機械工学科２年生 応用数学 III 中間試験問題 2004年11月26日２限実施

各人に問題用紙１枚、答案用紙１枚 (表裏使用)、計算用紙１枚を配布する。答案用紙１枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。

【1】 ２本のベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は成分表示で $\mathbf{A}=(5,2,-3)$、$\mathbf{B}=(-2,3,5)$ と表される。このとき下記の (1) 〜 (5) を求めよ。解答用紙の解答欄に答のみを記入すればよい。

(1) $|\mathbf{A}|$ (2) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ (成分表示で) (3) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

(4) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ (成分表示で) (5) $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の交角 (0 °〜180 °の範囲で、単位は度で)

【2】 4点 P$(1,0,2)$, Q$(6,2,-1)$, R$(-1,3,7)$, S$(3,1,3)$ について下記の (1)〜(4) を求めよ。解答用紙の解答欄に答のみを記入すればよい。

(1) ２点 P, Q 間の距離 (2) 三角形 PQR の面積

(3) 三角形 PQR に垂直な単位ベクトル (成分表示で)

(4) ４点 P,Q,R,S を頂点とする四面体の体積

【3】 下記の等式 (1)〜(8) のうち任意のベクトル $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ について成り立つものに ◯ を、そうでないものに × をつけよ。理由は述べず答だけを解答用紙の解答欄に記せ。

(1) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ (2) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ (3) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$

(4) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$ (5) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$

(6) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}=(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}$ (7) $\mathbf{A}\times\mathbf{A}=\mathbf{0}$ (8) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=0$

【4】 任意のベクトル $\mathbf{A}$、 $\mathbf{B}$ に対して $(2\mathbf{A}+3\mathbf{B})\times(\mathbf{A}-\mathbf{B})=\alpha(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ が成立する。 α の値 (整数値である) を解答用紙の解答欄に記せ。

【5】 $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ は以下の選択肢のどれと等しいか？ ア〜コ の記号で答えよ。

選択肢： ア：$|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2$ イ：$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2$ ウ：$|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2+(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2$ エ：$|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2$

オ：$(|\mathbf{A}||\mathbf{B}|+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2$ カ：$(|\mathbf{A}||\mathbf{B}|-\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2$

キ：$|\mathbf{A}|^2+2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+|\mathbf{B}|^2$ ク：$|\mathbf{A}|^2-2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+|\mathbf{B}|^2$ ケ：0 コ：1

【6】 任意のベクトル $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ について $(\mathbf{B}\times\mathbf{A})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = (\mathbf{D}\cdot\mathbf{A})\mathbf{A}$ と書き表すことができる。$\mathbf{D}$ は以下の選択肢のどれと等しいか？ア〜ソ の記号で答えよ。

選択肢： ア：$\mathbf{A}$　イ：$\mathbf{B}$　ウ：$\mathbf{C}$　エ：$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$　オ：$\mathbf{B}\times\mathbf{A}$　カ：$\mathbf{B}\times\mathbf{C}$
キ：$\mathbf{C}\times\mathbf{B}$　ク：$\mathbf{C}\times\mathbf{A}$　ケ：$\mathbf{A}\times\mathbf{C}$　コ：$\mathbf{A}\times\mathbf{A}$
サ：$\mathbf{A}+\mathbf{B}$　シ：$\mathbf{B}+\mathbf{C}$　ス：$\mathbf{C}+\mathbf{A}$　セ：$\mathbf{B}-\mathbf{C}$　ソ：$\mathbf{C}-\mathbf{B}$

【7】 $\mathbf{A}' = \dfrac{d\mathbf{A}(t)}{dt}$ とする。$\dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{|\mathbf{A}(t)|}$ を $\mathbf{A}$ と $\mathbf{A}'$ を用いて表せ。

【8】 任意の 1 変数ベクトル関数 $\mathbf{r}(t)$ および任意の積分区間 $[p, q]$ について、$\mathbf{v}(t) = \dfrac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$、$\mathbf{a}(t) = \dfrac{d\mathbf{v}(t)}{dt}$ とするとき、

$$\int_p^q \mathbf{r}(t)\times\mathbf{a}(t)dt = \mathbf{r}(q)\times\mathbf{v}(q) - \mathbf{r}(p)\times\mathbf{v}(p)$$

が成り立つことを証明せよ。

【9】 成分表示で $\mathbf{r} = \Big(t\cos(t^2),\ t\sin(t^2),\ t^2\Big)$ $(-\infty < t < \infty)$ とパラメータ表示される曲線について、下記の小問 (1), (2) に答えよ。

(1) $0 \le t \le T$ に対応する部分の弧長 s を求めよ。

(2) $t = 0$ に対応する点における接線単位ベクトル $\mathbf{t}$、主法線単位ベクトル $\mathbf{n}$、曲率中心 $\mathbf{r}_{\mathrm{c}}$ を成分表示で求めよ。

