応用数学Ⅲ　定期試験問題

福井大学工学部機械工学科２年生対象、　担当教員 田嶋、　2007 年 2 月 6 日 3 限実施

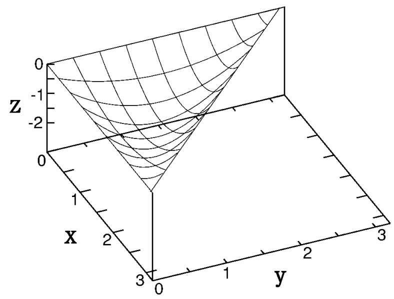
各人に問題用紙１枚、答案用紙１枚 (B4 版 表裏使用)、計算用紙１枚を配布する。答案用紙１枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。解答にあたっては、スカラー量とベクトル量が一目で判別できるよう、ベクトル量を表す記号は太字にするか上に矢印をのせるようにせよ。スカラーのゼロとゼロベクトルとを明確に区別して書け。また内積や外積を表すドットやクロス記号を省略してはならない。
各種の場の積分定理やその他の有用な公式を覚えている場合は証明なくそれらを利用して答を求めてよい。

【Ⅰ】 $\varphi = x^2 + 3xy^2 + 4yz^2$、$\mathbf{A} = (xy^2,\, xz + y,\, x - yz)$ として、以下の小問 (1)〜(6) に指定した場の微分を求め、解答用紙の解答欄に答のみを記せ。計算過程を記す必要はない。

(1) $\mathrm{grad}\,\varphi$　**(2)** $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$　**(3)** $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})$　**(4)** $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})$　**(5)** $\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{A})$　**(6)** $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\varphi)$

【Ⅱ】 以下の小問 (1)、(2) に答よ。(2) については計算過程も記せ。

(1) ストークスの定理の内容を述べよ。



(2) 曲面 S を $\{(x, y, z)\,|\, z = xy(x + y - \pi),\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \leq 0\}$ と定義する。曲面 S の縁は 3 点 $(0, 0, 0)$、$(\pi, 0, 0)$、$(0, \pi, 0)$ を頂点とする直角二等辺三角形である。$(x, y, z) = (0, 0, +\infty)$ から見える側を S の表（おもて）面、見えない側を S の裏面とする。ベクトル場 $\mathbf{A}$ を $\mathbf{A} = \left(\cos y,\, \sin x,\, z^2 + x + y\right)$ と定義する。また、ベクトル場 $\mathbf{B}$ を $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ と定義する。このとき、$\mathbf{B}$ の S 上の法線面積分 $I_{\mathrm{S}} = \displaystyle\int_{\mathrm{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ の値を求めよ。

【Ⅲ】 以下の小問 (1)〜(3) に答よ。(1) と (3) については計算過程も記せ。

(1) スカラー場 $\varphi = \dfrac{1}{r^2 + 1}$ について $\triangle\varphi$ を計算せよ。ただし、$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であり、$\triangle$ はラプラス演算子である。

(2) ガウスの定理（ガウスの発散定理）の内容を述べよ。

(3) 三次元領域 V は、座標原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ を中心とし、半径 $a\ (> 0)$ の球の内部の領域である。(1) で定義したスカラー場 φ について、三次元領域 V での体積積分 $I_{\mathrm{V}} = \displaystyle\int_{\mathrm{V}} \triangle\varphi\, dv$ の値を求めよ。

補注：　dv は体積要素を表す。デカルト座標では $dv = dxdydz$ である。

【積分公式集】 必要に応じて利用してください。最初の２つは部分積分の練習問題程度ですが、スペースがあるので含めました。後の３つが必要になるような解き方は、スマートな解法ではありませんが、計算力のある学生なら正解にたどりつくことは十分に可能でしょう。

$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + c,$　$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + c,$　$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + c$

$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x + c,$　$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}\arctan x + c$

応 用 数 学 Ⅲ　定 期 試 験　答 案 用 紙

福井大学工学部機械工学科 2 年生 対象、　担当教員 田嶋、　2007 年 2 月 6 日 3 限実施

【Ⅰ】 5 点× 6 問=30 点

(1)	(4)
(2)	(5)
(3)	(6)

