福井大学工学部機械工学科２年生対象授業

応用数学 III　(内容：ベクトル解析)

2007 年度後期 配布資料　　(担当教員 田嶋直樹)

p.1〜9 は重要事項のまとめです。ただし、p.8〜9 は内容を削り過ぎた感があるので、来年度以降増補する予定です。
p.10〜13 は計算が比較的長い例題の問題と解法です。手書き原稿をスキャンしたものです。もっと例題が欲しい場合は、やはり WEB 公開している過去の定期試験問題 (解答付き) を御利用ください。

応用数学 III 講義配布資料 (1)

【 講義内容 】

応用数学 III 講義配布資料 (2)

【 1.1 ベクトルとは 】

1. 定義

- ベクトル：大きさ と 方向 を持つ量.
- スカラー：大きさ だけを持つ量.

【補足】 方向 (direction) と 向き (sense)

2. 例

- ベクトル ： 変位，速度，加速度，力，
  角速度，$\cdots$
- スカラー ： 質量，電荷，温度，$\cdots$

【補足】 「大きさ」と「長さ」

【補足】 方向の意味 と ベクトル等式の回転不変性

3. 記法

A がベクトル量であることが，ひと目でわかるように工夫する習慣が広くゆきわたっている.

i) 太字 (bold face) にする． $\cdots$ $\boldsymbol{A}$ 　手書きの例 : $\mathbb{A}$

i′) 太字化を指示する校正記号． $\cdots$ A

ii) 上に矢印をのせる． $\cdots$ $\vec{A}$

【補足】 点 A から点 B に向かう有向線分は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書く.
ちなみに $\overline{\mathrm{AB}}$ は AB 間の距離を表す.

4. 相等 ： $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$

$\Leftrightarrow$ 大きさが等しく かつ 方向が等しい

【補足】 束縛ベクトル ($\leftrightarrow$ 「自由ベクトル」)

5. 大きさ ： $|\boldsymbol{A}|$ で表す.

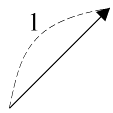
6. 零ベクトル ： $|\mathbf{0}| = 0$

方向を持たない が，ベクトルに含める.

($\rightarrow$ 定義 1 と 4 の修正)

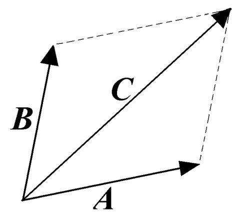
7. 単位ベクトル ：

大きさが 1 のベクトル．種々の計算で役立つ.



8. 加法

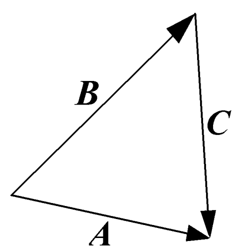
$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$



- $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ 　(交換則)
- $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$ 　(結合則)

9. 減法

$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ ：$\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ を満たすもの

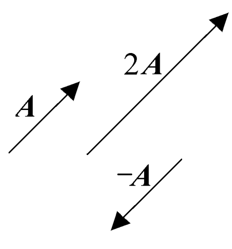


10. スカラー乗法

$\boldsymbol{B} = a\boldsymbol{A}$ ： 大きさを $|a|$ 倍し，

$a < 0$ なら向きを逆転.

- $(a + b)\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{A}$ 　(分配則)
- $a(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = a\boldsymbol{A} + a\boldsymbol{B}$ 　(分配則)
- $a(b\boldsymbol{A}) = (ab)\boldsymbol{A}$ 　(結合則)

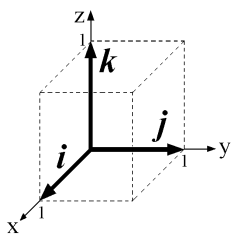


応用数学 III 講義配布資料 (3)

【 1.2 ベクトルの成分表示 】

1. 基本ベクトル　$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$　または $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$

座標軸方向の
単位ベクトル



$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

【補足】 簡易記法

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

2. ベクトルの大きさ

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

3. 加法・減法・スカラー乗法

- $\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = (A_x \pm B_x, A_y \pm B_y, A_z \pm B_z)$
- $a\boldsymbol{A} = (aA_x, aA_y, aA_z)$

4. 方向余弦

$\boldsymbol{A}$ と同じ方向をもつ単位ベクトルを,

$\hat{\boldsymbol{A}}$ という記号で表すことが多い.

- $\hat{\boldsymbol{A}} = \dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \left(\dfrac{A_x}{|\boldsymbol{A}|}, \dfrac{A_y}{|\boldsymbol{A}|}, \dfrac{A_z}{|\boldsymbol{A}|}\right)$

$\boldsymbol{A}$ と x, y, z 軸とのなす角を α, β, γ

とすると下記の関係が成り立つ.

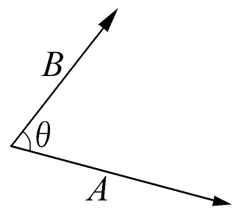
- $\hat{\boldsymbol{A}} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$
- $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$\hat{\boldsymbol{A}}$ の 3 成分を $\boldsymbol{A}$ の方向余弦とよぶ.

