福井大学工学部 機械工学科２年生 応用数学 III (担当教員 田嶋) 中間試験問題: 2006 年 12 月 1 日 2 限実施

各人に問題用紙１枚、答案用紙１枚 (表裏使用)、計算用紙１枚を配布する。

答案用紙１枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。

【1】 3 点 A(1, 2, 3), B(2, 0, 4), C(3, 3, 0) について、下記の (1)〜(4) を求めよ。導出過程を書く必要はなく、最終的な答のみを解答用紙の解答欄に記入せよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2) $\cos \angle \mathrm{BAC}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　(成分表示で答えよ)

(4) 三角形 ABC の面積

【2】 下記の文章 (1)〜(10) のうち、内容の正しいものに ○ を、そうでないものに × をつけよ。理由は述べず、 ○ か × かだけを解答用紙の解答欄に記入せよ。

(1) 同一平面上にない 4 点 A, B, C, D を頂点とする四面体の体積は $\dfrac{1}{3}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\right|$ である。

(2) 大きさと方向を持つ量をスカラー量と言う。

(3) ベクトルの 和、内積、外積 のすべてについて、交換則が成立する。

(4) ベクトルの 内積、外積 のどちらについても、分配則が成立する。

(5) ベクトルの 和、外積 のどちらについても、結合則が成立する。

(6) 任意の３ベクトル $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ について $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ が成立する。

(7) 任意のベクトル $\mathbf{A}$ およびそれと直交する単位ベクトル $\mathbf{n}$ について、$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) = -\mathbf{A}$ が成立する。

(8) 任意のベクトル $\mathbf{A}$ について、$\mathbf{A}$ と x,y,z 軸とのなす角を α、β、γ とすると $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$ が成立する。

(9) 任意のベクトル $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ について、$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 + |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2$ が成立する。

(10) 任意のベクトル $\mathbf{A}$、 $\mathbf{B}$、 $\mathbf{C}$、 $\mathbf{D}$ について、$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$ は、ゼロベクトルでなければ、$\mathbf{A}$ と $\mathbf{C}$ の張る平面と $\mathbf{B}$ と $\mathbf{D}$ の張る平面との交線に平行である。

【3】 下記の文章の$\boxed{ア}$、$\boxed{イ}$、$\boxed{ウ}$に当てはまる適当な数式、および$\boxed{エ}$、$\boxed{オ}$、$\boxed{カ}$に当てはまる適当な語句を解答用紙の解答欄に記入せよ。

パラメータ表示された曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$ の、パラメータ τ の値が 0 に対応する点から τ に対応する点までの部分の弧長は $s(\tau) = \displaystyle\int_0^\tau \left| \frac{d\mathbf{r}(\tau_1)}{d\tau_1} \right| d\tau_1$ で与えられる。この式の両辺を τ で微分すると $\dfrac{ds}{d\tau} = \boxed{ア}$ となる。右辺が負の値をとらないため τ を s で表す逆関数が存在し、それを用いて $\mathbf{r}$ を s の関数であると考えることができる。

このとき、$\mathbf{t} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ と定義される $\mathbf{t}$ は単位ベクトルである。なぜならば、
$\dfrac{d\mathbf{r}}{ds} = \dfrac{d\mathbf{r}}{d\tau}\boxed{イ} = \dfrac{\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}}{\boxed{ア}}$ であるので、$\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{ア}} = 1$ となるからである。$\mathbf{t}$ は$\boxed{エ}$ と呼ばれる。

つぎに、$\mathbf{k} = \dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ と定義される $\mathbf{k}$ は $\mathbf{t}$ と直交することがわかる。なぜならば、$\mathbf{t}$ が単位ベクトルであることは $1 = \mathbf{t}\cdot\mathbf{t}$ を意味するが、この式の両辺を s で微分すると $0 = \dfrac{d}{ds}(\mathbf{t}\cdot\mathbf{t}) = \boxed{ウ}$ となるからである。$\kappa = |\mathbf{k}|$、$\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{k}}{k}$ と定義される κ は$\boxed{オ}$、$\mathbf{n}$ は$\boxed{カ}$と呼ばれる。

【4】 t をパラメータとするパラメータ表示で、x,y,z 成分が $\mathbf{r} = (R\cos\omega t,\ R\sin\omega t,\ v_z t)$ と表される曲線の曲率半径 ρ を求めよ。ただし、R、ω、v_z は定数であり、$R > 0$、$\omega \neq 0$ とする。なお、この曲線 ((円柱・円筒) らせん、または、つるまき線、ヘリックスなどと呼ばれる) では、曲線上の全ての点 $(-\infty < t < \infty)$ において曲率半径は一定である。