【ヒント】(2) の解答にあたっては下記の諸式を参考にするとよい。

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ のとき　$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$,　$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$,
$v = |\mathbf{v}|$,　$\mathbf{t} = \mathbf{v}/v$,　$\mathbf{a}_{\mathrm{n}} = \mathbf{a} - (\mathbf{t}\cdot\mathbf{a})\mathbf{t}$,　$a_{\mathrm{n}} = |\mathbf{a}_{\mathrm{n}}|$,
$\kappa = a_{\mathrm{n}}/v^2$,　$\rho = 1/\kappa$,　$\mathbf{n} = \mathbf{a}_{\mathrm{n}}/a_{\mathrm{n}}$,　$\mathbf{r}_{\mathrm{c}} = \mathbf{r} + \rho\mathbf{n}$

福井大学工学部
機械工学科2年生 応用数学III中間試験答案 (2004年11月26日実施)

[1] 3点×5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
	(, ,)		(, ,)	°

[2] 3点×4

(1)	(2)	(3)	(4)
		±(, ,)	

[3] 3点×8

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)

[4] 3点

[5] 3点

[6] 3点

[7] 10点

[8] 10点

[9]は裏面に解答せよ。(10点×2)

学科	機械	番号		氏名	

得点	

100点満点。

応用数学III (2004年度) 中間試験解答

[1] (1) $|\mathbb{A}| = \sqrt{5^2+2^2+(-3)^2} = \sqrt{38}$

(2) $\mathbb{A}+\mathbb{B} = (5-2,\ 2+3,\ -3+5) = (3,\ 5,\ 2)$

(3) $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = 5\cdot(-2)+2\cdot 3+(-3)\cdot 5 = -10+6-15 = -19$

(4) $\mathbb{A}\times\mathbb{B} = (2\cdot 5-(-3)\cdot 3,\ -3\cdot(-2)-5\cdot 5,\ 5\cdot 3-2\cdot(-2)) = (19,\ -19,\ 19)$

(5) $\cos\theta = \dfrac{\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}}{|\mathbb{A}||\mathbb{B}|} = \dfrac{-19}{\sqrt{38}\sqrt{38}} = -\dfrac{1}{2}$, $\therefore \theta = 120^\circ$

[2] (1) $\overrightarrow{PQ} = (6-1,\ 2-0,\ -1-2) = (5,\ 2,\ -3)$ $\quad\therefore\ \overline{PQ} = \sqrt{5^2+2^2+(-3)^2} = \sqrt{38}$

(2) $\overrightarrow{PR} = (-1-1,\ 3-0,\ 7-2) = (-2,\ 3,\ 5)$

$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} = (19,\ -19,\ 19) = 19\,(1,\ -1,\ 1)$

面積 $= \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right| = \dfrac{1}{2}\cdot 19\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2} = \dfrac{19}{2}\sqrt{3}$

(3) 法線単位ベクトル $= \dfrac{\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|} = \dfrac{19(1,-1,1)}{19\sqrt{3}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(4) 体積 $V = \dfrac{1}{3}\left|\mathbb{n}\cdot\overrightarrow{PS}\right|\cdot$ (△PQRの面積) $= \dfrac{1}{3}\left|\dfrac{\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|}\cdot\overrightarrow{PS}\right|\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right| = \dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{PS}\cdot(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR})\right|$

$= \dfrac{1}{6}(3-1,\ 1-0,\ 3-2)\cdot 19(1,-1,1) = \dfrac{19}{6}(2,1,1)\cdot(1,-1,1) = \dfrac{19}{3}$

[3]

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
×	○	○	○	○	×	○	×

[4] $(2\mathbb{A}+3\mathbb{B})\times(\mathbb{A}-\mathbb{B}) = 2\mathbb{A}\times\mathbb{A} + 3\mathbb{B}\times\mathbb{A} - 2\mathbb{A}\times\mathbb{B} - 3\mathbb{B}\times\mathbb{B}$

$= -3\mathbb{A}\times\mathbb{B} - 2\mathbb{A}\times\mathbb{B} = -5\,\mathbb{A}\times\mathbb{B}$ $\quad\therefore\ \alpha = -5$

[5] $(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot(\mathbb{A}+\mathbb{B}) = (\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot\mathbb{A} + (\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot\mathbb{B} = (\mathbb{A}\times\mathbb{A})\cdot\mathbb{B} + (\mathbb{B}\times\mathbb{B})\cdot\mathbb{A}$

$= \mathbb{0}\cdot\mathbb{B} + \mathbb{0}\cdot\mathbb{A} = 0 + 0 = 0$ $\quad$ 答. ケ

[6] $(\mathbb{B}\times\mathbb{A})\times(\mathbb{C}\times\mathbb{A}) = \{(\mathbb{B}\times\mathbb{A})\cdot\mathbb{A}\}\,\mathbb{C} - \{(\mathbb{B}\times\mathbb{A})\cdot\mathbb{C}\}\,\mathbb{A}$

