福井大学工学部 機械工学科２年生 応用数学 III (担当教員 田嶋) 中間試験問題: 2008 年 12 月 5 日 3 限実施

各人に問題用紙１枚, 答案用紙１枚 (表裏使用), 計算用紙１枚を配布する。

答案用紙１枚のみを提出し, 問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。解答にあたっては, スカラー量とベクトル量が一目で判別できるよう, ベクトル量を表す記号は太字にするか上に矢印をのせるようにせよ。また内積や外積を表すドットやクロス記号を省略してはならない。

【1】 直交座標系 (右手系とする) の x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ とするとき, 下記の式 (1)〜(5) は, (ア)〜(キ) のどれと等しいか, (ア)〜(キ) の記号で答えよ。

(1) $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$　(2) $\mathbf{k}\times\mathbf{j}$　(3) $\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{k})$　(4) $\mathbf{i}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{j})$　(5) $(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times(\mathbf{j}\times\mathbf{k})$

(ア) $\mathbf{i}$　(イ) $\mathbf{j}$　(ウ) $\mathbf{k}$　(エ) $-\mathbf{i}$　(オ) $-\mathbf{j}$　(カ) $-\mathbf{k}$　(キ） $\mathbf{0}$

【2】 (1) 下記の文章を証明として意味のあるものとして完成させるために最も適切な数式で $\boxed{ア}$〜$\boxed{ク}$ を埋めよ。等式が成立するというだけではだめで, 証明として無意味な式の変形ができてはいけない。

パラメータ表示された曲線 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$ について考える。ただし, $\mathbf{t}=\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ で定義されるベクトル $\mathbf{t}$ が曲線上の全ての点で $|\mathbf{t}|=1$ を満たすものとする。このとき, Frenet-Serret の公式が成立することを示そう。
まず $\mathbf{v}_1$ および κ を $\mathbf{v}_1=\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$, $\kappa=|\mathbf{v}_1|$ で定義する。ここでは $\kappa=0$ の場合は考えないことにし, $\mathbf{n}$ を $\mathbf{n}=\dfrac{\mathbf{v}_1}{\kappa}$ で定義する。$|\mathbf{n}|=1$ は自明である。$\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}=0$ は $\mathbf{t}^2=1$ の両辺を s で微分することで以下の通り示せる。

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{t}\cdot\mathbf{t})=\boxed{ア}\cdot\mathbf{t}+\mathbf{t}\cdot\boxed{ア}=2\mathbf{t}\cdot\boxed{ア}=2\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}_1=2\kappa\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}.$$ これが $\dfrac{d}{ds}1=0$ に等しいので $\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}=0$.

同様に, $\mathbf{v}_2$ を $\mathbf{v}_2=\dfrac{d\mathbf{n}}{ds}$ で定義すると, $\mathbf{n}^2=1$ から $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_2=0$ が導ける。
次に $\mathbf{b}$ を $\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}$ で定義する。$\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ が直交する単位ベクトルであることを使って,
$|\mathbf{b}|=\boxed{イ}$,　$\mathbf{b}\cdot\mathbf{t}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}=\boxed{ウ}$,　$\mathbf{n}=\mathbf{b}\times\mathbf{t}$,　$\mathbf{t}=\mathbf{n}\times\mathbf{b}$　が容易に示せる。(→ 問 (2))
更に $\mathbf{v}_3=\dfrac{d\mathbf{b}}{ds}$ として, τ を $\tau=-\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{n}$ で定義する。このとき $\mathbf{v}_3=-\tau\mathbf{n}$ が以下のとおり示せる。

$$\mathbf{v}_3=\frac{d}{ds}(\mathbf{t}\times\mathbf{n})=\boxed{ア}\times\mathbf{n}+\mathbf{t}\times\boxed{エ}=\mathbf{v}_1\times\mathbf{n}+\mathbf{t}\times\mathbf{v}_2=\kappa\mathbf{n}\times\mathbf{n}+\mathbf{t}\times\mathbf{v}_2=\kappa\mathbf{0}+\mathbf{t}\times\mathbf{v}_2=\mathbf{t}\times\mathbf{v}_2.$$