【 1.3 ベクトルの内積 】

1. 幾何学的定義

- $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$



外積との区別のため, $\cdot$ を省略してはいけない.

ただし $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$ だけは $\boldsymbol{A}^2$ と書いてよい.

【補足】 正射影との関係

2. ベクトルの大きさとの関係

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$$

3. 内積の性質

- $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ (交換則)
- $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$ (分配則)
- $\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}$ (分配則)
- $(c\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B} = c(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ (結合則)

【注】 $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$ という式はない.

4. 内積の成分表示

- $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

5. 交角の求め方

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

【注】 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$ とする)

6. 基本ベクトルとの内積として成分が求まる

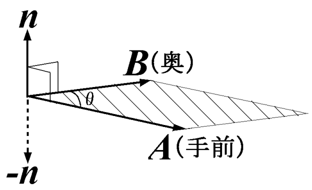
- $A_x = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}$, $A_y = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}$, $A_z = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}$
- $A_{x'} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}'$, $A_{y'} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}'$, $A_{z'} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}'$

応用数学 III 講義配布資料 (4)

【 1.4 ベクトルの外積 】

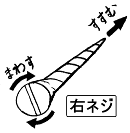
1. 幾何的定義

- $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (\,|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta\,)\,\boldsymbol{n}$



θ : $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の交角 $(0 \le \theta \le \pi)$

$\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{A}$ にも $\boldsymbol{B}$ にも垂直な単位ベクトルで, 180° 以内の回転で $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{B}$ に重ねようとするとき、その回転で右ネジの進む向きのもの



【補足】 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$ は、$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ の張る平行四辺形の面積。

【補足】 $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$
$\boldsymbol{A}\parallel\boldsymbol{B} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$

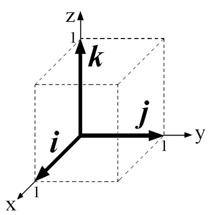
【補足】 内積をスカラー積、
外積をベクトル積 とも呼ぶ。

2. 外積の性質

1. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ (反交換する)
2. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$
3. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$
4. $\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B}$
5. $(c\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\times(c\boldsymbol{B}) = c(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

3. 基本ベクトル間の外積

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j} \end{cases}$$



【補足】 他の組み合わせは、
$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$、
$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$

4. 外積の成分表示

$\boldsymbol{A}=(A_x,A_y,A_z)$, $\boldsymbol{B}=(B_x,B_y,B_z)$ のとき、

- $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} =$

$(A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x)$

5. 応用例： 三角形の面積と法線単位ベクトル

3 点 P, Q, R を頂点とする三角形の

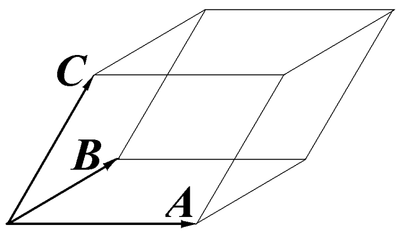
面積 は　$S = \frac{1}{2}|\,\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}\,|$

法線単位ベクトルは　$\boldsymbol{n} = \pm\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}}{|\,\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\times\overrightarrow{\mathrm{PR}}\,|}$

【 1.5　3 つのベクトルの積 】

1. スカラー三重積

- $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$



$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ を 3 稜とする平行六面体の体積 (またはその -1 倍) に等しい。

2. ベクトル三重積

- $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$
- $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$

【補足】 外積には結合則が成立しないので (一般には $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \neq (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ なので)、ベクトル三重積に現れるカッコを省略してはならない。

応用数学 III 講義配布資料 (5)

【2. １変数ベクトル関数の微分と積分 】

ベクトル関数

$$\begin{cases} f = f(t) : f \text{ は } t \text{ の (スカラー) 関数} \\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t) : \boldsymbol{A} \text{ は } t \text{ のベクトル関数} \end{cases}$$

「各成分が t の関数であるベクトル」
と言うこともできる:

$$\boldsymbol{A} = A_x(t)\,\boldsymbol{i} + A_y(t)\,\boldsymbol{j} + A_z(t)\,\boldsymbol{k}$$

ベクトル関数の微分

$$\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t) - \boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}$$

各成分を微分すればよい:

$$\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt} = \left(\frac{dA_x(t)}{dt}, \frac{dA_y(t)}{dt}, \frac{dA_z(t)}{dt}\right)$$

ベクトル関数の高階微分

$$\frac{d^n\boldsymbol{A}(t)}{dt^n} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}\boldsymbol{A}(t)}{dt^{n-1}}\right)$$

各成分を n 階微分すればよい:

$$\frac{d^n\boldsymbol{A}(t)}{dt^n} = \left(\frac{d^nA_x(t)}{dt^n}, \frac{d^nA_y(t)}{dt^n}, \frac{d^nA_z(t)}{dt^n}\right)$$

ベクトル関数の微分公式

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t)$、$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(t)$、$m = m(t)$
のとき下記の等式が成り立つ。