解答に際しては、下記の諸式を参考にするとよい。

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ のとき　$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt,\quad \mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt,$
$v = \lvert\mathbf{v}\rvert,\quad \mathbf{t} = \mathbf{v}/v,\quad \mathbf{a}_\mathrm{n} = \mathbf{a} - (\mathbf{t}\cdot\mathbf{a})\mathbf{t},\quad a_\mathrm{n} = \lvert\mathbf{a}_\mathrm{n}\rvert,$
$\kappa = a_\mathrm{n}/v^2,\quad \rho = 1/\kappa,\quad \mathbf{n} = \mathbf{a}_\mathrm{n}/a_\mathrm{n},\quad \mathbf{r}_\mathrm{c} = \mathbf{r} + \rho\mathbf{n}$

【5】 １変数ベクトル関数 $\mathbf{B}(t)$ が、別の１変数ベクトル関数 $\mathbf{A}(t)$ を使って $\mathbf{B} = \dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|^2}$ と定義されるとき、$\mathbf{B}'$ を、$\mathbf{A}$、$|\mathbf{A}|$、$\mathbf{A}'$ を用いて表せ。ただし、$\mathbf{A}' = \dfrac{d\mathbf{A}}{dt}$、$\mathbf{B}' = \dfrac{d\mathbf{B}}{dt}$ とする。

福井大学 工学部
機械工学 2 年生

応用数学 III　中間試験　答案用紙

2006 年 12 月 1 日 2 限実施

【1】 20 点

(1) 5 点	(2) 5 点	(3) 5 点 $\left(\quad , \quad , \quad \right)$	(4) 5 点

【2】 20 点 =2×10

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

【3】 20 点

ア 5 点	イ 5 点	ウ 4 点
エ 2 点	オ 2 点	カ 2 点

【4】 20 点

【5】 20 点

【6】は裏面に解答せよ. 最大 10 点

学科		学籍番号									氏名		得点	

応用数学III 中間試験 解答：（2006年12月1日3限実施分）

[1] (1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, 0, 4) - (1, 2, 3) = (1, -2, 1)$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (3, 3, 0) - (1, 2, 3) = (2, 1, -3)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (1, -2, 1) \cdot (2, 1, -3) = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 2 - 2 - 3 = \underline{-3}$

(2) $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

$$\cos \angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB\ AC} = \frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = -\underline{\frac{3}{2\sqrt{21}}} = -\underline{\frac{\sqrt{21}}{14}}$$

(3) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, -2, 1) \times (2, 1, -3)$

$= ((-2)\cdot(-3) - 1 \cdot 1,\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-3),\ 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 2)$

$= (6 - 1,\ 2 + 3,\ 1 + 4) = \underline{(5, 5, 5)}$

(4) (三角形ABCの面積) $= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} |(5, 5, 5)| = \frac{5}{2} |(1, 1, 1)| = \underline{\frac{5\sqrt{3}}{2}}$

[2] (1) ×　$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ を3稜とする平行六面体の体積は $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ のスカラー三重積の絶対値で与えられる。四面体の体積は、その$\frac{1}{6}$倍である。

の体積は1,

の体積は$\frac{1}{6}$.

(2) ×　ベクトル量である。

(3) ×　$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$, $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$ であるが、$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = -\mathbb{B} \times \mathbb{A}$ なので外積については交換則が成立しない。

(4) ○　$\mathbb{A} \cdot (\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} + \mathbb{A} \cdot \mathbb{C}$, $\mathbb{A} \times (\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \mathbb{A} \times \mathbb{B} + \mathbb{A} \times \mathbb{C}$ が成立する。

(5) ×　$(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$ であるが、$(\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \times \mathbb{C}$ と $\mathbb{A} \times (\mathbb{B} \times \mathbb{C})$ は一般には一致しない。ベクトル三重積の公式によると、$(\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \times \mathbb{C} = (\mathbb{A} \cdot \mathbb{C})\mathbb{B} - (\mathbb{B} \cdot \mathbb{C})\mathbb{A}$, $\mathbb{A} \times (\mathbb{B} \times \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \cdot \mathbb{C})\mathbb{B} - (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})\mathbb{C}$ なので、両者が一致するのは $\mathbb{A}, \mathbb{C}$ ともに $\mathbb{B}$ に垂直である場合や、$\mathbb{A}$ と $\mathbb{C}$ が平行である場合などの特殊なケースに限られる。

(6) ○　スカラー三重積の持つ対称性は $\mathbb{A} \cdot (\mathbb{B} \times \mathbb{C}) = \mathbb{B} \cdot (\mathbb{C} \times \mathbb{A}) = \mathbb{C} \cdot (\mathbb{A} \times \mathbb{B})$ である。内積は交換則に従うので $\mathbb{C} \cdot (\mathbb{A} \times \mathbb{B}) = (\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \cdot \mathbb{C}$ である。

