応 用 数 学 Ⅲ　定 期 試 験 問 題

福井大学工学部機械工学科２年生対象、　担当教員 田嶋、　2008 年２月５日３限実施

各人に問題用紙１枚、答案用紙１枚 (B4 版 表裏使用)、計算用紙１枚を配布する。答案用紙１枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。解答にあたっては、スカラー量とベクトル量が一目で判別できるよう、ベクトル量を表す記号は太字にするか上に矢印をのせるようにせよ。スカラーのゼロとゼロベクトルとを明確に区別して書け。また内積や外積を表すドットやクロス記号を省略してはならない。
各種の場の積分定理やその他の有用な公式を覚えている場合は証明なくそれらを利用して答を求めてよい。

【I】 $\varphi = xyz + 2y^2z + 3z^3$、$\mathbf{A} = \left(yz + x^4,\, xz + y^3,\, xy^2 + z^2\right)$ として、以下の小問 (1)〜(6) に指定した場の微分を求め、解答用紙の解答欄に答のみを記せ。計算過程を記す必要はない。

(1) $\mathrm{grad}\,\varphi$　**(2)** $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$　**(3)** $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})$　**(4)** $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})$　**(5)** $\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{A})$

(6) $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\varphi)$

【II】 ベクトル場 $\mathbf{A}$ に対する スカラーポテンシャル φ とは何であるかを説明せよ。また、φ が存在するために $\mathbf{A}$ が満たすべき必要十分条件を述べよ。

【III】 ベクトル場 $\mathbf{A}$ を $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (xy,\, x+y,\, z^2)$ と定義する。また、曲線 C を
$\mathrm{C} = \left\{\mathbf{r} \,\middle|\, \mathbf{r} = (t+1,\, 2t,\, t^2),\;\; 0 \le t \le 1\right\}$ と定義する。C の向きはパラメータ t の増加する向きで定義する。
このとき、 $\mathbf{A}$ の C に沿っての接線線積分 $I_{\mathrm{C}} = \displaystyle\int_{\mathrm{C}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ の値を計算せよ。

【IV】 スカラー場 f を $f(\mathbf{r}) = x + y^2 + z^4$ と定義する。また、三次元領域 V を、座標原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ を中心とし、半径 a (>0) の球の内部の領域とする。このとき、体積積分 $I_{\mathrm{V}} = \displaystyle\int_{\mathrm{V}} f(\mathbf{r})\, dv$ の値を計算せよ。
ただし、dv は体積要素を表す。(例えば、デカルト座標では $dv = dxdydz$ である。)

【V】 ベクトル場 $\mathbf{A}$ を $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (xz,\, yz,\, z^2)$ と定義する。また、曲面 S を
$\mathrm{S} = \{\mathbf{r} \,|\, \mathbf{r} = (u\cos v,\, u\sin v,\, 1-u),\;\; 0 \le u \le 1,\; 0 \le v \le 2\pi\}$ と定義する。この曲面は、底面が xy 平面上の円 $x^2 + y^2 = 1$ で頂点が $(0, 0, 1)$ である円錐の表面であるのだが、円錐の外側を S の表 (おもて) 面とする。このとき、法線面積分 $I_{\mathrm{S}} = \displaystyle\int_{\mathrm{S}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$ の値を計算せよ。

応 用 数 学 Ⅲ　定 期 試 験　答 案 用 紙

福井大学工学部機械工学科 2 年生 対象、　担当教員 田嶋、　2008 年 2 月 5 日 3 限実施

【I】5 点× 6 問=30 点

(1)	(4)
(2)	(5)
(3)	(6)

【II】10 点

【III】20 点

【IV】20 点

【V】は裏面に解答せよ. 20 点

学科	機械工学	学籍番号									氏名		得点	(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)	合計

【I】

(1) $\mathrm{grad}\,\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(xyz + 2y^2z + 3z^3) = (yz,\ xz + 4yz,\ xy + 2y^2 + 9z^2)$ (答)

(2) $\mathrm{rot}\,\mathbb{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (yz + x^4,\ xz + y^3,\ xy^2 + z^2)$

$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy^2+z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz+y^3),\ \frac{\partial}{\partial z}(yz+x^4) - \frac{\partial}{\partial x}(xy^2+z^2),\ \frac{\partial}{\partial x}(xz+y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(yz+x^4)\right)$

$= (2xy - x,\ y - y^2,\ z - z) = (2xy - x,\ y - y^2,\ 0)$ (答)