【Ⅱ】 (1)10 点+(2)20 点=30 点

【Ⅲ】は裏面に解答せよ. (1)20 点+(2)10 点+(3)10 点=40 点

学科		学籍番号									氏名		得点	(Ⅰ)	(Ⅱ)	(Ⅲ)	合計

[I] (1) $\mathrm{grad}\,\varphi=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2+3xy^2+4yz^2)=\underset{\sim\sim\sim}{(2x+3y^2,\ 6xy+4z^2,\ 8yz)}$

(2) $\mathrm{rot}\,\mathbb{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(xy^2,\ xz+y,\ x-yz)$

$=\left(\frac{\partial}{\partial y}(x-yz)-\frac{\partial}{\partial z}(xz+y),\ \frac{\partial}{\partial z}(xy^2)-\frac{\partial}{\partial x}(x-yz),\ \frac{\partial}{\partial x}(xz+y)-\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\right)$

$=(-z-x,\ -1,\ z-2xy)\ =\ \underset{\sim\sim\sim}{(-x-z,\ -1,\ z-2xy)}$

(3) $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\mathbb{A})=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(-x-z,\ -1,\ z-2xy)$ (∵ (2)の結果を利用)

$=\left(\frac{\partial}{\partial y}(z-2xy)-\frac{\partial}{\partial z}(-1),\ \frac{\partial}{\partial z}(-x-z)-\frac{\partial}{\partial x}(z-2xy),\ \frac{\partial}{\partial x}(-1)-\frac{\partial}{\partial y}(-x-z)\right)$

$=(-2x,\ -1+2y,\ 0)\ =\ \underset{\sim\sim\sim}{(-2x,\ 2y-1,\ 0)}$

(4) 任意のベクトル場$\mathbb{B}$に対し $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbb{B})=\nabla\cdot\nabla\times\mathbb{B}=(\nabla\times\nabla)\cdot\mathbb{B}=\mathbb{O}\cdot\mathbb{B}=0$

が成立するので $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbb{A})=\underset{\sim}{0}$

(別解) 簡単な計算なので実際にdiv(rot A)を計算して0になることが示せれば(2)の結果が正しいことの確認の役にも立つので計算してみると

$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbb{A})=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(-x-z,\ -1,\ z-2xy)$

$=\frac{\partial}{\partial x}(-x-z)+\frac{\partial}{\partial y}(-1)+\frac{\partial}{\partial z}(z-2xy)=-1+0+1=\underset{\sim}{0}$

(5) $\mathrm{div}\,\mathbb{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(xy^2,\ xz+y,\ x-yz)$

$=\frac{\partial}{\partial x}(xy^2)+\frac{\partial}{\partial y}(xz+y)+\frac{\partial}{\partial z}(x-yz)=y^2+1-y\ =\ y^2-y+1$

$\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\mathbb{A})=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)(y^2-y+1)=\underset{\sim\sim\sim}{(0,\ 2y-1,\ 0)}$

(6) 任意のスカラー場ψに対し、$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\psi)=\nabla\times(\nabla\psi)=(\nabla\times\nabla)\psi=\mathbb{O}\,\psi=\mathbb{O}$

が成立するので、$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi)=\underset{\sim\sim\sim}{\mathbb{O}=(0,0,0)}$

(別解) 実際に計算してみると、

$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi)=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(2x+3y^2,\ 6xy+4z^2,\ 8yz)$

$=\left(\frac{\partial}{\partial y}(8yz)-\frac{\partial}{\partial z}(6xy+4z^2),\ \frac{\partial}{\partial z}(2x+3y^2)-\frac{\partial}{\partial x}(8yz),\ \frac{\partial}{\partial x}(6xy+4z^2)-\frac{\partial}{\partial y}(2x+3y^2)\right)$

$=(8z-8z,\ 0-0,\ 6y-6y)=\underset{\sim\sim\sim}{(0,0,0)=\mathbb{O}}$

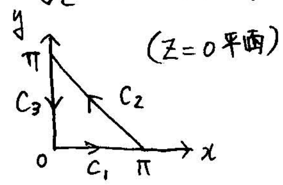
[II] (1) Cを閉曲線，SをCを縁とする曲面，$\mathbb{A}$をベクトル場とすると

$$\int_S (\mathrm{rot}\,\mathbb{A})\cdot d\mathbb{S} = \oint_C \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r}$$

が成立する。但し、右ネジをCの巻く向きに回転させるとSの表面(おもてめん)向きに進むようにCとSを向き付けるものとする。

(2) ストークスの定理により $I_S = \int_S (\mathrm{rot}\,\mathbb{A})\cdot d\mathbb{S} = \oint_C \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r}$.