$\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}$ は直交する３本の単位ベクトルであるので, １次独立であり, $\mathbf{v}_3$ がどのようなベクトルであっても $\mathbf{v}_3=\alpha\mathbf{t}+\beta\mathbf{n}+\gamma\mathbf{b}$ を成立させる係数 α,β,γ が必ず存在するはずである。この等式の両辺と $\mathbf{t}$ との内積をとると $\alpha=\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{t}=(\mathbf{t}\times\mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{t}=\boxed{\quad オ\quad}=\mathbf{0}\cdot\mathbf{v}_2=0.$ 両辺と $\mathbf{b}$ との内積をとると $\gamma=\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{b}=(\mathbf{t}\times\mathbf{v}_2)\cdot(\mathbf{t}\times\mathbf{n})=(\boxed{カ})(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{n})-(\boxed{キ})(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{t})=1\cdot 0-0\cdot(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{t})=0.$
したがって $\alpha=\gamma=0$ であるから $\mathbf{v}_3=\beta\mathbf{n}$.　この等式の両辺と $\mathbf{n}$ との内積をとると $\beta=\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{n}=-\tau$.

最後に $\mathbf{v}_2=-\kappa\mathbf{t}+\tau\mathbf{b}$ が成立することが以下のようにして示せる。

$$\mathbf{v}_2=\frac{d\mathbf{n}}{ds}=\boxed{\quad ク\quad}=\frac{d\mathbf{b}}{ds}\times\mathbf{t}+\mathbf{b}\times\frac{d\mathbf{t}}{ds}=-\tau\mathbf{n}\times\mathbf{t}+\mathbf{b}\times\kappa\mathbf{n}=-\tau(-\mathbf{b})+\kappa(-\mathbf{t})=\tau\mathbf{b}-\kappa\mathbf{t}.$$

これで Frenet-Serret の公式が証明できた。即ち $|\mathbf{t}|=1$ を満たす１変数３次元ベクトル関数 $\mathbf{t}(s)$ は $|d\mathbf{t}/ds|\neq 0$ である点で,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \kappa\mathbf{n} \quad (\kappa>0,\ |\mathbf{n}|=1,\ \mathbf{t}\cdot\mathbf{n}=0)\\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\tau\mathbf{n} \quad (\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n})\\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -\kappa\mathbf{t}+\tau\mathbf{b}\end{aligned}$$

(2) $|\mathbf{t}|=|\mathbf{n}|=1$,　$\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}=0$,　$\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}$　を使って, $\mathbf{n}=\mathbf{b}\times\mathbf{t}$ および $\mathbf{t}=\mathbf{n}\times\mathbf{b}$ を導け。

【3】 3 点 $A(1,1,0)$, $B(2,2,1)$, $C(0,0,1)$ について, 下記の (1)〜(6) を求めよ。

(1) $\overline{\mathrm{AB}}\ \left(= |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\right)$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(3) $\angle\mathrm{BAC}$

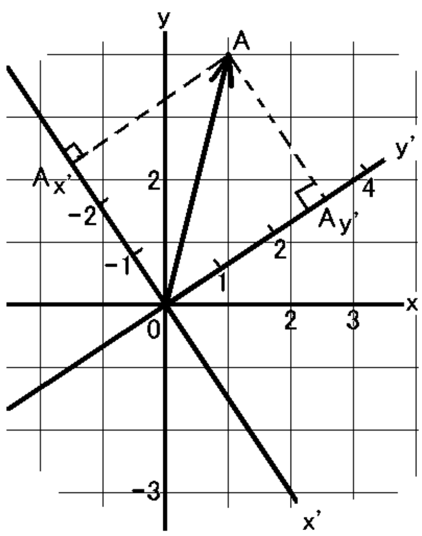
(4) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ 　　(成分表示で答えよ)

(5) 三角形 ABC の面積 S

(6) 三角形 ABC に垂直な単位ベクトル $\mathbf{n}$ (成分表示で答えよ)

【4】 右図において, 座標軸 x', y' は, 座標軸 x, y を時計回りに $\arctan\dfrac{3}{2}$ ラジアン回転させて得られたものである。図の平面内にあるベクトル $\mathbf{A}$ の x, y 成分は $A_x = 1, A_y = 4$ である。このとき ベクトル $\mathbf{A}$ の x' 成分 $A_{x'}$ および y' 成分 $A_{y'}$ を求めよ。

なお, どのような解法によるものでも正答には満点を与えるが, なるべく 座標軸方向の単位ベクトル を利用して求めてもらいたい。



【5】 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ は一変数 t のベクトル関数であり, $\mathbf{B} = \mathbf{A}\,|\mathbf{A}|^3$ という関係がある。このとき $\mathbf{B}'$ を $\mathbf{A}$, $|\mathbf{A}|$, $\mathbf{A}'$ を用いて表せ。ただし, $\mathbf{A}' = \dfrac{d\mathbf{A}(t)}{dt}$, $\mathbf{B}' = \dfrac{d\mathbf{B}(t)}{dt}$ とする。

