紙

福井大学工学部機械工学科 2 年生 対象、 担当教員 田嶋、 2009 年 1 月 30 日 2 限実施

【Ⅰ】5 点× 6 問=30 点

(1)	(4)
(2)	(5)
(3)	(6)

【Ⅱ】10 点

【Ⅲ】20 点

【Ⅳ】【Ⅴ】は裏面に解答せよ. 20+20 点

学科	学籍番号	氏名	得点
機械工学			(Ⅰ) (Ⅱ) (Ⅲ) (Ⅳ) (Ⅴ) 合計

応用数学 Ⅲ 定期試験 解答・解説 (2009 年 1 月 30 日実施分)

【Ⅰ】

(1)$\mathrm{grad}\,\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\,\frac{\partial\varphi}{\partial y},\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}x\sin\left(yz^2\right),\,\frac{\partial}{\partial y}x\sin\left(yz^2\right),\,\frac{\partial}{\partial z}x\sin\left(yz^2\right)\right)=\left(\sin\left(yz^2\right),\,x\frac{\partial\sin\left(yz^2\right)}{\partial y},\,x\frac{\partial\sin\left(yz^2\right)}{\partial z}\right).$

$u=yz^2$ とおくと、$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial y}{\partial y}z^2=1\cdot z^2=z^2$、$\frac{\partial u}{\partial z}=y\frac{\partial z^2}{\partial z}=y\cdot 2z=2yz$ であるから、

$\dfrac{\partial\sin\left(yz^2\right)}{\partial y}=\dfrac{d\sin\,u}{du}\cdot\dfrac{\partial\,u}{\partial y}=(\cos\,u)\,z^2=z^2\cos\left(yz^2\right)$、

$\dfrac{\partial\sin\left(yz^2\right)}{\partial z}=\dfrac{d\sin\,u}{du}\cdot\dfrac{\partial\,u}{\partial z}=(\cos\,u)\cdot 2yz=2yz\cos\left(yz^2\right).$

$\therefore\quad \mathrm{grad}\,\varphi=\left(\sin\left(yz^2\right),\,xz^2\cos\left(yz^2\right),\,2xyz\cos\left(yz^2\right)\right).$

(2) $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\varphi)=\mathrm{div}\,\left(\sin\left(yz^2\right),\,xz^2\cos\left(yz^2\right),\,2xyz\cos\left(yz^2\right)\right)=2xy\cos\left(yz^2\right)-xz^2(z^2+4y^2)\sin\left(yz^2\right)$

(3) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=(x(z-y),\,y(x-z),\,z(y-x))$

(4) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})=\mathrm{rot}\,\left(x(z-y),\,y(x-z),\,z(y-x)\right)=(y+z,\,z+x,\,x+y)$

(5) $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})=\mathrm{div}\,\left(x(z-y),\,y(x-z),\,z(y-x)\right)=z-y+x-z+y-x=0$

実は、任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})=0$ が成立する。

(6) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=yz+zx+xy.$

$\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A})=\mathrm{grad}\,(yz+zx+xy)=(y+z,\,z+x,\,x+y).$

【Ⅱ】

任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$、任意の閉曲線 C、および C を縁とする任意の曲面 S について、$\boldsymbol{A}$ の C に沿っての接線線積分の値と $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ の S 上での法線面積分の値とは等しい。ただし、右ネジを C の巻く向きに回すと S の裏側から表側へと進むように C と S を向き付けるものとする。数式で表すと、$\oint_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\mathrm{S}}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$ である。

【Ⅲ】

曲線 C は $\boldsymbol{r}=\{(x,y,z)\,|x=2t,y=3t,z=4t,0\leq t\leq 1\}$ とパラメータ表示できるので、与えられた接線線積分は、

$$I_{\mathrm{C}}=\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^1\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{r}(t)\right)\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt$$

のようにパラメータ t に関する一重の定積分としても計算することが出来る。ここで、

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{r}(t)\right)=\left(x(t)\cdot y(t),\,x(t)+y(t),\,z(t)^2\right)=\left(2t\cdot 3t,\,2t+3t,\,(4t)^2\right)=\left(6t^2,\,5t,\,16t^2\right),\qquad \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(2,\,3,\,4)$$

なので、被積分関数は、

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{r}(t)\right)\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=6t^2\cdot 2+5t\cdot 3+16t^2\cdot 4=76t^2+15t$$

である。故に、

$$I_{\mathrm{C}}=\int_0^1\left(76t^2+15t\right)dt=\frac{76}{3}+\frac{15}{2}=\frac{197}{6}$$

を得る。

【IV】

$\varphi=\log r$ は r だけに依存する関数なので、$\Delta\varphi=\left(\dfrac{d^2}{dr^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{d}{dr}\right)\log r$ が成り立つ。この式の右辺に

$\dfrac{d}{dr}\log r=\dfrac{1}{r}$ および $\dfrac{d^2}{dr^2}\log r=\dfrac{d}{dr}\dfrac{1}{r}=-\dfrac{1}{r^2}$ を代入すると、$\Delta\varphi=-\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{1}{r}=-\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{2}{r^2}\ =\dfrac{1}{r^2}$ を得る。

【V】

解法 I:

平面分 S_0 を、$\mathrm{S}_0=\left\{(x,y,0)\,\middle|\,x^2+y^2\leq 1,\ \ z=0\right\}$ と定義する。S_0 の表裏は、領域 V に接する側を裏面と定める。このとき、$I_{\mathrm{V}}=\displaystyle\int_{\mathrm{V}}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\,d^3r,\ I_{\mathrm{S}_0}=\int_{\mathrm{S}_0}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$ とすると、ガウスの発散定理により、$I_{\mathrm{V}}=I_{\mathrm{S}}+I_{\mathrm{S}_0}$ が成立する。