$$= \int_{C_1} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} + \int_{C_2} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} + \int_{C_3} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r}$$



C_1は $\mathbb{r} = (t, 0, 0)$， $0 \leqq t \leqq \pi$ とパラメータ表示できるので

$$\int_{C_1} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^\pi \mathbb{A}\cdot\frac{d\mathbb{r}}{dt}\,dt = \int_0^\pi A_x\,dt = \int_0^\pi \cos \overset{\substack{0\\ \|}}{y}\,dt = \int_0^\pi dt = \pi$$

C_2は $\mathbb{r} = (\pi - t, t, 0)$， $0 \leqq t \leqq \pi$ とパラメータ表示できるので

$$\int_{C_2} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^\pi \mathbb{A}\cdot\frac{d\mathbb{r}}{dt}\,dt = \int_0^\pi (-A_x + A_y)\,dt = \int_0^\pi \Big(-\cos t + \underbrace{\sin(\pi - t)}_{\substack{\|\\ \sin t}}\Big)\,dt$$

$$= \Big[-\sin t - \cos t\Big]_{t=0}^{t=\pi} = -0-(-1)+0+1 = 2$$

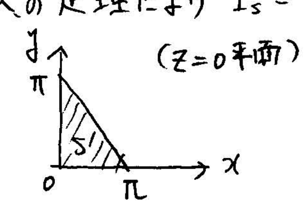
C_3は $\mathbb{r} = (0, \pi - t, 0)$， $0 \leqq t \leqq \pi$ とパラメータ表示できるので

$$\int_{C_3} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \int_0^\pi \mathbb{A}\cdot\frac{d\mathbb{r}}{dt}\,dt = \int_0^\pi (-A_y)\,dt = \int_0^\pi \sin 0\,dt = 0\int_0^\pi dt = 0$$

$$\therefore\ I_S = \pi + 2 + 0 = \underline{\pi + 2}$$

別解① ストークスの定理により $I_s = \int_S (\mathrm{rot}\,\mathbb{A})\cdot d\mathbb{S} = \oint_C \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \int_{S'} (\mathrm{rot}\,\mathbb{A})\cdot d\mathbb{S}$

ここで S'は



にとると計算が容易になる。

$$\mathbb{B} = \mathrm{rot}\,\mathbb{A} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(z^2+x+y) - \frac{\partial}{\partial z}\sin x,\ \frac{\partial}{\partial z}\cos y - \frac{\partial}{\partial x}(z^2+x+y),\ \frac{\partial}{\partial x}\sin x - \frac{\partial}{\partial y}\cos y\right)$$

$$= (1,\ -1,\ \cos x + \sin y)$$

$d\mathbb{S}\ /\!/\ z$軸 なので $\mathbb{B}\cdot d\mathbb{S} = B_z\,dx\,dy$

$$\therefore\ I_s = \int_{S'} (\cos x + \sin y)\,dx\,dy = \int_0^\pi dx \int_0^{\pi - x} dy\,(\cos x + \sin y)$$

$$= \int_0^\pi dx\,\Big[\,y\cos x - \cos y\,\Big]_{y=0}^{y=\pi-x} = \int_0^\pi dx\,\big((\pi - x)\cos x - \cos(\pi - x) + \cos 0\big)$$

$$= \int_0^\pi (\pi\cos x - x\cos x + \cos x + 1)\,dx$$

$$I_S = \Big[(\pi+1)\sin x - x\sin x - \cos x + x\Big]_{x=0}^{x=\pi} = -(-1)+\pi+1-0 = \underline{\pi+2}$$

別解② 面積分をそのまま実行して求めることもできる。

S は u, v をパラメータとして以下のように表せる。

$$S = \{\mathbf{r} = (u, v, uv(u+v-\pi)) \mid 0 \leqq u \leqq \pi,\ 0 \leqq v \leqq \pi - u\}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (1, 0, v(2u+v-\pi)), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 1, u(2v+u-\pi))$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (v(\pi-2u-v),\ u(\pi-2v-u),\ 1)$$

