機械工学科２年生 応用数学 III 中間試験問題 2005 年 12 月 9 日 2 限実施

各人に問題用紙１枚、答案用紙１枚 (表裏使用)、計算用紙１枚を配布する。

答案用紙１枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。

【1】 ２本のベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は成分表示で $\mathbf{A} = (1, -2, 2)$、$\mathbf{B} = (3, 1, -2)$ と表される。このとき下記の (1) 〜 (3) を求めよ。解答用紙の解答欄に答のみを記入すればよい。

(1) $|\mathbf{A}|$　　(2) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$　　(3) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (成分表示で答えよ)

【2】 4 点 P$(1, 0, 1)$, Q$(2, -2, 3)$, R$(4, 1, -1)$, S$(4, 6, 1)$ について下記の (1)、(2) を求めよ。

(1) 三角形 PQR の面積 S　　(2) ４点 P,Q,R,S を頂点とする四面体の体積 V

【3】 下記の等式 (1)〜(8) のうち任意のベクトル $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ について成り立つものに ○ を、そうでないものに × をつけよ。理由は述べず答だけを解答用紙の解答欄に記せ。

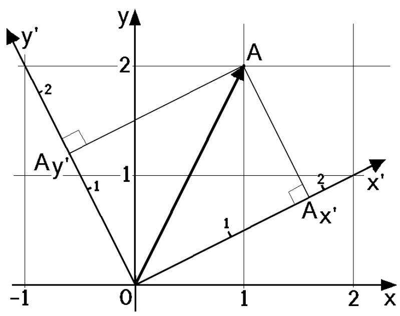
(1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$　(2) $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$　(3) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$　(4) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}$

(5) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$　(6) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$

(7) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$　(8) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

【4】 右図において、座標軸 x', y' は、座標軸 x, y を反時計回りに $\arctan \dfrac{1}{2}$ ラジアン回転させて得られたものである。図の平面上にあるベクトル $\mathbf{A}$ の x, y 成分は $A_x = 1, A_y = 2$ である。このとき ベクトル $\mathbf{A}$ の x' 成分 $A_{x'}$ および y' 成分 $A_{y'}$ を求めよ。

なお、どのような解法によるものでも正答には満点を与えるが、なるべく座標軸方向の単位ベクトル を利用して求めてもらいたい。



【5】 任意の１変数ベクトル関数 $\mathbf{A}(t)$ について、$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}' = AA'$ が成り立つことを示せ。ただし、$A = |\mathbf{A}|$, $A' = \dfrac{d}{dt}A$, $\mathbf{A}' = \dfrac{d}{dt}\mathbf{A}$ とする。

【考え方】$A = |\mathbf{A}|$ から導かれる等式 $A^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ を証明の出発点とするとよい。最低５行以上書くこと。「$A = |\mathbf{A}|$ より $A^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$. $\therefore\ AA' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}'$」というだけの答はゼロ点とする.

【6】 成分表示で $\mathbf{r} = \left(\cos t,\ \sin 2t,\ \cos^2 t\right)$ とパラメータ表示される曲線について $t = \dfrac{\pi}{4}$ に対応する点 P における「曲率半径 ρ」 および「曲率中心 $\mathbf{r}_\mathrm{c}$ の座標」を求めよ。

なお、解答に際しては、下記の諸式を参考にするとよい。

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ のとき　$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$,　$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$,
$v = \lvert\mathbf{v}\rvert$,　$\mathbf{t} = \mathbf{v}/v$,　$\mathbf{a}_\mathrm{n} = \mathbf{a} - (\mathbf{t} \cdot \mathbf{a})\mathbf{t}$,　$a_\mathrm{n} = \lvert\mathbf{a}_\mathrm{n}\rvert$,
$\kappa = a_\mathrm{n}/v^2$,　$\rho = 1/\kappa$,　$\mathbf{n} = \mathbf{a}_\mathrm{n}/a_\mathrm{n}$,　$\mathbf{r}_\mathrm{c} = \mathbf{r} + \rho\mathbf{n}$

福井大学 工学部
機械工学 2 年生

応用数学 III　中間試験　答案用紙

2005 年 12 月 9 日 2 限実施

【1】
20 点

(1) 5 点	(2) 6 点	(3) 9 点 $\Big(\quad , \quad , \quad \Big)$

【2】(1)
20 点　10 点

(2)
10 点

【3】
20 点
=2.5×8

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)

【4】
15 点

【5】
10 点

【6】は裏面に解答せよ. 15 点

学科		学籍番号									氏名		得点	

応用数学III 中間試験 (2005/12/9) の解答

[1] (1) $|\mathbb{A}| = |(1,-2,2)| = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$

(2) $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = (1,-2,2)\cdot(3,1,-2) = 1\cdot 3 + (-2)\cdot 1 + 2\cdot(-2) = 3-2-4 = -3$