和の公式

1. $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt} \pm \dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}$

積の公式

2. $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}$
3. $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}$
4. $\dfrac{d}{dt}(m\boldsymbol{A}) = \dfrac{dm}{dt}\boldsymbol{A} + m\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}$

ベクトル関数の積分

不定積分は微分の逆操作:

$$\frac{d\boldsymbol{B}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}(t) \Leftrightarrow \boldsymbol{B}(t) = \int \boldsymbol{A}(t)\,dt + \boldsymbol{C}$$

【注】積分定数もベクトルになる。
各成分を積分すればよい。不定積分は：

$$\int \boldsymbol{A}(t)dt = \left(\int A_x(t)dt, \int A_y(t)dt, \int A_z(t)dt\right)$$

定積分は：

$$\int_a^b \boldsymbol{A}(t)dt = \left(\int_a^b A_x(t)dt, \int_a^b A_y(t)dt, \int_a^b A_z(t)dt\right)$$

ベクトル関数の積分公式

和の公式

1. $\displaystyle\int \{\boldsymbol{A}(t) \pm \boldsymbol{B}(t)\}\,dt = \int \boldsymbol{A}(t)\,dt \pm \int \boldsymbol{B}(t)\,dt$

定数 (k) 倍・定ベクトル $(\boldsymbol{K})$ 倍の公式

2. $\displaystyle\int k\boldsymbol{A}(t)\,dt = k\int \boldsymbol{A}(t)\,dt$
3. $\displaystyle\int \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{A}(t)\,dt = \boldsymbol{K} \cdot \int \boldsymbol{A}(t)\,dt$
4. $\displaystyle\int \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{A}(t)\,dt = \boldsymbol{K} \times \int \boldsymbol{A}(t)\,dt$

部分積分公式

$f = f(t), \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t), \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(t)$,
$f' = \dfrac{df}{dt}, \boldsymbol{A}' = \dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}, \boldsymbol{B}' = \dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}$ とすると

5. $\displaystyle\int f\boldsymbol{A}'dt = f\boldsymbol{A} - \int f'\boldsymbol{A}dt$
   $\displaystyle\int f'\boldsymbol{A}dt = f\boldsymbol{A} - \int f\boldsymbol{A}'dt$
6. $\displaystyle\int \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}'dt = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} - \int \boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{B}dt$
   $\displaystyle\int \boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{B}dt = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} - \int \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}'dt$
7. $\displaystyle\int \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}'dt = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} - \int \boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{B}dt$
   $\displaystyle\int \boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{B}dt = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} - \int \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}'dt$

応用数学 III 講義配布資料 (6)

【 3.1 点の運動とその軌跡 】

1. 点の位置・速度・加速度

数学的には、時刻 t を変数とする 1 変数ベクトル関数および その 1 階微分、 2 階微分である。

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$: 位置 (position), $|\boldsymbol{r}|$ は動径 (radius)

$\boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$: 速度 (velocity)

$\boldsymbol{a} = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$: 加速度 (acceleration)

2. 接線方向と主法線方向の成分への分解

$v = |\boldsymbol{v}|, \quad (v \geq 0)$: 速度の大きさ (speed)

【注】高等学校の物理では、velocity を「速度」、speed を「速さ」と訳し分ける決まりでした。

$\boldsymbol{t} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{v}, \quad (|\boldsymbol{t}| = 1)$: 接線単位ベクトル (tangential unit vector)

【注】$\boldsymbol{t}$ は tangential line (接線) から、t は time (時刻) から。$|\boldsymbol{t}|$ と t は別の物。

$a_{\rm t} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{t}$: 加速度の接線成分 (tangential component)

$\boldsymbol{a}_{\rm n} = \boldsymbol{a} - a_{\rm t}\boldsymbol{t}$

$a_{\rm n} = |\boldsymbol{a}_{\rm n}|, \quad (a_{\rm n} \geq 0)$: 加速度の法線 (normal) 成分

$\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{a}_{\rm n}}{a_{\rm n}}, \quad (|\boldsymbol{n}| = 1)$: 主法線単位ベクトル (principal normal unit vector)

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n}, \quad (|\boldsymbol{b}| = 1)$: 従法線 (binormal) 単位ベクトル

3. 下記の等式が成立する

$$a_{\rm t} = \frac{dv}{dt}$$

(演習問題) 上式が成立することを示せ。

4. $a_{\rm n}$ は v と軌跡の形だけで決まる

$$a_{\rm n} = \kappa v^2 = \frac{v^2}{\rho}$$

κ : 曲率 (curvature)

ρ : 曲率半径 (radius of curvature)

$\boldsymbol{r}_{\rm c} = \boldsymbol{r} + \rho\boldsymbol{n}$: 曲率中心 (center of curvature)

【3.2 空間曲線】

1. 曲線のパラメータ表示

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad a \leq t \leq b$$

2. 弧長 (曲線の長さ)

$$\overset{\frown}{\rm AB} = \int_a^b \left| \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} \right| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2} dt$$