$\mathbf{B} = (1, -1, \cos x + \sin y)$ なので S 上で $\mathbf{B} = (1, -1, \cos u + \sin v)$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right)\cdot \mathbf{B} = v(\pi-2u-v) - u(\pi-2v-u) + \cos u + \sin v$$

$$= u^2 - v^2 + \pi(v-u) + \cos u + \sin v$$

$$I_S = \int_0^\pi du \int_0^{\pi-u} dv\, (u^2 - v^2 + \pi v - \pi u + \cos u + \sin v)$$

$$= \int_0^\pi du \Big[u^2 v - \frac{1}{3}v^3 + \frac{\pi}{2}v^2 - \pi u v + v\cos u - \cos v\Big]_{v=0}^{v=\pi-u}$$

$$= \int_0^\pi \left\{-\frac{2}{3}u^3 + \frac{3}{2}\pi u^2 - \pi^2 u + \frac{\pi^3}{6} + (\pi+1)\cos u - u\cos u + 1\right\} du$$

$$= \Big[-\frac{1}{6}u^4 + \frac{\pi}{2}u^3 - \frac{\pi^2}{2}u^2 + \frac{\pi^3}{6}u + (\pi+1)\sin u - u\sin u - \cos u + u\Big]_{u=0}^{u=\pi}$$

$$= -\frac{\pi^4}{6} + \frac{\pi^4}{2} - \frac{\pi^4}{2} + \frac{\pi^4}{6} - (-1) + \pi + 1 = \underline{\pi+2}$$

[III] (1)

$$\frac{d}{dr}\varphi = \frac{d}{dr}\frac{1}{r^2+1} = -\frac{2r}{(r^2+1)^2}$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\varphi = -\frac{d}{dr}\frac{2r}{(r^2+1)^2} = -\frac{2(r^2+1)^2 - 2r\,2(r^2+1)2r}{(r^2+1)^4} = \frac{6r^2-2}{(r^2+1)^3}$$

$$\Delta\varphi = \frac{d^2}{dr^2}\varphi + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\varphi = \frac{6r^2-2}{(r^2+1)^3} + \frac{2}{r}\left(-\frac{2r}{(r^2+1)^2}\right) = \frac{2r^2-6}{(r^2+1)^3}$$

$$\left[\begin{aligned} &\because\ \nabla\varphi = \frac{d\varphi}{dr}\nabla r = \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\mathbf{r} \quad \left(\because\ \nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}\right) \\ &\Delta\varphi = \nabla\cdot\nabla\varphi = \nabla\cdot\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\mathbf{r}\right) = \left(\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)\right)(\nabla r)\cdot\mathbf{r} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\underbrace{\nabla\cdot\mathbf{r}}_{=3} \\ &\quad = \left(-\frac{1}{r^2}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d^2\varphi}{dr^2}\right)r + \frac{3}{r}\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr} \end{aligned}\right]$$

(2) Sを閉曲面，VをSの囲む体積領域，$\mathbf{A}$をベクトル場とすると

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{A}\,dv = \int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

が成立する。但し，Sの表面(おもてめん)は外側の面とする。

(3) ガウスの定理により，Sを半径aの球面として

$$I_V = \int_V \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)\,dv = \int_S (\operatorname{grad}\varphi)\cdot\mathbf{n}\,dS$$

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{d\varphi}{dr}\nabla r = -\frac{2r}{(r^2+1)^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

$\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$ なので $(\operatorname{grad}\varphi)\cdot\mathbf{n} = -\dfrac{2r}{(r^2+1)^2}$

S上では $r=a$ なので $(\operatorname{grad}\varphi)\cdot\mathbf{n} = -\dfrac{2a}{(a^2+1)^2}$

$$\therefore\ I_V = -\frac{2a}{(a^2+1)^2}\int_S dS = -\frac{2a}{(a^2+1)^2}4\pi a^2 = -\frac{8\pi a^3}{(a^2+1)^2}$$

[別解]

$$I_V = \int_V \Delta\varphi\,dv = \int_0^a r^2dr\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\ \frac{2r^2-6}{(r^2+1)^3}$$

$$= 4\pi\int_0^a \frac{2r^4-6r^2}{(r^2+1)^3}dr$$

$$= 4\pi\int_0 \left\{\frac{2}{r^2+1} - \frac{10}{(r^2+1)^2} + \frac{8}{(r^2+1)^3}\right\}dr$$

$$= 4\pi\left[-\frac{2r^3}{(r^2+1)^2}\right]_{r=0}^{r=a} = -\frac{8\pi a^3}{(a^2+1)^2}$$