$= \{(\mathbb{A}\times\mathbb{A})\cdot\mathbb{B}\}\,\mathbb{C} - \{(\mathbb{C}\times\mathbb{B})\cdot\mathbb{A}\}\,\mathbb{A} = \{(\mathbb{B}\times\mathbb{C})\cdot\mathbb{A}\}\,\mathbb{A}$ $\quad\therefore\ \mathbb{D} = \mathbb{B}\times\mathbb{C}$

答. カ

[7] $\dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{|\mathbb{A}(t)|} = \dfrac{d}{dt}(\mathbb{A}\cdot\mathbb{A})^{-1/2} = -\dfrac{1}{2}(\mathbb{A}\cdot\mathbb{A})^{-3/2}(\mathbb{A}'\cdot\mathbb{A} + \mathbb{A}\cdot\mathbb{A}')$

$= -(\mathbb{A}\cdot\mathbb{A})^{-3/2}\,\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}' = -\dfrac{\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}'}{|\mathbb{A}|^3}$

[8] $\displaystyle\int_p^q \mathbb{r}\times\mathbb{a}\,dt = \Big[\mathbb{r}\times\mathbb{v}\Big]_p^q - \int_p^q \underbrace{\mathbb{v}\times\mathbb{v}}_{=\mathbb{0}}\,dt = \Big[\mathbb{r}\times\mathbb{v}\Big]_p^q - \int_p^q \mathbb{0}\,dt$

$= \mathbb{r}(q)\times\mathbb{v}(q) - \mathbb{r}(p)\times\mathbb{v}(p)$

[9] (1) $\mathbf{r} = (t\cos t^2,\ t\sin t^2,\ t^2)$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\cos t^2 + t(-\sin t^2)2t,\ \sin t^2 + t(\cos t^2)2t,\ 2t)$$
$$= (\cos t^2 - 2t^2\sin t^2,\ \sin t^2 + 2t^2\cos t^2,\ 2t)$$
$$v^2 = |\mathbf{v}|^2 = \cos^2 t^2 - 4t^2\sin t^2\cos t^2 + 4t^4\sin^2 t^2$$
$$+\sin^2 t^2 + 4t^2\sin t^2\cos t^2 + 4t^4\cos^2 t^2 + 4t^2$$
$$= 1 + 4t^4 + 4t^2 = (1+2t^2)^2$$
$$v = \sqrt{v^2} = 1+2t^2$$
$$s = \int_0^T v\,dt = \int_0^T (1+2t^2)\,dt = \left[t + \frac{2}{3}t^3\right]_0^T = \underline{T\left(1+\frac{2}{3}T^2\right)}$$

(2) $$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(1+O(t^2),\ O(t^2),\ 2t\right)$$
$$= (O(t),\ O(t),\ 2)$$

← 微分が複雑なので
テーラー展開して 2次以上の項を
扱わずに済むようにした.
(2次以上の項は微分して $t=0$
を代入するとゼロになる.)

$$\cos x = 1 + O(x^2)$$
$$\sin x = x + O(x^3)$$

より $\cos t^2 - 2t^2\sin t^2$
$$= \{1+O(t^4)\} - 2t^2\{t^2+O(t^6)\}$$
$$= 1 + O(t^4) = 1 + O(t^2)$$

$\sin t^2 + 2t^2\cos t^2$
$$= \{t^2 + O(t^6)\} + 2t^2\{1+O(t^4)\}$$
$$= 3t^2 + O(t^6) = O(t^2)$$

$t=0$ で $\mathbf{a} = (0, 0, 2)$,

$\mathbf{v} = (1, 0, 0)$, $v = 1$

$\mathbf{r} = (0, 0, 0)$

$$\underline{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{v}}{v} = \underline{(1, 0, 0)}$$
$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{t})\mathbf{t} = \mathbf{a} = (0, 0, 2)$$
$$a_n = |\mathbf{a}_n| = 2 \quad , \quad \underline{\mathbf{n} = (0, 0, 1)}$$
$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{1}{2}$$
$$\underline{\mathbf{r}_c} = \mathbf{r} + \rho\mathbf{n} = (0,0,0) + \frac{1}{2}(0,0,1) = \underline{\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)}$$

【全般的注意】

- $\dfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}} \overset{(誤)}{=} \dfrac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}$ という式の変形をする人が(例年になく今年は)多数いました。
  内積や外積は約分できません。また「ベクトル割るベクトル」という演算はないので右辺 ($\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}$) は意味のない式です.
- $|\mathbf{A}^3|$ と書かず $|\mathbf{A}|^3$ と書きましょう. 「$\mathbf{A}^3$ は $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})\mathbf{A}$ のことを表す」というようなルールが広く認められているわけではないため, $\mathbf{A}^3$の意味が不明確だからです。
- スカラーのゼロは 0, ベクトルのゼロは $\mathbf{0}$. $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ です.
  ベクトルのゼロを $(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ と書いた答案がありましたが, 勘違いです.
- スカラー量とベクトル量を区別して書きましょう。内積の・と外積の × を省略してはいけません。