補足 1. 弧長による $\boldsymbol{t}$ と $\boldsymbol{n}$ の定義

$$s(t) = \int_a^t \left| \frac{d\boldsymbol{r}(\tau)}{d\tau} \right| d\tau$$

即ち、

$$\frac{ds(t)}{dt} = \left| \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} \right|$$

上式で定義された $s(t)$ を使って、曲線表示のパラメータを t から s に変更すれば、以下のように $\boldsymbol{t}$、$\boldsymbol{n}$、κ の第 2 の定義を与えることができる。

$$\boldsymbol{t}(s) = \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}$$

$$\kappa(s)\boldsymbol{n}(s) = \frac{d\boldsymbol{t}(s)}{ds}, \quad |\boldsymbol{n}(s)| = 1, \quad \kappa(s) \geq 0$$

(演習問題)
上記の定義が、3.1.2 で与えた定義と一致することを示せ。

補足 2. 捩率と Frenet-Serrot の公式

以下の等式が成立することが示せる。

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \kappa\boldsymbol{n}$$

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\tau\boldsymbol{n}$$

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\kappa\boldsymbol{t} + \tau\boldsymbol{b}$$

τ : 捩率 (torsion) (「捩」: ねじれ)

(演習問題) 上記の等式が成立することを示せ。

応用数学 III 講義配布資料 (7)

【 3.3 曲面 】

1. 曲面のパラメータ表示

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}(u,v), \\
&= (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)), \quad (u,v) \in D
\end{aligned}
$$

2. 曲面の面積

$$S = \iint_D \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| dudv$$

$$dS = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| dudv : \text{面積素}$$

補足 1. 計算が煩雑な場合に役立つ計算方法

$$dS = \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{EG - F^2}$$

$$E = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$$

$$F = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$$

$$G = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$$

補足 2. 曲面 $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ の面積

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy,$$

【4.1 場 (field) とは】

・空間に分布した量

・数学的には、x, y, z を変数とする 3 変数関数

【注】“field” を「場」と訳すのは理学系、「界」と訳すのは工学系。例：magnetic field = 磁場 = 磁界

1. 本講義での各種関数の主な用途

	スカラー値	ベクトル値
1 変数		曲線のパラメータ表示
2 変数		曲面のパラメータ表示
3 変数	スカラー場	ベクトル場

2. 場の視覚的表現

・ 等位面　（スカラー場）

・ 流線　（ベクトル場）

【4.2 勾配 (gradient, グラジエント)】

スカラー場 $\varphi(x,y,z)$ の勾配とは

$$\mathrm{grad}\,\varphi \ = \ \boldsymbol{\nabla}\varphi \ = \ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \right) : \text{ナブラ (nabla) 記号}$$

・$\boldsymbol{\nabla}\varphi$ は最大勾配の方向（φ が増す向き）を向く

・$|\boldsymbol{\nabla}\varphi|$ は最大勾配値、等位面の密度に比例

・$\boldsymbol{\nabla}\varphi$ は等位面に垂直

ナブラは微分演算子。演算子 (operator, 作用素とも言う) とは関数を別の関数に写像するもの。

【4.3 発散 (divergence, ダイバージェンス)】

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = (A_x, A_y, A_z)$ の発散とは

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} \ = \ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} \ = \ \frac{\partial A_x}{\partial x} \ + \ \frac{\partial A_y}{\partial y} \ + \ \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$\boldsymbol{A}$ が流れなら、 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ は単位時間・単位体積あたりの湧き出し量を表す。($\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} < 0$ なら、流れは吸い込まれている。)

【注】「$y = \frac{1}{x^2}$ は $x \to 0$ で $+\infty$ に発散する」という文の「発散」とは意味が異なる。英語の “divergence” も、「無限大になる」（「収束しない」）と「湧き出し」の両方の意味を持つ。

【4.4 回転 (rotation, ローテーション)】

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = (A_x, A_y, A_z)$ の回転とは

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \\
&= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{A}$ が流れなら、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A}$ の渦の方向と密度を表す。

【注】 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ のことを $\mathrm{curl}\,\boldsymbol{A}$ と表記する書物もある。

応用数学 III 講義配布資料 (8)

【 4.5 場の微分公式 】

分配則 (distributive property)

1. $\boldsymbol{\nabla}(\varphi+\psi)=\boldsymbol{\nabla}\varphi+\boldsymbol{\nabla}\psi$
2. $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}$
3. $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}$

スカラー乗法 (scalar multiplication) の微分則

4. $\boldsymbol{\nabla}(\varphi\psi)=(\boldsymbol{\nabla}\varphi)\,\psi+\varphi\,(\boldsymbol{\nabla}\psi)$
5. $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\varphi\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{\nabla}\varphi)\cdot\boldsymbol{A}+\varphi\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})$
6. $\boldsymbol{\nabla}\times(\varphi\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{\nabla}\varphi)\times\boldsymbol{A}+\varphi\,(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})$

合成関数の微分法 (“chain rule”)