【6】 パラメータ表示された曲線 $\mathbf{r} = \left(\cos t,\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}\sin t,\ \sin^2\dfrac{t}{2}\right)$ の $0 \le t \le 2\pi$ に対応する部分の弧長 s を求めよ。

福井大学 工学部
機械工学 2 年生

応用数学 III　中間試験　答案用紙

2008 年 12 月 5 日 3 限実施

【1】
10 点
=2×5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

【2】(1)
20 点
=2×8
+2×2

ア	イ	ウ	エ
オ	カ	キ	ク

(2) $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$ の証明

$\mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}$ の証明

【3】
20 点
=3+3+3
+3+4+4

【4】
20 点

【5】,【6】は裏面に解答せよ. 15 点,15 点

学科	学籍番号	氏名
機械工学		

得点	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	合計

応用数学 III 2008 年度中間試験の解答・解説)

【1】

基本ベクトル（座標軸方向の単位ベクトル）同士の外積

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\qquad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$$

および任意の 2 本のベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ について

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$$

が成立すること（外積の反交換則）だけを使って値を求めることができる。なお、反交換則から導出できる「任意のベクトル $\mathbf{a}$ が $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$ を満たすこと」も念頭に置く必要がある。

(1) $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$ (答: ウ)

(2) $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-(\mathbf{j}\times\mathbf{k})=-\mathbf{i}$ (答: エ)

(3) $\mathbf{i}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{k})=\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{0}$ (答: キ)

(4) $\mathbf{i}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{j})=\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-(\mathbf{k}\times\mathbf{i})=-\mathbf{j}$ (答: オ)

(5) $(\mathbf{i}\times\mathbf{j})\times(\mathbf{j}\times\mathbf{k})=\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$ (答: イ)

【2】

(1)

ア : $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$

イ : 1

ウ : 0

エ : $\dfrac{d\mathbf{n}}{ds}$

オ : $(\mathbf{t}\times\mathbf{t})\cdot\mathbf{v}_2$

カ : $\mathbf{t}\cdot\mathbf{t}$

キ : $\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}$

ク : $\dfrac{d}{ds}(\mathbf{b}\times\mathbf{t})$

【注】カ、キに答えるには、授業で証明した恒等式

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$

を利用した。

(2)

任意の 3 本のベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ のベクトル三重積について

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a}$$

が成り立つ。この公式を利用して求める。

$\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}$ の両辺と $\mathbf{t}$ との外積をとると、

$\mathbf{b}\times\mathbf{t}=(\mathbf{t}\times\mathbf{n})\times\mathbf{t}=(\mathbf{t}\cdot\mathbf{t})\,\mathbf{n}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{t})\,\mathbf{t}=\mathbf{n}.$

$\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}$ の両辺と $\mathbf{n}$ との外積をとると、

$\mathbf{n}\times\mathbf{b}=\mathbf{n}\times(\mathbf{t}\times\mathbf{n})=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{t}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{t})\,\mathbf{n}=\mathbf{t}.$

【3】以下では 座標原点 (0,0,0) を O と表す。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,2,1)-(1,1,0)=(1,1,1).$

$\overline{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|(1,1,1)|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}.$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,0,1)-(1,1,0)=(-1,-1,1).$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,1,1)\cdot(-1,-1,1)$

$=1\cdot(-1)+1\cdot(-1)+1\cdot 1=-1-1+1=-1.$

$\therefore\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-1$

(3) $\overline{\mathrm{AC}}=|(-1,-1,1)|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}.$

$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}}=\dfrac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{3}.$

$\therefore\ \angle\mathrm{BAC}=\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

【注】逆三角関数に関する恒等式の

$$\arcsin x+\arcsin(-x)=0,$$
$$\arccos x+\arccos(-x)=\pi,$$
$$\arcsin x+\arccos x=\tfrac{\pi}{2},$$

等を利用すると答は下記のようにも表せる.

$$\angle\mathrm{BAC}=\pi-\arccos\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{3}.$$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,1,1)\times(-1,-1,1)$