S_0 上では、 $d\boldsymbol{S}$ は z 軸の負の方向を向くが、$\boldsymbol{A}$ の z 成分はゼロなので $\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=0$ となり、$I_{\mathrm{S}_0}=0$ である。したがって、$I_{\mathrm{S}}=I_{\mathrm{V}}$ であり、I_{S} の代わりに I_{V} を計算することによっても求めるべき値を得ることができる。領域 V は z 軸に関して軸対称な形状をしているので、円柱座標による扱いが適している。円柱座標を用いて V を表すと、

$\mathrm{V}=\{(x,y,z)\,|\,x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi,\ \ 0\leq\varphi\leq 2\pi,\ \ 0\leq z\leq 1,\ \ 0\leq\rho\leq 1-z\}$ である。また、$\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ は、

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}\ =\ \frac{\partial}{\partial x}xy^2+\frac{\partial}{\partial y}x^2yz+\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2z+y^2z\right)\ =\ y^2+x^2z+x^2+y^2=x^2(z+1)+2y^2$$

である. これを円柱座標 ρ,φ,z で表すには $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$ を代入すればよく、

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=(\rho\cos\varphi)^2\ (z+1)+2\,(\rho\sin\varphi)^2=(\rho\cos\varphi)^2\ (z+1)+2\rho^2\left(1-\cos^2\varphi\right)=\rho^2\left\{(z-1)\cos^2\varphi+2\right\}$$

である. 円柱座標のヤコビアンが ρ であること (即ち、$d^3r\ =\ \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$) に注意を払うと、

$$I_{\mathrm{V}}=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{1-z}d\rho\cdot\rho\cdot\rho^2\left\{(z-1)\cos^2\varphi+2\right\}=\int_0^1 dz\left\{(z-1)\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi+2\int_0^{2\pi}d\varphi\right\}\left\{\int_0^{1-z}\rho^3d\rho\right\}$$
$$=\int_0^1 dz\frac{1}{4}\,(1-z)^4\left\{(z-1)\pi+4\pi\right\}=\frac{\pi}{4}\int_0^1(1-z)^4\,(z+3)dz.$$

計算を容易にするためには例えば $z'=1-z$ とおいて置換積分すればよい. 即ち、$\displaystyle\int_0^1 dz\cdots=\int_0^1 dz'\cdots$ なので、

$$I_{\mathrm{V}}=\frac{\pi}{4}\int_0^1 dz'z'^4(4-z')=\frac{\pi}{4}\int_0^1(4z'^4-z'^5)dz'=\frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{19\pi}{120}\ \cdots\ (\text{答}).$$

解法 II: 計算練習のため面積分のまま計算を実行してみよう。デカルト座標と円柱座標の関係式 $(x,y,z)=(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)$ において、$\rho=1-z$ とし、z を v で、φ を u で置き換えると、曲面 S のパラメータ表示として下記のものを得る。

$$\mathrm{S}=\{\boldsymbol{r}\mid\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=((1-v)\cos u,\ (1-v)\sin u,\ v)\,,\ 0\leq v\leq 1,\ 0\leq u\leq 2\pi\}.$$

$$\therefore I_{\mathrm{S}}=\int_0^1 dv\int_0^{2\pi}du\,\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{r}\left(u,v\right)\right)\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right).$$

ここで、$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{r}\left(u,v\right)\right)=\Big((1-v)^3\cos u\sin^2u,\ v\,(1-v)^3\cos^2u\sin u,\ v\,(1-v)^2\Big).$

また、$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}=(1-v)\left(-\sin u,\ \cos u,\ 0\right)\times\left(-\cos u,\ -\sin u,\ 1\right)=(1-v)\left(\cos u,\ \sin u,\ 1\right).$

このベクトルは正しく表側を向いている。（もし裏向きなら、-1 倍して表向きに変えておかねばならない。）

$$\therefore I_{\mathrm{S}}=\int_0^1 dv\int_0^{2\pi}du\left\{(1-v)^4\cos^2u\sin^2u+v\,(1-v)^4\cos^2u\sin^2u+v\,(1-v)^3\right\}.$$

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2u\,\sin^2u\,du=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2u\,du=\frac{\pi}{4},\ \int_0^{2\pi}du=2\pi$ を用いると、

$$I_{\mathrm{S}}=\int_0^1 dv\left\{(1-v)^4\,\frac{\pi}{4}+v\,(1-v)^4\,\frac{\pi}{4}+v\,(1-v)^3\,2\pi\right\}=\frac{\pi}{4}\int_0^1 dv\left\{(1-v)^4\,(1+v)+8v\,(1-v)^3\right\}.$$

$v'=1-v$ とおいて置換積分すると、$\displaystyle\int_0^1 dv\cdots=\int_0^1 dv'\cdots$ なので、

$$I_{\mathrm{S}}=\frac{\pi}{4}\int_0^1 dv'\left\{v'^4(2-v')+8(1-v')v'^3\right\}=\frac{\pi}{4}\int_0^1 dv'\left(-6v'^4-v'^5+8v'^3\right)=\frac{\pi}{4}\left(-\frac{6}{5}-\frac{1}{6}+\frac{8}{4}\right)=\frac{19\pi}{120}\ \cdots\ (\text{答}).$$