7. $\boldsymbol{\nabla}f(\varphi)=\dfrac{df}{d\varphi}\boldsymbol{\nabla}\varphi$

参考： その他の公式 (覚える必要はない)

8. $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})$
9. $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{B}$
$\qquad +\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})$
10. $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{B}$
$\qquad +\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})$

場の２階微分

1. ラプラシアン (Laplacian, ラプラス演算子)

$$\Delta=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}=\boldsymbol{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta\varphi=\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\varphi)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

2. 恒等的に零になるもの

・$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\varphi)=\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\varphi)=\boldsymbol{0}$

・$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})=0$

3. その他 (特に名称はなく、恒等的に零でもない)

・$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})=\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A})$

・$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{A}$

【注】$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{A}=(\Delta A_x,\ \Delta A_y,\ \Delta A_z)$
$\Delta A_x=\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}$

【4.6 線積分】 (curvilinear integral)

曲線 $\mathrm{C}=\{\boldsymbol{r}\mid\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t),\ \ a\le t\le b\}$ 上での 線積分

$$I_{\mathrm{C}}=\int_{\mathrm{C}}\varphi(\boldsymbol{r})\,ds=\int_a^b\varphi(\boldsymbol{r}(t))\,\frac{ds}{dt}dt$$

ただし $\dfrac{ds}{dt}=\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の曲線 C 上での 接線線積分

$$I_{\mathrm{C}}=\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\int_a^b\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt$$

$\boldsymbol{t}$ を曲線 C の接線単位ベクトルとすれば
$d\boldsymbol{r}=\boldsymbol{t}\,ds$ なので $I_{\mathrm{C}}=\displaystyle\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}\,ds$ とも書く.
または $A_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{t}$ として $I_{\mathrm{C}}=\displaystyle\int_{\mathrm{C}}A_{\mathrm{t}}\,ds$ とも書く.

【4.7 スカラーポテンシャル】 (scalar potential)

$$I_{\mathrm{C}}=\int_{\mathrm{C}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}=\varphi(\mathrm{C}\text{ の終点})-\varphi(\mathrm{C}\text{ の始点})\ .$$

C : 曲線
φ : スカラー場
$\boldsymbol{A}$: φ と $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}\varphi$ という関係にあるベクトル場.

・I_{C} は C の始点と終点だけで決まり,
途中の経路の取り方によらない.

・$-\varphi$ を $\boldsymbol{A}$ の スカラーポテンシャル と呼ぶ。

・$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ のとき $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}\varphi$ を満たす φ が存在する。
証明には後述の Stokes の定理を利用する.

【4.8 面積分】 (surface integral)

曲面 $\mathrm{S}=\{\boldsymbol{r}\mid\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v),\ (u,v)\in D\}$ 上での 面積分

$$I_{\mathrm{S}}=\int_{\mathrm{S}}\varphi(\boldsymbol{r})\,dS=\iint_{\mathrm{D}}\varphi(\boldsymbol{r}(u,v))\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|dudv$$

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の曲面 S 上での 法線面積分

$$I_{\mathrm{S}}=\int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_{\mathrm{D}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right)dudv$$

$\boldsymbol{n}$ を曲面 S の法線単位ベクトルとすれば
$d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}\,dS$ なので $I_{\mathrm{S}}=\displaystyle\int_{\mathrm{S}}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ とも書く.
または $A_{\mathrm{n}}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}$ として $I_{\mathrm{S}}=\displaystyle\int_{\mathrm{S}}A_{\mathrm{n}}\,dS$ とも書く.

応用数学 III 講義配布資料 (9)

【4.9 ストークスの定理】 (Stokes's theorem)

$$\int_{\mathrm{S}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$$

$\boldsymbol{A}$: ベクトル場
C : 閉曲線
S : C を縁とする曲面
$d\boldsymbol{S}$: S の面積素ベクトル。
右ネジが C の巻く向きに回るとき進む向きを向く。

【4.10 体積積分】 (volume integral)

$$I_{\mathrm{V}} = \int_{\mathrm{V}} f(\boldsymbol{r})\, dv$$

V : 体積領域 (3 次元領域)

dv : 体積要素

- dv の代わりに d^3r という記号を使うこともある.
- $d\boldsymbol{r}$ と書く流儀もあるが、薦めない。
  スカラー量である体積要素を、ベクトル量である（線積分で使う）線素と同じ太字の記号で表すことは適切でないからである。

デカルト座標

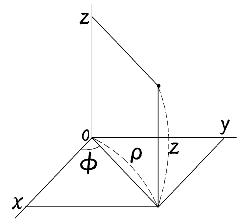
$\boldsymbol{r} = (x,\ \ y,\ \ z)\,, \qquad dv = dx\,dy\,dz$

$\mathrm{V} = \{\boldsymbol{r} \mid 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b,\ 0 \leq z \leq c\}$ (直方体）の場合

$$I_{\mathrm{V}} = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz f(x, y, z)$$

円柱座標

$\boldsymbol{r} = (\rho\cos\phi,\ \ \rho\sin\phi,\ \ z)\,, \qquad dv = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$