(7) ○　ベクトル三重積の公式により $\mathbb{n} \times (\mathbb{n} \times \mathbb{A}) = (\mathbb{n} \cdot \mathbb{A})\mathbb{n} - (\mathbb{n} \cdot \mathbb{n})\mathbb{A}$ であるが、$\mathbb{n}$ と $\mathbb{A}$ は直交するので $\mathbb{n} \cdot \mathbb{A} = 0$ であり、$\mathbb{n}$ は単位ベクトルだから $\mathbb{n} \cdot \mathbb{n} = 1$ であるから $\mathbb{n} \times (\mathbb{n} \times \mathbb{A}) = -\mathbb{A}$ が成り立つ。

(8) ×　方向余弦の性質として $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ が成立するので
$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = (1 - \cos^2\alpha) + (1 - \cos^2\beta) + (1 - \cos^2\gamma)$
$= 3 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 3 - 1 = 2$ となる。

(9) ○　$\mathbb{A}$ と $\mathbb{B}$ の交角を θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とおくと、$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = |\mathbb{A}||\mathbb{B}|\cos\theta$, $|\mathbb{A} \times \mathbb{B}| = |\mathbb{A}||\mathbb{B}|\sin\theta$ なので $(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})^2 + |\mathbb{A} \times \mathbb{B}|^2 = |\mathbb{A}|^2|\mathbb{B}|^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = |\mathbb{A}|^2|\mathbb{B}|^2$ が成り立つ。

(10) ×　$\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ は $\mathbb{A}$ と $\mathbb{B}$ の張る平面の法線方向を向き、$\mathbb{C} \times \mathbb{D}$ は $\mathbb{C}$ と $\mathbb{D}$ の張る平面の法線方向を向く。$(\mathbb{A} \times \mathbb{B}) \times (\mathbb{C} \times \mathbb{D})$ はそのどちらの法線にも垂直であるから、そのどちらの平面にも乗っており、したがって2つの平面の交線方向を向いている。よって、$\mathbb{A}$ と $\mathbb{B}$、$\mathbb{C}$ と $\mathbb{D}$ のはる平面の交線であって、$\mathbb{A}$ と $\mathbb{C}$、$\mathbb{B}$ と $\mathbb{D}$ のそれではない。

[3] $\boxed{ア}$ $\left|\dfrac{d\mathbf{r}(\tau)}{d\tau}\right|$ [注意] $\left|\dfrac{d\mathbf{r}(\tau_1)}{d\tau_1}\right|$ではありません。一般に $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ が成り立ちます。

$\boxed{イ}$ $\dfrac{d\tau}{ds}$

$\boxed{ウ}$ $2\,\mathbf{t}\cdot\mathbf{k}$

$\boxed{エ}$ 接線単位ベクトル　$\boxed{オ}$ 曲率　$\boxed{カ}$ (主)法線単位ベクトル

[4] $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = (-R\omega\sin\omega t,\ R\omega\cos\omega t,\ v_z)$

$\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = (-R\omega^2\cos\omega t,\ -R\omega^2\sin\omega t,\ 0)$

以下，任意の t についての ρ を求めてもよいが，曲線の対称性の為どの点でも同じと言うのだから，例として $t=0$ の点を選んで計算して少し楽をしてみる。$t=0$ で

$\mathbf{v} = (0,\ R\omega,\ v_z)$, $\mathbf{a} = (-R\omega^2,\ 0,\ 0)$

$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{R^2\omega^2+v_z^2}$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{a}_n = \mathbf{a} - \dfrac{1}{v^2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\mathbf{v} = \mathbf{a}$

$a_n = |\mathbf{a}_n| = |\mathbf{a}| = R\omega^2$, $\rho = \dfrac{1}{\kappa} = \dfrac{v^2}{a_n} = \dfrac{R^2\omega^2+v_z^2}{R\omega^2} = R + \dfrac{v_z^2}{R\omega^2}$

[5] $\mathbf{B}' = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|^2} = \left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{|\mathbf{A}|^2}\right)\mathbf{A} + \dfrac{1}{|\mathbf{A}|^2}\dfrac{d\mathbf{A}}{dt}$

ここで，$u = |\mathbf{A}|^2$ とおくと $\dfrac{1}{|\mathbf{A}|^2} = \dfrac{1}{u}$ であり，また，$\dfrac{du}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}'$ であるので

$\dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{|\mathbf{A}|^2} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{u} = \left(\dfrac{d}{du}\dfrac{1}{u}\right)\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{1}{u^2}2\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}' = -\dfrac{2\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}'}{|\mathbf{A}|^4}$

$\therefore\ \mathbf{B}' = -\dfrac{2\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}'}{|\mathbf{A}|^4}\mathbf{A} + \dfrac{1}{|\mathbf{A}|^2}\mathbf{A}' = \dfrac{|\mathbf{A}|^2\mathbf{A}' - 2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}')\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|^4}$