$=\big(1\cdot1-1\cdot(-1),\ 1\cdot(-1)-1\cdot1,\ 1\cdot(-1)-1\cdot(-1)\big)$

$=(1+1,\ -1-1,\ -1+1)=(2,\ -2,\ 0).$

$\therefore\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ -2,\ 0)$

(5) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|(2,\ -2,\ 0)|=2|(1,\ -1,\ 0)|$

$=2\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=2\sqrt{2}.$

$\therefore\ S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{2}$

(6) $\mathbf{n}=\pm\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(2,\ -2,\ 0).$

$\therefore\mathbf{n}=\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

【4】

$\mathbf{p}=(2,-3)$, $\mathbf{q}=(3,2)$ とおくと、x', y' 軸方向の単位ベクトル $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ は、

$$\mathbf{i}'=\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}=\frac{1}{\sqrt{13}}(2,-3),\qquad \mathbf{j}'=\frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}=\frac{1}{\sqrt{13}}(3,2).$$

直交座標では各座標成分は座標軸方向の単位ベクトルとの内積として計算できる。内積は座標軸の取り方に依らない量であるから、計算に都合のよい座標系で計算すればよい。内積をもとの座標系での成分を用いて計算すると下記の答を得る。

$$A_{x'} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{i}' = (1,4)\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}(2,-3) = -\frac{10}{\sqrt{13}},$$
$$A_{y'} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{j}' = (1,4)\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}(3,2) = \frac{11}{\sqrt{13}}.$$

【5】

関数の積の微分公式を利用して、

$\mathbf{B}' = \left(\mathbf{A}|\mathbf{A}|^3\right)' = \mathbf{A}'|\mathbf{A}|^3 + \mathbf{A}\left(|\mathbf{A}|^3\right)'.$

上式の右辺に現れた $\left(|\mathbf{A}|^3\right)'$ を求めるには、

$u = |\mathbf{A}|$ とおき、合成関数の微分公式を利用して、

$\left(|\mathbf{A}|^3\right)' = \dfrac{du^3}{dt} = \left(\dfrac{d}{du}u^3\right)\dfrac{du}{dt}$

$= 3u^2\dfrac{du}{dt} = 3|\mathbf{A}|^2|\mathbf{A}|'.$

上式の右辺に現れた $|\mathbf{A}|'$ を求めるには、

$v = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$ とおき、$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = v^{1/2}$ に着目して、

やはり合成関数の微分公式を利用して、

$|\mathbf{A}|' = \left(v^{1/2}\right)' = \left(\dfrac{d}{dv}v^{1/2}\right)\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{2}v^{-1/2}\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\right)'$

$= \dfrac{1}{2}\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\right)^{-1/2}\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\right)' = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\left(\mathbf{A}'\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}'\right)$

$= \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{|\mathbf{A}|}2\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}' = \dfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}'}{|\mathbf{A}|}.$

但し、上式で $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})'$ を計算する際に、

ベクトル関数の内積の微分公式

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})' = \mathbf{F}'\cdot\mathbf{G} + \mathbf{F}\cdot\mathbf{G}'$$

を利用した。

$\therefore\ \mathbf{B}' = \mathbf{A}'|\mathbf{A}|^3 + \mathbf{A}\left(3|\mathbf{A}|^2\right)\dfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}'}{|\mathbf{A}|}$

$\qquad = |\mathbf{A}|^3\mathbf{A}' + 3\,|\mathbf{A}|\,\left(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}'\right)\mathbf{A}$

【6】

$\mathbf{r} = \left(\cos t,\ \ \dfrac{\sqrt{5}}{2}\sin t,\ \ \sin^2\dfrac{t}{2}\right),$

$\left(\sin^2\dfrac{t}{2}\right)' = 2\left(\sin\dfrac{t}{2}\right)\left(\cos\dfrac{t}{2}\right)\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\sin t$ を使って、

$\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(-\sin\ t,\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}\cos\ t,\ \dfrac{1}{2}\sin\ t\right),$

$\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\sin^2 t + \dfrac{5}{4}\cos^2 t + \dfrac{1}{4}\sin^2 t}$

$\qquad = \sqrt{\dfrac{5}{4}\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}.$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ なので $\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}.$

$s = \displaystyle\int_0^{2\pi}\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|dt = \int_0^{2\pi}\dfrac{\sqrt{5}}{2}dt = \dfrac{\sqrt{5}}{2}\left[t\right]_0^{2\pi}$

$\ = \dfrac{\sqrt{5}}{2}2\pi = \sqrt{5}\pi$ (答)