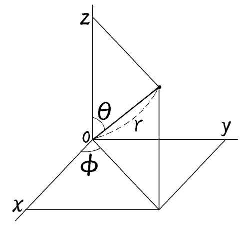
$\mathrm{V} = \{\boldsymbol{r} \mid 0 \leq \rho \leq a,\ 0 \leq z \leq c\}$ (円柱の内部）の場合

$$I_{\mathrm{V}} = \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^c dz\ f\,(\rho\cos\phi,\ \rho\sin\phi,\ z)$$

球座標 (3 次元極座標)

$\boldsymbol{r} = (r\sin\theta\cos\phi,\ \ r\sin\theta\sin\phi,\ \ r\cos\theta)$

$dv = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$



$\mathrm{V} = \{\boldsymbol{r} \mid 0 \leq r \leq a\}$ (球の内部）の場合

$$I_{\mathrm{V}} = \int_0^a r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$
$$\cdot f\,(r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta)$$

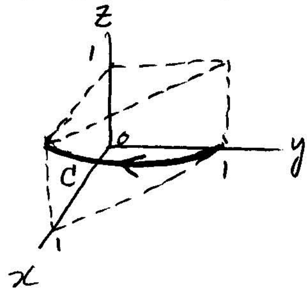
【4.11 ガウスの（発散）定理】 (Gauss's theorem)

$$\int_{\mathrm{V}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} dv = \int_{\mathrm{S}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$$

$\boldsymbol{A}$: ベクトル場
S : 閉曲面
V : S の内部の体積領域
$d\boldsymbol{S}$: S の面積素ベクトル.
S の内部から外部に向かう向きにとる.

応用数学III　配布資料(10)

1 ベクトル場 $\mathbf{A}=(x+y,\ x-y,\ 2z)$ の、
曲線 C ; $\mathbf{r}=(t,\ 1-t,\ t^2)$, $0\leq t\leq 1$ (tの増加方向に向きづける)
に沿っての接線線積分 $I_C=\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ を計算せよ.



[答] $I_C=\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt$

$t_1=0,\ t_2=1,$

$\mathbf{A}=(t+(1-t),\ t-(1-t),\ 2t^2)$
$=(1,\ 2t-1,\ 2t^2)$

$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(t,\ 1-t,\ t^2)=(1,-1,2t)$

$\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=1\cdot 1+(2t-1)\cdot(-1)+2t^2\cdot 2t=4t^3-2t+2$

$\therefore\ I_C=\int_0^1(4t^3-2t+2)\,dt=\left[t^4-t^2+2t\right]_{t=0}^{t=1}=\underline{2}$

[類題] 同じ C に対し, $\mathbf{B}=(-x,-y,2z)$ なら $\int_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{r}$ の値は? (答. 1)
同じ C に対し. $\mathbf{D}=(yz,\ zx,\ xy)$ なら $\int_C \mathbf{D}\cdot d\mathbf{r}$ の値は? (答. 0)

2 ベクトル場 $\mathbf{A}=(x+y,\ x-y,\ 2z)$ に対し, $\nabla\varphi=\mathbf{A}$ となる
スカラー場 φ を求めよ.

[答] $\nabla\times\mathbf{A}=(0-0,\ 0-0,\ 1-1)=(0,0,0)$ だから $\mathbf{A}=\nabla\varphi$ なる φ は存在する。
C を $(0,0,0)$ を始点、(ξ,η,ζ) を終点とする任意の経路とすれば.

$\varphi(\xi,\eta,\zeta)=\varphi(0,0,0)+\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$.

C として. 例えば $\mathbf{r}=(\xi,\eta,\zeta)t$, $0\leq t\leq 1$ をとると.

$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}=\int_0^1(\xi t+\eta t,\ \xi t-\eta t,\ 2\zeta t)\cdot(\xi,\eta,\zeta)\,dt$
$=(\xi^2+2\xi\eta-\eta^2+2\zeta^2)\underbrace{\int_0^1 t\,dt}_{\frac{1}{2}}$

$\therefore\ \varphi(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{2}\xi^2+\xi\eta-\frac{1}{2}\eta^2+\zeta^2+\varphi(0,0,0)$

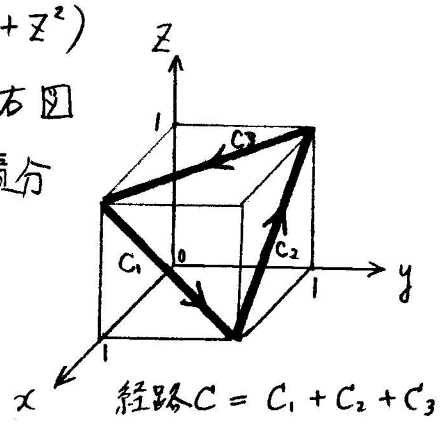
ξ,η,ζ を x,y,z と書き直し, $\varphi(0,0,0)$ を任意の定数 c と書くと.