(3) $\mathbb{A}\times\mathbb{B} = (1,-2,2)\times(3,1,-2) = (4-2,\ 6+2,\ 1+6) = (2,8,7)$

[2] (1) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (2,-2,3)-(1,0,1) = (1,-2,2)$

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (4,1,-1)-(1,0,1) = (3,1,-2)$

$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2}|(2,8,7)| = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+8^2+7^2} = \frac{1}{2}\sqrt{117} = \frac{3}{2}\sqrt{13}$

(2) $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP} = (4,6,1)-(1,0,1) = (3,6,0)$

$V = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR})\cdot\overrightarrow{PS}\right| = \frac{1}{6}\left|(2,8,7)\cdot(3,6,0)\right| = \frac{1}{6}|6+48| = 9$

[3] (1) ○ (2) × (3) ○ (4) × (5) ○ (6) × (7) ○ (8) ×

[4] x'軸方向の単位ベクトルを $\mathbb{e}_{x'}$, y'軸方向の単位ベクトルを $\mathbb{e}_{y'}$ とすると

$A_{x'} = \mathbb{A}\cdot\mathbb{e}_{x'}$, $A_{y'} = \mathbb{A}\cdot\mathbb{e}_{y'}$ である。

$\mathbb{e}_{x'} \parallel (2,1)$, $|(2,1)| = \sqrt{5}$ であるから $\mathbb{e}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$.

$\mathbb{e}_{y'} \parallel (-1,2)$, $|(-1,2)| = \sqrt{5}$ であるから $\mathbb{e}_{y'} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$.

$\therefore A_{x'} = \mathbb{A}\cdot\mathbb{e}_{x'} = (1,2)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1\cdot 2+2\cdot 1) = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$A_{y'} = \mathbb{A}\cdot\mathbb{e}_{y'} = (1,2)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1\cdot(-1)+2\cdot 2) = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$\therefore A_{x'} = \frac{4}{5}\sqrt{5}$, $A_{y'} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$

[5] $A = |\mathbb{A}|$ より $A^2 = |\mathbb{A}|^2 = \mathbb{A}\cdot\mathbb{A}$. 左右辺両を$t$で微分すると.

$$\frac{d}{dt}A^2 = \left(\frac{d}{dA}A^2\right)\frac{dA}{dt} = 2A\frac{dA}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbb{A}\cdot\mathbb{A} = \frac{d\mathbb{A}}{dt}\cdot\mathbb{A} + \mathbb{A}\cdot\frac{d\mathbb{A}}{dt} = 2\mathbb{A}\cdot\frac{d\mathbb{A}}{dt}$$

$\therefore 2A\frac{dA}{dt} = 2\mathbb{A}\cdot\frac{d\mathbb{A}}{dt}$ $\qquad\therefore AA' = \mathbb{A}\cdot\mathbb{A}'$ が成立する

[6]

$$\boldsymbol{r} = (\cos t,\ \sin 2t,\ \cos^2 t)$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (-\sin t,\ 2\cos 2t,\ \underbrace{-2\cos t\sin t}_{= -\sin 2t})$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = (-\cos t,\ -4\sin 2t,\ -2\cos 2t)$$

$t=\frac{\pi}{4}$ では

$$\boldsymbol{r} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1,\ \frac{1}{2}\right),\quad \boldsymbol{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -1\right),\ \boldsymbol{a} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -4,\ 0\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{2}+0+1} = \sqrt{\frac{3}{2}},\quad a = \sqrt{\frac{1}{2}+16+0}$$

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{v}}{v} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -1\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$a_t = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{t} = \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 + 0 = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a} - a_t\boldsymbol{t} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -4, 0\right) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}},\ -4,\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3},\ -4,\ \frac{1}{3}\right)$$

$$a_n = \sqrt{\frac{2}{9}+16+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{7} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}_n}{a_n} = \frac{\sqrt{3}}{7}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -4, \frac{1}{3}\right)$$

$$\boldsymbol{r}_c = \boldsymbol{r} + \rho\boldsymbol{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{2}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{14}\frac{\sqrt{3}}{7}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -4, \frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{9}{98}\frac{\sqrt{2}}{3},\ 1 - \frac{9}{98}\cdot 4,\ \frac{1}{2} + \frac{9}{98}\cdot\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{23}{49}\sqrt{2},\ \frac{31}{49},\ \frac{26}{49}\right)$$

【全般的注意】

- スカラー量とベクトル量を区別して書きましょう。また内積の・を略してはいけません。
- 行ベクトルは成分を，で区切りましょう（例：（1，2，3））
- $\overrightarrow{PQ}$ は点Pを始点，点Qを終点とする変位ベクトル，$\overline{PQ}$ は点Pと点Qの間の距離です。$\overline{PQ} = |\overrightarrow{PQ}|$ という関係があります。$\overrightarrow{PQ}$ と書くべきところで $\overline{PQ}$ と書いた誤答がありました。