(3) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\mathbb{A}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (2xy - x,\ y - y^2,\ 0)$

$= \left(\frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial z}(y-y^2),\ \frac{\partial}{\partial z}(2xy-x) - \frac{\partial}{\partial x}0,\ \frac{\partial}{\partial x}(y-y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy-x)\right)$

$= (0 - 0,\ 0 - 0,\ 0 - 2x) = (0,\ 0,\ -2x)$ (答)

(4) $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\mathbb{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - x) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y^2) + \frac{\partial}{\partial z}0$

$= 2y - 1 + 1 - 2y + 0 = 0$ (答)

(補足) 実は任意のベクトル場 $\mathbb{A}$ について $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\mathbb{A}) = 0$ が成立する。

(5) $\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\mathbb{A}) = \mathrm{grad}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(yz + x^4) + \frac{\partial}{\partial y}(xz + y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2 + z^2)\right\}$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(4x^3 + 3y^2 + 2z) = (12x^2,\ 6y,\ 2)$ (答)

(6) $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\varphi) = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xz + 4yz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy + 2y^2 + 9z^2)$

$= 0 + 4z + 18z = 22z$ (答)

【II】 $\mathrm{grad}\,\varphi = -\mathbb{A}$ を満たすスカラー場 φ を、ベクトル場 $\mathbb{A}$ のスカラーポテンシャルと言う。$\mathbb{A}$ が φ を持つ必要十分条件は $\mathrm{rot}\,\mathbb{A} = \mathbb{0}$ である。

(補足) 任意の固定点 $\mathbb{r}_0$ と $\mathbb{r}$ を結ぶ曲線を C として

$\varphi(\mathbb{r}) = -\int_C \mathbb{A}(\mathbb{r}') \cdot d\mathbb{r}'$

と表される。ストークスの定理により、$\mathrm{rot}\,\mathbb{A} = \mathbb{0}$ ならば上式右辺の線積分値は C のとり方によらず、始点と終点だけで決まる。

【III】 C 上の $\mathbb{r}$ について $\dfrac{d\mathbb{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(t+1,\ 2t,\ t^2) = (1,\ 2,\ 2t)$.

$$\mathbb{A}(\mathbb{r}(t))\cdot\frac{d\mathbb{r}(t)}{dt} = (xy,\ x+y,\ z^2)\cdot(1,\ 2,\ 2t)$$

$$= xy + 2x + 2y + 2t\,z^2$$

$$= (t+1)\cdot 2t + 2(t+1) + 2\cdot 2t + 2t\cdot(t^2)^2$$

$$= 2 + 8t + 2t^2 + 2t^5$$

$$I_c = \int_c \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^1 \mathbb{A}\cdot\frac{d\mathbb{r}}{dt}\,dt = \int_0^1 (2+8t+2t^2+2t^5)\,dt$$

$$= \left[2t + 4t^2 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{3}t^6\right]_{t=0}^{t=1} = 2+4+\frac{2}{3}+\frac{1}{3} = 7 \text{（答）}$$

（補足） $\mathrm{rot}\,\mathbb{A} = (0,\ 0,\ 1-x) \neq (0,0,0)$ なので スカラーポテンシャルは存在しない。したがって 積分路を変更してはいけません。

【IV】 球座標 (r,θ,φ) で表すと、

$$\int_V x\,dv = \int_0^a r^2dr\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\,\overbrace{(r\sin\theta\cos\varphi)}^{x}$$

$$= \left\{\int_0^a r^3dr\right\}\cdot\left\{\int_0^\pi \sin^2 d\theta\right\}\cdot\underbrace{\left\{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi\right\}}_{0} = 0$$

$$\int_V y^2dv = \int_0^a r^2dr\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\,(\overbrace{r\sin\theta\sin\varphi}^{y})^2$$

$$= \left\{\int_0^a r^4dr\right\}\cdot\left\{\int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta\right\}\cdot\left\{\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\right\}$$

$$= \frac{1}{5}a^5 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi = \frac{4}{15}\pi a^5$$

$$\int_V z^4dv = \int_0^a r^2dr\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\,(\overbrace{r\cos\theta}^{z})^4$$

$$= \left\{\int_0^a r^6dr\right\}\cdot\left\{\int_0^\pi \cos^4\theta\sin\theta\,d\theta\right\}\cdot\left\{\int_0^{2\pi}d\varphi\right\}$$

$$= \frac{1}{7}a^7 \cdot \frac{2}{5} \cdot 2\pi = \frac{4}{35}\pi a^7$$

$$I_V = \int_V x\,dv + \int_V y^2dv + \int_V z^4dv = 0 + \frac{4}{15}\pi a^5 + \frac{4}{35}\pi a^7$$

$$= \frac{4\pi}{35}a^5\left(a^2+\frac{7}{3}\right) \text{（答）}$$

【IV】の別解

$\mathbb{A} = \left(\frac{1}{2}x^2, \frac{1}{3}y^3, \frac{1}{5}z^5\right)$ とすると. $\mathrm{div}\,\mathbb{A} = x + y^2 + z^4 = f$ を満たす。

