機械工学科２年生 応用数学 III 定期試験問題 2006 年 2 月 10 日 3 限実施(改訂版)

各人に問題用紙１枚、答案用紙１枚 (表裏使用)、計算用紙１枚を配布する。答案用紙１枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。
解答にあたっては、スカラー量とベクトル量が一目で判別できるよう、ベクトル量を表す記号は太字にするか上に矢印をのせるようにせよ。
スカラーのゼロとゼロベクトルとを明確に区別して書け。また内積や外積を表すドットやクロス記号を省略してはならない。
【3】, 【4】では各種の場の積分定理を利用して答を求めてよい。

【1】 「微積分学の (微分積分法の) 基本定理」、「スカラーポテンシャルの定理」(← 本講義でつけた仮称)、「ストークスの定理」、「ガウスの (発散) 定理」の４つの定理を表す等式を、左辺を ア ～ エ から、右辺を オ ～ ク から選ぶことで作れ。(記号の意味が明示されていないが、もしそれらを適切に定義すればその定理を表していると解釈できれる等式をつくりなさい。）解答は、答案用紙の解答欄に ア ～ ク の記号で答えよ。

左辺：

ア : $\displaystyle\int_{\mathrm{V}} (\nabla \cdot \mathbf{A})\, dv$

イ : $\displaystyle\int_{\mathrm{S}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$

ウ : $\displaystyle\int_a^b \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx$

エ : $\displaystyle\int_{\mathrm{C}} (\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{r}$

右辺：

オ : $\varphi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{a})$

カ : $\displaystyle\int_{\mathrm{S}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$

キ : $\displaystyle\oint_{\mathrm{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$

ク : $f(b) - f(a)$

【2】 以下の小問 (1)～(6) に指定した場の微分を求め、解答用紙の解答欄に答のみを記せ。計算過程を記す必要はない。

(1) $\varphi(x,y,z) = xz + y^2$ 　のときの　$\mathrm{grad}\,\varphi$

(2) $\mathbf{A} = (x+y,\ yz,\ x-y)$ 　のときの　$\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$

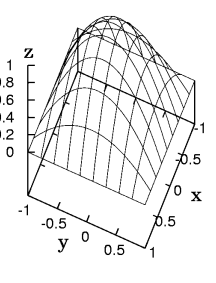
(3) $\varphi(x,y,z) = z^3 \sin(x+y^2)$ 　のときの　$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\varphi)$

(4) $\varphi(x,y,z) = \cos^3\left(x^3y^2z^2\right)\sin^3\left(x^2y^3z^2 + \left(1+x^2+y^2+z^4\right)^{x-y+z}\right)$ 　のときの　$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\varphi)$

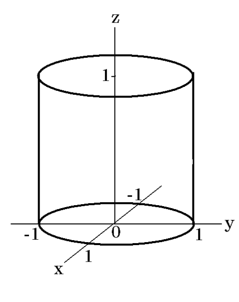
(5) $\mathbf{A} = (\sin(x+y),\ \sin(x-y),\ \cos z)$ 　のときの　$\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{A})$

(6) $\mathbf{A} = \left(\cos\left(xz^2\sin^3 y\right),\ \cos\left(yz^3\sin^2 x\right),\ \sin\left(x^2\cos^3 y + y^4\cos^5 z + z^6\cos^7 x\right)\right)$ 　のときの　$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})$

【3】 曲面 S を $\left\{(x,y,z)\,|\,z=(x^2-1)(y^2-1),\ -1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1\right\}$ と定義する。曲面 S の縁は点 $(\pm1,\ \pm1,\ 0)$ を頂点とする正方形である。座標原点 (0,0,0) から見える側を裏面、見えない側を表（おもて）面とする。ベクトル場 $\mathbf{A}$ を $\mathbf{A} = \left(x^4y,\ x^3y^2,\ x^2y^2z\right)$ と定義する。また、ベクトル場 $\mathbf{B}$ を $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ と定義する。このとき、$\mathbf{B}$ の S 上の法線面積分 $I_{\mathrm{S}} = \displaystyle\int_{\mathrm{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ の値を求めよ。



【4】 円筒 $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le 1\right\}$ を考え、この円筒の表面（ひょうめん）を S と名づける。S は円筒の側面・底面部分・天井部分からなる閉曲面である。円筒の外側を S の表面 (おもてめん) とする。ベクトル場 $\mathbf{A}$ を　$\mathbf{A} = \left((x^3+y^2)z,\ (x^3-y^2)z,\ z^2+xy\right)$　とする。このときベクトル場 $\mathbf{A}$ の閉曲面 S 上での法線面積分　$I_{\mathrm{S}} = \displaystyle\int_{\mathrm{S}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$　の値を求めよ。



福井大学 工学部
機械工学 2 年生

応用数学 III　定期試験　答案用紙

2006 年 2 月 10 日 3 限実施

【1】
24 点

微積分学の基本定理 ………………	(ア〜エ)	＝	(オ〜ク)	
(仮称) スカラーポテンシャルの定理 …	(ア〜エ)	＝	(オ〜ク)	
ストークスの定理 ………………	(ア〜エ)	＝	(オ〜ク)	
ガウスの発散定理 ………………	(ア〜エ)	＝	(オ〜ク)	

