機械工学科２年生 応用数学 III 定期試験問題 2005 年 2 月 14 日 3 限実施

各人に問題用紙１枚、答案用紙１枚 (表裏使用)、計算用紙１枚を配布する。答案用紙１枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。

【1】 $\varphi = x + yz$ とする。$\mathrm{grad}\,\varphi$ は下記のどれと等しいか。ア〜ウの記号で答えよ。

選択肢： ア：(x, y, z) イ：$(1, y, z)$ ウ：$(1, z, y)$

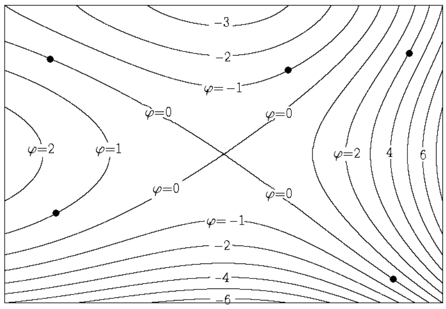
【2】 $\mathbf{A} = (xy,\ z,\ yz)$ とする。$\mathrm{div}\,\mathbf{A}$ は下記のどれと等しいか。ア〜ウの記号で答えよ。

選択肢： ア：$y + z$ イ：z ウ：$2y$

【3】 $\mathbf{A} = (yz,\ z,\ x)$ とする。$\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ の z 成分は下記のどれと等しいか。ア〜ウの記号で答えよ。

選択肢： ア：z イ：0 ウ：$-z$

【4】 右図は、スカラー場 φ の、 $z = 0$ 平面上での値を等高線で表したものである。φ は z に依存しないものとする。即ち、$\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ である。
$|\mathrm{grad}\varphi| = 0$ となる点に「×」印を描き込め。また、「●」印の点 (5 点ある) での $\mathrm{grad}\,\varphi$ の方向を矢印を描いて示せ。矢印の長さは適当でよい。



【5】 下記の空欄 (1)〜(4) にあてはまるものを選択肢から選び、ア〜コ の記号で答えよ。

$\boxed{(1)}$の定理により、空間内のすべての点で $\boxed{(2)}$ なら接線線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ は任意の閉曲線 C に対してゼロとなる。また、$\boxed{(3)}$の定理により、空間内のすべての点で $\boxed{(4)}$ なら法線面積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{S}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ は任意の閉曲面 S に対してゼロとなる。

選択肢： ア：ストークス イ：テイラー ウ：ガウス エ：ピタゴラス オ：ライプニッツ
カ：$\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$ キ：$\mathrm{div}\mathbf{A} \neq 0$ ク：$\mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ケ：$\mathrm{rot}\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ コ：$\mathrm{grad}\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$

【6】 Δe^{-r} の表式を求めよ。ただし、Δ はラプラス演算子であり、$r = |\mathbf{r}|$ 、$\mathbf{r} = (x, y, z)$ である。また $r = 0$ の点は考えなくてよい。どのような求め方をしてもよいが、結果の式は r だけを用いて表せ (即ち $x,\ y,\ z$ を含んではならない)。役に立つ公式を知っている場合は、証明せずに使用してよい。

【7】 曲面 S は $\mathbf{r} = (u \cos v,\ u \sin v,\ u^2 \cos 2v),\ 0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq 2\pi$ とパラメータ表示される。曲面 S の面積 S を求めよ。

福井大学 工学部
機械工学 2 年生

応用数学 III　定期試験　答案用紙

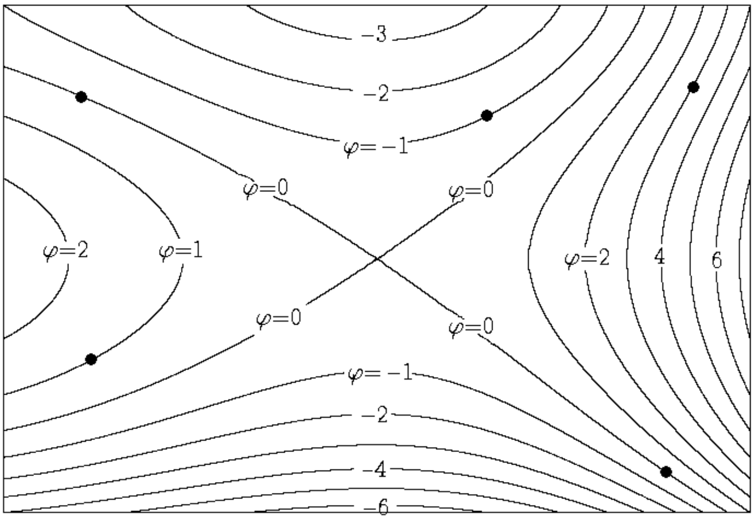
2005 年 2 月 14 日 3 限実施

【1】 10 点

【2】 10 点

【3】 10 点

【4】 14 点



【5】 16 点

(1)	(2)	(3)	(4)

【6】 20 点

【7】 は裏面に解答せよ。(20 点)