ガウスの定理により

$$I_V = \int_V f\, dv = \int_V \mathrm{div}\,\mathbb{A}\, dv = \int_S \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}$$

但し S は原点を中心とし、半径 a の球面で、外側を表（おもて）とする。

$$A_n = \mathbb{A}\cdot\frac{\mathbb{r}}{r} = \left(\frac{1}{2}x^2, \frac{1}{3}y^3, \frac{1}{5}z^5\right)\cdot\frac{1}{r}(x, y, z) = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{5}z^6\right)$$

$$I_V = \int_S A_n\, r^2 dS' = \int_S \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{5}z^6\right) r\, dS'$$

S 上で $(x, y, z) = a(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$, $r=a$

また $\int_{S'} dS' = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$

$$\therefore\ I_V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\cdot\sin\theta\left(\frac{a^3}{2}\sin^3\theta\cos^3\varphi + \frac{a^4}{3}\sin^4\theta\sin^4\varphi + \frac{a^6}{5}\cos^6\theta\right)a$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^{2\pi}\cos^3\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi}\sin^4\theta\, d\theta + \frac{a^5}{3}\int_0^{2\pi}\sin^4\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi}\sin^5\theta\, d\theta$$

$$+ \frac{a^7}{5}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\cos^6\theta\sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{a^4}{2}\cdot 0\cdot\frac{3}{8}\pi + \frac{a^5}{3}\cdot\frac{3}{4}\pi\cdot\frac{16}{15} + \frac{a^7}{5}\cdot 2\pi\cdot\frac{2}{7}$$

$$= \frac{4\pi}{35}a^7 + \frac{4\pi}{15}a^5 \quad (答)$$

【V】 $\mathbb{r} = (u\cos v,\ u\sin v,\ 1-u)$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u} = (\cos v,\ \sin v,\ -1)$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 0)$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v} = (u\cos v,\ u\sin v,\ u\cos^2 v + u\sin^2 v)$$
$$= (u\cos v,\ u\sin v,\ u)$$

z成分は $u \geqq 0$ なので円錐の外側向きになっている。

したがって $d\mathbb{S} = \left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v}\right)du\,dv$ である。(その-1倍ではない。)

$$\mathbb{A}\cdot\left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v}\right) = \left((u\cos v)(1-u),\ (u\sin v)(1-u),\ (1-u)^2\right)\cdot(u\cos v,\ u\sin v,\ u)$$

$$= u^2(1-u)\cos^2 v + u^2(1-u)\sin^2 v + u(1-u)^2$$
$$= u^2(1-u) + u(1-u)^2 = u(1-u)(u+1-u) = u-u^2$$

$$I_S = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv\ \mathbb{A}\cdot\left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial v}\right)$$
$$= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv\,(u-u^2) = \left\{\int_0^1 (u-u^2)\,du\right\}\cdot\left\{\int_0^{2\pi} dv\right\}$$
$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}\ (答)$$

(別解)

Sに円錐の底面を加えたものをS'とすると、円錐の底面で$\mathbb{A}=\mathbb{0}$であるから($\because z=0$), $I_S = I_{S'} = \int_{S'} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}$.

VをS'の内部の三次元領域とすると、ガウスの発散定理により、

$$I_S = I_{S'} = \int_V \operatorname{div}\mathbb{A}\,dv \quad , \quad \operatorname{div}\mathbb{A} = z+z+2z = 4z$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \rho\,d\rho\cdot 4z$$
$$= 2\pi\cdot\int_0^1 dz\cdot 4z\left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_{\rho=0}^{\rho=1-z}$$
$$= 4\pi\int_0^1 z(1-z)^2\,dz = 4\pi\int_0^1 (1-t)t^2\,dt \quad (t=1-z)$$
$$= 4\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = 4\pi\cdot\frac{1}{12} = \frac{\pi}{3}\ (答)$$

(注意) 最近、∂と書くべきところにdと書く答案が増えました。