【2】
36 点

(1)	(4)
(2)	(5)
(3)	(6)

【3】
20 点

【4】は裏面に解答せよ. 20 点

学科		学籍番号		氏名	得点

2005年度 応用数学III 定期試験 解答

[1]

微分積分学の基本定理 ウ = ク
スカラーポテンシャルの定理 エ = オ
ストークスの定理 イ = キ
ガウスの発散定理 ア = カ

[2] (1) $\mathrm{grad}\,\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}(xz+y^2), \frac{\partial}{\partial y}(xz+y^2), \frac{\partial}{\partial z}(xz+y^2)\right)$

$= (z, 2y, x)$

(2) $\mathrm{rot}\,\mathbb{A} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(x-y) - \frac{\partial}{\partial z}(yz), \frac{\partial}{\partial z}(x+y) - \frac{\partial}{\partial x}(x-y), \frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial y}(x+y)\right)$

$= (-1-y, 0-1, 0-1)$

$= (-y-1, -1, -1)$

(3) $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\varphi) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi$

$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} z^3 \sin(x+y^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} z^3 \sin(x+y^2) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} z^3 \sin(x+y^2)$

$= \frac{\partial}{\partial x} z^3 \cos(x+y^2) + \frac{\partial}{\partial y} z^3 \cdot 2y \cos(x+y^2) + \frac{\partial}{\partial z} 3z^2 \sin(x+y^2)$

$= -z^3 \sin(x+y^2) + 2z^3 \cos(x+y^2) - 4z^3 y^2 \sin(x+y^2)$
$+ 6z \sin(x+y^2)$

$= (-z^3 - 4y^2 z^3 + 6z)\sin(x+y^2) + 2z^3 \cos(x+y^2)$

(4) 任意のスカラー場 φ について $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi) = \mathbb{0}$ が成り立つので

$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi) = \mathbb{0}$

(5) $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\mathbb{A}) = \mathrm{grad}\left(\frac{\partial}{\partial x}\sin(x+y) + \frac{\partial}{\partial y}\sin(x-y) + \frac{\partial}{\partial z}\cos z\right)$

$= \mathrm{grad}(\cos(x+y) - \cos(x-y) - \sin z)$

$= \mathrm{grad}(\cos x \cos y - \sin x \sin y - \cos x \cos y - \sin x \sin y - \sin z)$

$= \mathrm{grad}(-2\sin x \sin y - \sin z)$

$= \left(\frac{\partial}{\partial x}(-2\sin x \sin y - \sin z), \frac{\partial}{\partial y}(-2\sin x \sin y - \sin z), \frac{\partial}{\partial z}(-2\sin x \sin y - \sin z)\right)$

$= (-2\cos x \sin y, -2\sin x \cos y, -\cos z)$

(6) 任意のベクトル場 $\mathbb{A}$ について、$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbb{A}) = 0$ が成り立つので、

$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\mathbb{A}) = 0$

[3] $S' = \{ (x, y, 0) \mid -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1 \}$ とする

S と S' の縁は共通である。この閉曲線を C とよぶことにする。

ストークスの定理により

$$I_S = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

である。S' 上で $d\mathbf{S} \parallel \mathbf{e}_z$ であることより

$$\therefore\ I_S = \int_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} dy\ B_z$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 3x^2y^2 - x^4$$

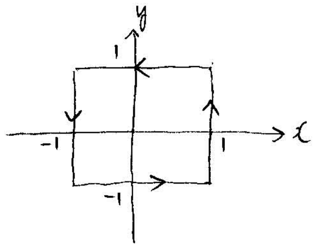
$$\therefore\ I_S = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} dy\ (3x^2y^2 - x^4) = 3\int_{-1}^{1} x^2 dx \int_{-1}^{1} y^2 dy - \int_{-1}^{1} x^4 dx \int_{-1}^{1} dy$$

$$= 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{20-12}{15} = \frac{8}{15}$$

(別解1) S の縁の閉曲線を C とよぶことにする

ストークスの定理により

$$I_S = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$



$$I_S = \int_{-1}^{1} A_y(1, y, 0)\, dy$$

$$+ \int_{1}^{-1} A_x(x, 1, 0)\, dx$$

$$+ \int_{1}^{-1} A_y(-1, y, 0)\, dy$$

$$+ \int_{-1}^{1} A_x(x, -1, 0)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} y^2 dy + \int_{1}^{-1} x^4 dx + \int_{1}^{-1} (-y^2)\, dy + \int_{-1}^{1} (-x^4)\, dx$$

$$= 2\int_{-1}^{1} y^2 dy - 2\int_{-1}^{1} x^4 dy = 2 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{20-12}{15} = \frac{8}{15}$$

