機械工学科２年生 応用数学 III 定期試験問題 2004 年 2 月 13 日 2 限実施

各人に問題用紙１枚、答案用紙１枚 (表裏使用)、計算用紙１枚を配布する。答案用紙１枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。

【1】 $\varphi = x^2y + z$、$\mathbf{A} = (z,\, y,\, xz)$ とする。 (1)gradφ、 (2)div$\mathbf{A}$、 (3)rot$\mathbf{A}$ は以下の選択肢のどれと等しいか。それぞれ ア〜コ の記号で答えよ。

選択肢： ア：$(2xy, x^2, 1)$ イ：$(0, 1, x)$ ウ：$(0, 1-z, 0)$ エ：$(0, 1+z, 0)$
オ：$(1-x, x, -1)$ カ：$2xy + x^2 + 1$ キ：$2x^3y$ ク：$1+x$ ケ：$1-z$ コ：$1+z$

【2】 下記の等式 (1)〜(5) のうち任意のスカラー場 φ, 任意のベクトル場 $\mathbf{A}$ について成り立つものに ◯ を、そうでないものに × をつけよ。理由は述べず答だけを答案用紙の解答欄に記せ。

(1) $\nabla \cdot (\nabla\varphi) = 0$ (2) $\nabla \times (\nabla\varphi) = \mathbf{0}$ (3) $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{0}$
(4) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ (5) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{0}$

【3】 下記の空欄 (1)〜(4) にあてはまるものを選択肢から選び、ア〜コ の記号で答えよ。

$\boxed{(1)}$の定理により、空間内のすべての点で $\boxed{(2)}$ なら接線線積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ は任意の閉曲線 C に対してゼロとなる。また、$\boxed{(3)}$の定理により、空間内のすべての点で $\boxed{(4)}$ なら法線面積分 $\displaystyle\int_{\mathrm{S}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ は任意の閉曲面 S に対してゼロとなる。

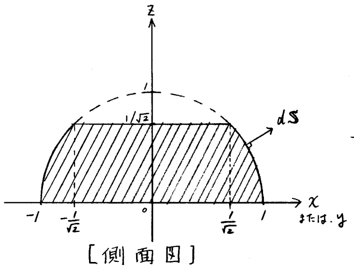
選択肢： ア：テイラー イ：ストークス ウ：ライプニッツ エ：ピタゴラス オ：ガウス カ：grad$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ キ：div$\mathbf{A} = 0$ ク：div$\mathbf{A} \neq 0$ ケ：rot$\mathbf{A} = \mathbf{0}$ コ：rot$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$

【4】 座標原点以外の点で (1)$\Delta\dfrac{1}{r}$ および (2)$\Delta\dfrac{e^{-r}}{r}$ は以下の選択肢のどれと等しいか？ ア〜ス の記号で答えよ。ただし Δ はラプラス演算子であり、$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ である。

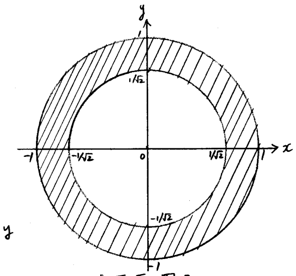
選択肢： ア：0 イ：1 ウ：2 エ：r^{-1} オ：r^{-2} カ：$2r^{-1}$ キ：$2r^{-2}$
ク：e^{-r} ケ：$e^{-r}r^{-1}$ コ：$e^{-r}r^{-2}$ サ：e^{-2r} シ：$e^{-2r}r^{-1}$ ス：$e^{-2r}r^{-2}$

【5】 $\nabla\varphi = (3x^2 + y, x + 2yz, y^2)$ を満たすスカラー場 φ を求めよ。

【6】 曲面 $S = \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1,\ 0 \le z \le \frac{1}{2}\}$ は原点を中心とし半径１の球面 (外側を表面 (おもてめん) とする) の $0 \le z \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の部分である。この曲面上でのベクトル場 $\mathbf{A} = \left(x(x+z)e^{-z^2},\, y(z-2x)e^{-z^2},\, e^{-z^2}\right)$ の法線面積分 $I_{\mathrm{S}} = \displaystyle\int_{\mathrm{S}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ の値を求めよ。面積分をそのまま実行して求めてもよいし、場の積分定理を利用して求めてもよい。



［側面図］



［平面図］

福井大・工・機械工学科 2年生 応用数学III 定期試験答案 (2004年2月13日2限 実施)