$\underline{\varphi(x,y,z)=\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2+z^2+c}$ (cは定数)

問. ベクトル場 $\mathbb{A}$ を $\mathbb{A}=(z+y,\ 2x,\ y+z^2)$ とし，積分経路 $C\ (=C_1+C_2+C_3)$ が右図に示したとおりであるとき，接線線積分

$$I_C = \int_C \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r}$$

の値を計算せよ。



答. C_1 をパラメータ表示すると，

$$\mathbb{r}(t)=(1,0,1)+(0,1,-1)t=(1,t,1-t)\quad(0\leq t\leq 1).$$

$$\frac{d\mathbb{r}(t)}{dt}=(0,1,-1)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{A}(\mathbb{r}(t)) &= (z(t)+y(t),\ 2x(t),\ y(t)+z(t)^2)\\ &= (1-t+t,\ 2\cdot 1,\ t+(1-t)^2)\\ &= (1,\ 2,\ 1-t+t^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{C_1} &= \int_{C_1}\mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^1 \mathbb{A}(\mathbb{r}(t))\cdot\frac{d\mathbb{r}(t)}{dt}\,dt\\ &= \int_0^1 (1,2,1-t+t^2)\cdot(0,1,-1)\,dt\\ &= \int_0^1 (1+t-t^2)\,dt = \left[t+\frac{1}{2}t-\frac{1}{3}t^3\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{7}{6}\end{aligned}$$

C_2 をパラメータ表示すると

$$\mathbb{r}(t)=(1-t,\ 1,\ t)\quad(0\leq t\leq 1),\qquad \frac{d\mathbb{r}(t)}{dt}=(-1,0,1),$$

$$\mathbb{A}(\mathbb{r}(t))=(t+1,\ 2-2t,\ 1+t^2)$$

$$I_{C_2}=\int_{C_2}\mathbb{A}\cdot d\mathbb{r}=\int_0^1 (t^2-t)\,dt=-\frac{1}{6}$$

C_3 をパラメータ表示すると

$$\mathbb{r}(t)=(t,\ 1-t,\ 1)\quad(0\leq t\leq 1),\qquad \frac{d\mathbb{r}(t)}{dt}=(1,-1,0)$$

$$\mathbb{A}(\mathbb{r}(t))=(2-t,\ 2t,\ 2-t)$$

$$I_{C_3}=\int_{C_3}\mathbb{A}\cdot d\mathbb{r}=\int_0^1 (2-3t)\,dt=\frac{1}{2}$$

$$I_C = I_{C_1}+I_{C_2}+I_{C_3}=\frac{7}{6}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ (答)$$

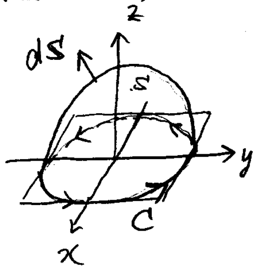
応用数学III　配布資料(12)

問 ベクトル場 $\mathbb{A} = (yz,\ x,\ 0)$、
曲線 C ： $\mathbb{r} = (\cos t,\ \sin t,\ 0)$，$0 \leq t \leq 2\pi$，
曲面 S ： $\mathbb{r} = (u\cos v,\ u\sin v,\ 1-u^2)$，$0 \leq u \leq 1$，$0 \leq v \leq 2\pi$，
とする。C は S の縁であり，C と S の向きは下図のとおりとする。

(i) $I_C = \oint_C \mathbb{A} \cdot d\mathbb{r}$ を線積分を実行して求めよ。

(ii) $I_S = \int_S \mathrm{rot}\,\mathbb{A} \cdot d\mathbb{S}$ を面積分を実行して求めよ。

(i), (ii)の結果が，ストークスの定理どおり，等しくなることを確認せよ



答 (i) $I_C = \oint_C \mathbb{A} \cdot d\mathbb{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbb{A}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dfrac{d\mathbb{r}(t)}{dt}\, dt$

上式で $\mathbb{r}(t) = (\cos t,\ \sin t,\ 0)$ より $\dfrac{d\mathbb{r}}{dt} = (-\sin t,\ \cos t,\ 0)$

また $\mathbb{A} = (yz,\ x,\ 0) = ((\sin t)\cdot 0,\ \cos t,\ 0) = (0,\ \cos t,\ 0)$

よって $\mathbb{A} \cdot \dfrac{d\mathbb{r}}{dt} = \cos^2 t$

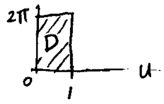
$\therefore\ I_C = \int_0^{2\pi} \mathbb{A} \cdot \dfrac{d\mathbb{r}}{dt}\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi$

$\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$ と変形する。
または $\sin^2 t$，$\cos^2 t$ の平均値は $\frac{1}{2}$ であるという「常識」から求まる
($\because \sin^2 t + \cos^2 t = 1$)

(ii) $\mathbb{B} = \mathrm{rot}\,\mathbb{A}$ とする。

$I_S = \int_D du\,dv\ \mathbb{B}(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)) \cdot \left\{ \dfrac{\partial \mathbb{r}(u,v)}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbb{r}(u,v)}{\partial v} \right\}$ (または，その −1 倍)