学科		学籍番号		氏名		得点	

応用数学III　定期試験　答案用紙

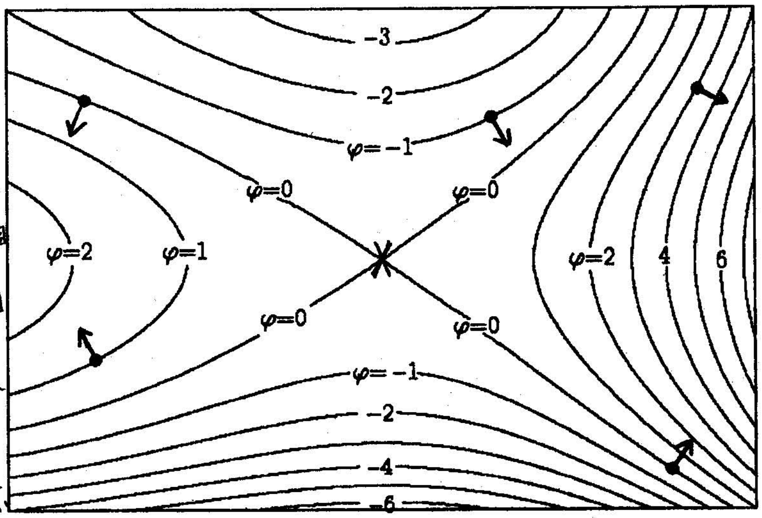
2005 年 2 月 14 日 3 限実施

【1】 10 点　ウ

【2】 10 点　ウ

【3】 10 点　ウ

【4】 14 点



↑ 2点 × 5個

× 4点 × 1個

↑ 正反対は1点、
直交してなければ
(許容誤差 ±10°) 0点、

× が 2つ以上 … 0点

【5】 16 点

(1)	(2)	(3)	(4)
ア	ク	ウ	カ

【6】 20 点

$$\Delta e^{-r} = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)e^{-r}$$ ↑ 10点

式がちがえば 0点

$$= e^{-r} - \frac{2}{r}e^{-r}$$

∂, d 混在に −1点

$$= \frac{r-2}{r}e^{-r}$$ (答) ↑ 20点

【別解1】

$$\nabla e^{-r} = \left(\frac{d}{dr}e^{-r}\right)\nabla r$$ ↑ 3点

$$= -e^{-r}\frac{\mathbf{r}}{r}$$ ↑ 7点

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ に 2点

$\Delta = \nabla \cdot \nabla$ に 2点

$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ に 1点

$$\Delta e^{-r} = \nabla \cdot \nabla e^{-r}$$

$$= -\nabla \cdot \left(\frac{e^{-r}}{r}\mathbf{r}\right)$$

$$= -\left(\frac{d}{dr}\frac{e^{-r}}{r}\right)(\nabla r)\cdot\mathbf{r} - \frac{e^{-r}}{r}\nabla\cdot\mathbf{r}$$

$$= -\frac{-e^{-r}r - e^{-r}}{r^2}\,\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{r} - \frac{e^{-r}}{r}3$$

$$= \left\{\frac{(r+1)\,r^2}{r^2\cdot r} - \frac{3}{r}\right\}e^{-r}$$

ここができてない
→ 10点まで減点

• 抜けは −2点

$$= \frac{r-2}{r}e^{-r}$$ (答) ↑ 20点

【別解2】

$$\frac{\partial}{\partial x}e^{-r} = -e^{-r}\frac{x}{r}$$ ↑ 3点

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{-r} = - = \frac{x^2 + rx^2 - r^2}{r^3}e^{-r}$$ ↑ 10点

$$\Delta e^{-r} = \frac{r^2 + r r^2 - 3r^2}{r^3}e^{-r}$$

$$= \frac{r^3 - 2r^2}{r^3}e^{-r}$$

$$= \frac{r-2}{r}e^{-r}$$ (答)

15点

↑ 20点

【7】 は裏面に解答せよ。(20 点)

学科	学籍番号	氏名	得点
			[1]〜[3] [4] (5) (6) (7)

【7】

$$\mathbf{r} = (u\cos v,\ u\sin v,\ u^2\cos 2v)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (\cos v,\ \sin v,\ 2u\cos 2v) \quad \cdots 2点$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-u\sin v,\ u\cos v,\ -2u^2\sin 2v) \quad \cdots 2点$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (&-2u^2\sin v\sin 2v - 2u^2\cos v\cos 2v,\\ &-2u^2\sin v\cos 2v + 2u^2\cos v\sin 2v,\\ &u\cos^2 v + u\sin^2 v)\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}&\sin v\sin 2v + \cos v\cos 2v\\ &= \sin v\cdot 2\sin v\cos v + \cos v\cdot(\cos^2 v - \sin^2 v)\\ &= \cos v\cdot(2\sin^2 v + \cos^2 v - \sin^2 v)\\ &= \cos v\cdot(\sin^2 v + \cos^2 v)\\ &= \cos v,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sin v\cos 2v - \cos v\sin 2v\\ &= \sin v\cdot(\cos^2 v - \sin^2 v) - \cos v\cdot 2\sin v\cos v\\ &= \sin v\cdot(\cos^2 v - \sin^2 v - 2\cos^2 v)\\ &= \sin v\cdot(-\cos^2 v - \sin^2 v)\\ &= -\sin v.\end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-2u^2\cos v,\ 2u^2\sin v,\ u) \quad ↑8点$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| &= \sqrt{4u^4\cos^2 v + 4u^4\sin^2 v + u^2}\\ &= \sqrt{u^2+4u^4} = u\sqrt{1+4u^2} \quad (\because\ u \geqq 0)\end{aligned}$$

↑12点

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^a du\ u\sqrt{1+4u^2} \quad ↑16点\\ &= 2\pi\left[\frac{1}{12}(1+4u^2)^{3/2}\right]_{u=0}^{u=a}\\ &= \frac{\pi}{6}\left\{(4a^2+1)^{3/2} - 1\right\} \quad ↑20点\end{aligned}$$

[補足] 不定積分 $I = \int u\sqrt{1+4u^2}\,du$ の求め方:

$t = 1+4u^2$ とおくと $dt = 8u\,du$. $\therefore\ u\,du = \frac{1}{8}dt$.

$$I = \int \sqrt{1+4u^2}\cdot u\,du = \int \sqrt{t}\cdot\frac{1}{8}dt = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{1}{12}(1+4u^2)^{3/2} + C$$