【1】 (20点)

(1)	(2)	(3)
ア	ク	ウ

0, 7, 14, 20点

【2】 (20点)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
×	○	×	○	×
4	4	4	4	4

4×5点

【3】 (10点)

(1)	(2)	(3)	(4)
イ	ケ	オ	キ
2	3	2	3点

【4】 (10点)

(1)	(2)
ア	ケ
5	5

【5】 (20点)

【解法1】

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 3x^2 + y \quad \therefore\ \varphi = x^3 + xy + f(y,z)$

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = x + 2yz \quad \therefore\ \varphi = xy + y^2z + g(x,z)$

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = y^2 \quad \therefore\ \varphi = y^2z + h(x,y)$

$\therefore\ f(y,z) = y^2z,\ g(x,z) = x^3,\ h(x,y) = x^3 + xy$

とおれば よい

$\therefore\ \varphi = x^3 + xy + y^2z$ は ひとつの解である

一般解は $\varphi = x^3 + xy + y^2z + C$ (Cは定数)である。 ↑20点

f, g, h を C と書く → さいごの答にもCがあって 10点

さいごの答にCがない → 5点

$\underbrace{\text{完璧なロジック}}^{\text{が明記されている}}$ なら20点

答のみ(と同等) … Cがあるなら5点

Cがないなら 2点

このとちゅうで 答ちがうなら 0点

【解法2】

$\mathbb{A} = \nabla\varphi = (3x^2 + y,\ x + 2yz,\ y^2)$

$\mathrm{rot}\,\mathbb{A} = (2y - 2y,\ 0 - 0,\ 1 - 1) = (0,0,0)$ より

φは 確かに存在し 以下の式をみたす] 1点

$\varphi(\xi,\eta,\zeta) = \varphi(0,0,0) + \int_C \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r}$] 4点

ここで C は $(0,0,0)$を始点, (ξ,η,ζ)を終点とする $\overbrace{\text{曲線}}^{\text{任意の}}$である

$C:\ \mathbb{r} = (\xi,\eta,\zeta)t \quad (0 \leq t \leq 1)$

とると.

tぬけ → 10点まで

$\varphi(\xi,\eta,\zeta) = \varphi(0,0,0) + \int_0^1 (3\xi^2t^2 + \eta t,\ \xi t + 2\eta\zeta t^2,\ \eta^2t^2)\cdot(\xi,\eta,\zeta)\,dt$ ↑12点

$= \varphi(0,0,0) + (3\xi^3 + 2\eta^2\zeta + \eta^2\zeta)\int_0^1 t^2\,dt + (\xi\eta + \xi\eta)\int_0^1 t\,dt$

$= \varphi(0,0,0) + \xi^3 + \eta^2\zeta + \xi\eta$

計算ミス −2点ずつ

$\therefore\ \varphi(x,y,z) = x^3 + xy + y^2z + C$

ここがちがうのは 15点まで

$\underbrace{C = \varphi(0,0,0)}_{1点}$ は任意の定数 となる ↑20点

【6】は裏面に解答せよ。(20点)

【番号】	【氏名】	【得点】

1	2	3	4	5	6	合計

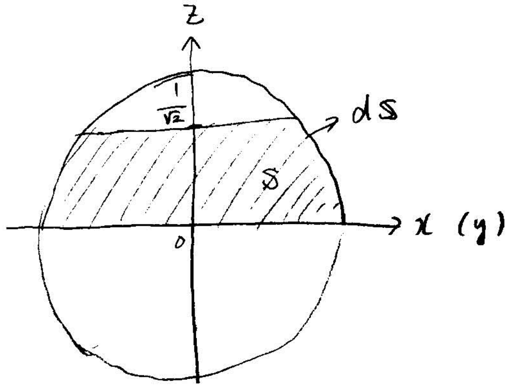
[6]
問

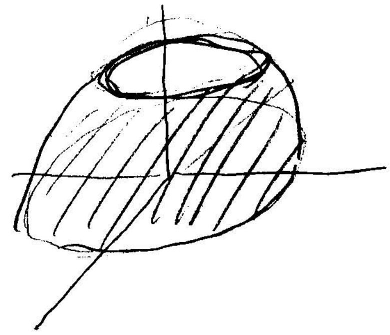
$$\mathbb{A} = \left(x(x+z)\, e^{-z^2},\ y(z-2x)\, e^{-z^2},\ e^{-z^2} \right)$$