上式で



即ち $\iint_D du\,dv = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv$

$\mathbb{r}(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ 1-u^2)$ だから

$\dfrac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} = (\cos v,\ \sin v,\ -2u)$，$\dfrac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 0)$

$\dfrac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = (2u^2\cos v,\ 2u^2\sin v,\ \underbrace{u\cos^2 v + u\sin^2 v}_{=u})$

$0 \leq u \leq 1$ より 上のベクトルは曲面 S の表を向いていることがわかる。

∴ −1倍は不要

$\mathbb{B} = \mathrm{rot}\,\mathbb{A} = \nabla \times (yz,\ x,\ 0) = (0,\ y,\ 1-z)$

S 上では $\mathbb{B}(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)) = (0,\ u\sin v,\ \underbrace{1-(1-u^2)}_{=u^2})$

$\therefore\ \mathbb{B} \cdot \left(\dfrac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} \right) = 2u^3\sin^2 v + u^3$

$I_S = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv\ (2u^3\sin^2 v + u^3)$

$= \int_0^1 du \left\{ 2u^3 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 v\, dv}_{=\pi} + u^3 \underbrace{\int_0^{2\pi} dv}_{=2\pi} \right\}$

$= \int_0^1 du\ (2\pi u^3 + 2\pi u^3) = 4\pi \cdot \left[\frac{1}{4}u^4 \right]_{u=0}^{u=1} = \pi$

∴ ストークスの定理 ($I_C = I_S$) が成り立っていることが示された。

応用数学III 配布資料(13)

問 ベクトル場 $\mathbb{A}=(x^3,0,0)$, 原点を中心とし半径1の球面 S, Sの内部 V について

(i) $I_V=\int_V \mathrm{div}\,\mathbb{A}\,dv$ を計算せよ.

(ii) $I_S=\int_S \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}$ を計算し、ガウスの定理 ($I_V=I_S$) の成立を確かめよ。

答 (i) $\mathrm{div}\,\mathbb{A}=\nabla\cdot(x^3,0,0)=\frac{\partial}{\partial x}x^3+\frac{\partial}{\partial y}0+\frac{\partial}{\partial z}0=3x^2$

球座標(3次元極座標) r,θ,φ を用いると.

$$I_V=\underbrace{\int_0^1 dr\cdot r^2\int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\int_0^{2\pi}d\varphi}_{\int_V dv}\ \underbrace{3(r\sin\theta\cos\varphi)^2}_{\mathrm{div}\,\mathbb{A}=3x^2}$$

$$=3\left\{\int_0^1 r^4\,dr\right\}\left\{\int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta\right\}\left\{\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\right\}$$

$$=3\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi=\frac{4}{5}\pi$$

(ii) 曲面Sは 球座標で $r=1$ とし, θ,φを自由に変化させると描くことができる.

∴ 以下のように θ,φ をパラメータとするパラメータ表示ができる.

$$S:\ \mathbb{r}=(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta),\quad 0<\theta<\pi,\ 0<\varphi<2\pi$$

公式で $u\to\theta$, $v\to\varphi$ と対応させると.

$$\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\theta}=(\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta)$$

$$\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\varphi}=(-\sin\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\varphi,\ 0)$$

$$\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\varphi}=(\sin^2\theta\cos\varphi,\ \sin^2\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\theta\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1})$$

($=\sin\theta\,\mathbb{r}$ なので, 外向きになっている)

$$d\mathbb{S}=\left(\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\varphi}\right)d\theta\,d\varphi=(\sin^2\theta\cos\varphi,\ \sin^2\theta\sin\varphi,\ \sin\theta\cos\theta)\,d\theta\,d\varphi$$

$$\mathbb{A}=(x^3,0,0)=(\sin^3\theta\cos^3\varphi,\ 0,\ 0)$$

$$I_S=\int_S\mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}=\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\ \sin^5\theta\cos^4\varphi$$

注 ここに余分に $\sin\theta$ を入れてはいけない. 体積分で必要な $\sin\theta$ にあたるものは $\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial\varphi}$ に含まれているからである.

$$=\left\{\int_0^\pi\sin^5\theta\,d\theta\right\}\left\{\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi\,d\varphi\right\}$$

$$=\frac{16}{15}\cdot\frac{3}{4}\pi=\frac{4}{5}\pi$$

$\boxed{\text{補足}}$ 三角関数の定積分 (試験では $\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi\,d\varphi$ は積分公式として与えます)

- $\int_0^\pi\sin^3\theta\,d\theta=\int_{-1}^{1}(1-\cos^2\theta)\,d(\underset{t}{\cos\theta})=\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}$
- $\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi(1-\sin^2\varphi)\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi-\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin2\varphi}{2}\right)^2d\varphi=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$
- $\int_0^\pi\sin^5\theta\,d\theta=\int_{-1}^{1}(1-\cos^2\theta)^2\,d(\overset{t}{\cos\theta})=\left[t-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5\right]_{-1}^{1}=\frac{16}{15}$