答 $I_S = \dfrac{8}{15}$

[3] (別解2) （ヒント：$u = x$, $v = y$ として (u, v) をパラメータとする曲面の表示だと思えば公式にあてはまる。以下では x, y を u, v のかわりに使う。）

$$\mathbb{B} = \mathrm{rot}\,\mathbb{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left((x^3+y^2)z,\ (x^3-y^2)z,\ z^2+xy \right)$$

$$= \left(2x^2yz,\ -2xy^2z,\ 3x^2y^2-x^4 \right)$$

S 上の点を $\mathbb{r}$ とすると $\mathbb{r} = (x, y, (x^2-1)(y^2-1))$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial x} = (1, 0, 2x(y^2-1)), \quad \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial y} = (0, 1, 2y(x^2-1))$$

$$\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial y} = \left(-2x(y^2-1),\ -2y(x^2-1),\ 1\right)$$

S 上で $\mathbb{B} = \left(2x^2y(x^2-1)(y^2-1),\ -2xy^2(x^2-1)(y^2-1),\ 3x^2y^2-x^4 \right)$

$$I_S = \int_S \mathbb{B}\cdot d\mathbb{S} = \int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}dy\ \mathbb{B}\cdot\left(\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial y}\right)$$

$$= \int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}dy\left(-4x^3y(x^2-1)(y^2-1)^2 + 4xy^3(x^2-1)^2(y^2-1) + 3x^2y^2-x^4\right)$$

$$= \int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}dy\left\{4(x^2-1)(y^2-1)\left(-\cancel{x^3y^3}-x^3y+\cancel{x^3y^3}-xy^3\right)+3x^2y^2-x^4\right)$$

$$= \int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}dy\left\{\underbrace{-8xy(x^2+y^2)(x^2-1)(y^2-1)}_{\substack{x\text{について奇関数.}\\ y\text{についても奇関数}}} + x^2(3y^2-x^2)\right\}$$

$$= \int_{-1}^{1}dx\int_{-1}^{1}dy\ (3x^2y^2-x^4)$$ （∵ x または y の奇べきの項は定積分によりゼロとなる）

$$= 3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\cdot 2$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$ （答）

[4]　Sの囲む三次元領域をVと名付ける。

ガウスの定理により

$$I_S = \int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\, dv$$

ここで、$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 3x^2 z - 2yz + 2z$

円筒座標（$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$）で表すと

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 3\rho^2 z\cos^2\varphi - 2\rho z\sin\varphi + 2z$$

$$\therefore I_S = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\, d\rho\ (3\rho^2 z\cos^2\varphi - 2\rho z\sin\varphi + 2z)$$

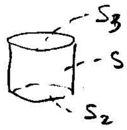
$$= 3\int_0^1 z\,dz \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho - 2\int_0^1 z\,dz\int_0^{2\pi}\sin\varphi\, d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho$$

$$+ 2\int_0^1 z\,dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\, d\rho$$

$$= 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 0\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \frac{11}{8}\pi$$

答　$I_S = \dfrac{11}{8}\pi$

[4] (別解)



(S_1) $\quad \mathbf{r} = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 1$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (0, 0, 1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$ これは外向き = 表向きである.

S_1 上で $\mathbb{A} = ((\cos^3\varphi + \sin^2\varphi)z, (\cos^3\varphi - \sin^2\varphi)z, z^2 + \cos\varphi\sin\varphi)$

$$\therefore I_{S_1} = \int_{S_1} A \cdot d\mathbb{S} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz \quad \mathbb{A} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz \quad (\cos^4\varphi + \cos\varphi\sin^2\varphi + \cos^3\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi)\, z$$

$$= \left\{ \int_0^{2\pi} \cos^4\varphi\, d\varphi + \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi + \int_0^{2\pi} \cos^3\varphi\sin\varphi\, d\varphi - \int_0^{2\pi} \sin^3\varphi\, d\varphi \right\} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \left\{ \frac{3}{4}\pi + 0 + 0 - 0 \right\} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{8}\pi$$

(S_2, S_3) $\quad \mathbf{r} = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z_0)$ $\qquad z_0 = 0$ のとき S_2, $\quad z_0 = 1$ のとき S_3

$0 \leq \rho \leq 1$, $\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (0, 0, \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi) = (0, 0, \rho)$$

これは $+z$ 方向なので S_2 では裏向き、S_3 では表向きである

S_2, S_3 上で $\mathbb{A} = ((\rho^3\cos^3\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)z_0, (\rho^3\cos^3\varphi - \rho^2\sin^2\varphi)z_0, \rho^2\cos\varphi\sin\varphi + z_0^2)$

$$\therefore \left.\begin{matrix} -I_{S_2} \\ I_{S_3} \end{matrix}\right\} = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \quad \mathbb{A} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right)$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (\rho^3\cos\varphi\sin\varphi + \rho z_0^2)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot z_0^2 = \pi z_0^2$$

$$\therefore \quad I_{S_2} = 0, \quad I_{S_3} = \pi$$

$$I_S = I_{S_1} + I_{S_2} + I_{S_3} = \frac{3}{8}\pi + \pi = \frac{11}{8}\pi$$ 答. $I_S = \frac{11}{8}\pi$