曲面 S：原点を中心と、半径1の球面の、$0 \leqq z \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ の部分
球の外側を表(おもて)面とする

法線面積分　$I_S = \int_S \mathbb{A} \cdot d\mathbb{S}$ の値を求めよ。

(正攻法で法線面積分として計算してもよいし、場の積分定理を利用してもよい。)





答

$$\mathbb{A} = \left(x^2+xz,\ yz-2xy,\ 1 \right) e^{-z^2}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbb{A} = (2x+z+z-2x-2z)\, e^{-z^2} = 0$$

$V : \left\{ (x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ とすると $I_V = \int_V (\mathrm{div}\,\mathbb{A})\, dV = 0$

$S_1 : \left\{ (x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqq 1,\ z=0 \right\}$，下向き，$I_{S_1} = \int_{S_1} \mathbb{A} \cdot d\mathbb{S}$
$S_2 : \left\{ (x,y,z) \mid x^2+y^2 \leqq \frac{1}{2},\ z=\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$，上向き，$I_{S_2} = \int_{S_2} \mathbb{A} \cdot d\mathbb{S}$
とすると

$$I_{S_1} + I_{S_2} + I_S = I_V = 0$$ (∵ ガウスの発散定理)

$$\therefore\ I_S = -I_{S_1} - I_{S_2}$$

S_1 上では　$d\mathbb{S} = -\mathbb{e}_z\, dx\,dy$，$\mathbb{A} \cdot d\mathbb{S} = -A_z\, dx\,dy = -e^{-0^2} dx\,dy = -dx\,dy$

$$I_{S_1} = -\int_{S_1} dx\,dy = -\pi \cdot 1^2 = -\pi$$

S_2 上では　$d\mathbb{S} = \mathbb{e}_z\, dx\,dy$，$\mathbb{A} \cdot d\mathbb{S} = A_z\, dx\,dy = e^{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} dx\,dy = e^{-1/2} dx\,dy$

$$I_{S_2} = e^{-1/2} \int_{S_2} dx\,dy = e^{-1/2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi}{2\sqrt{e}}$$

$$\therefore\ I_S = \pi - \frac{\pi}{2\sqrt{e}} = \pi\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{e}}\right)$$

[6]
別解

出題 2/2　　04/2/8

$$dS = \frac{\mathbf{r}}{r}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$ 　但し、$r=1$, $x=\sin\theta\cos\varphi$, $y=\sin\theta\sin\varphi$, $z=\cos\theta$

$x^2+y^2=\sin^2\theta$ 」4

$$\mathbf{A}\cdot dS = \frac{e^{-z^2}}{r}\left(x^3+x^2z+y^2z-2xy^2+z\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{e^{-z^2}}{r}\left(x^3+(x^2+y^2)z-2xy^2+z\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \underbrace{e^{-\cos^2\theta}\left(\sin^3\theta\cos^3\varphi+\sin^2\theta\cos\theta-2\sin^3\theta\cos\varphi\sin^2\varphi+\cos\theta\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}$$ 」8

$$I_s = \int_S \mathbf{A}\cdot dS = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\cdot\sin\theta\int_0^{2\pi} d\varphi \;〃$$ 」10

ここで
$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^3\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \int_{\sin 0}^{\sin 2\pi}(1-\sin^2\varphi)\, d(\sin\varphi) = \int_0^0 (1-s^2)\, ds = 0\\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi = \int_{\sin 0}^{\sin 2\pi}\sin^2\varphi\, d(\sin\varphi) = 0\end{cases}$$

$$\therefore\ I_s = 2\pi\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^{-\cos^2\theta}(\sin^2\theta+1)\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= \pi\int_{\cos^2(\pi/2)}^{\cos^2(\pi/4)} e^{-\cos^2\theta}(2-\cos^2\theta)\, d(\cos^2\theta) \qquad (\because\ d(\cos^2\theta) = -2\sin\theta\cos\theta\, d\theta)$$

$$= \pi\int_0^{1/2} e^{-t}(2-t)\, dt$$

$$= \pi\left\{\left[(t-2)e^{-t}\right]_0^{1/2} + \int_0^{1/2} e^{-t}\, dt\right\}$$

$$= \pi\left[(t-1)e^{-t}\right]_0^{1/2} = \pi\left(-\frac{1}{2}e^{-1/2}+e^{-0}\right) = \pi\left(1-\frac{1}{2\sqrt{e}}\right)$$ 」20