機械工学科２年生 応用数学 III 中間試験問題 2003 年 11 月 21 日２限実施

各人に問題用紙１枚、答案用紙１枚 (表裏使用)、計算用紙１枚を配布する。答案用紙１枚のみを提出し、問題用紙と計算用紙は持ち帰れ。

【1】 ２本のベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は成分表示で $\mathbf{A} = (2, 1, 2)$、$\mathbf{B} = (4, -1, 1)$ と表される。このとき下記の (1) 〜 (6) を求めよ。解答用紙の解答欄に答のみを記入すればよい。

(1) $|\mathbf{A}|$　(2) $\mathbf{A}$ と同じ方向をもつ単位ベクトル (成分表示で)　(3) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (成分表示で)

(4) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$　(5) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (成分表示で)　(6) $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の交角 (0 °〜180 °の範囲で、単位は度で)

【2】 4 点 P$(-1, 0, -1)$, Q$(1, 1, 1)$, R$(3, -1, 0)$, S$(3, 3, -2)$ について下記の (1)〜(4) を求めよ。解答用紙の解答欄に答のみを記入すればよい。

(1) ２点 P, Q 間の距離　(2) 三角形 PQR の面積

(3) 三角形 PQR に垂直な単位ベクトル (成分表示で)

(4) ４点 P,Q,R,S を頂点とする四面体の体積

【3】 下記の等式 (1)〜(8) のうち任意のベクトル $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ について成り立つものに ◯ を、そうでないものに × をつけよ。理由は述べず答だけを解答用紙の解答欄に記せ。

(1) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$　(2) $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}$　(3) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$

(4) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$　(5) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = 0$　(6) $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$

(7) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$　(8) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B}$

【4】 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ は以下の選択肢のどれと等しいか？ ア〜ク の記号で答えよ。

選択肢：　ア：$|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2$　イ：$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$　ウ：$|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$　エ：$|\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$

オ：$(|\mathbf{A}||\mathbf{B}| + \mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$　カ：$(|\mathbf{A}||\mathbf{B}| - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$

キ：$|\mathbf{A}|^2 + 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + |\mathbf{B}|^2$　ク：$|\mathbf{A}|^2 - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + |\mathbf{B}|^2$

【5】 $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = \alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B}$ と書き表すことができる。α と β は以下の選択肢のどれと等しいか？α, β のそれぞれについて ア〜セ の記号で答えよ。

選択肢： ア：$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ イ：$\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}$ ウ：$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ エ：$\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}$ オ：$\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$ カ：$\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}$
キ：$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ ク：$\mathbf{C}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{A})$ ケ：$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{D})$ コ：$\mathbf{D}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{A})$
サ：$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})$ シ：$\mathbf{D}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$ ス：$\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})$ セ：$\mathbf{D}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{B})$

【6】 $\dfrac{d}{dt}|\mathbf{A}(t)|$ は以下の選択肢のどれと等しいか？ ア〜シ の記号で答えよ。ただし $\mathbf{A}' = \dfrac{d\mathbf{A}(t)}{dt}$ とする。

選択肢： ア：$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$ イ：$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}'$ ウ：$\mathbf{A}'\cdot\mathbf{A}'$ エ：$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}/|\mathbf{A}|$ オ：$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}'/|\mathbf{A}|$
カ：$\mathbf{A}'\cdot\mathbf{A}'/|\mathbf{A}|$ キ：$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}/|\mathbf{A}'|$ ク：$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}'/|\mathbf{A}'|$ ケ：$\mathbf{A}'\cdot\mathbf{A}'/|\mathbf{A}'|$
コ：$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}/|\mathbf{A}|^2$ サ：$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}'/|\mathbf{A}||\mathbf{A}'|$ シ：$\mathbf{A}'\cdot\mathbf{A}'/|\mathbf{A}'|^2$

【7】 任意の１変数ベクトル関数 $\mathbf{v}(t)$ および任意の積分区間 $[a,b]$ について

$$\int_a^b \mathbf{v}(t)\cdot\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}dt = \frac{1}{2}\mathbf{v}(b)\cdot\mathbf{v}(b) - \frac{1}{2}\mathbf{v}(a)\cdot\mathbf{v}(a)$$

が成り立つことを証明せよ。

【8】 成分表示で $\mathbf{r} = \left(t,\ \frac{1}{2}t^2,\ 0\right)$ $(-\infty < t < \infty)$ とパラメータ表示される曲線について、下記の小問 (1), (2) に答えよ。(1) については計算過程を必ず記せ。

(1) 曲率中心 $\mathbf{r}_{\mathrm{c}}$ の x, y, z 座標を t の関数として求めよ。
(2) $\mathbf{r}_{\mathrm{c}}$ の描く軌跡を答案用紙のグラフに描き込め。

【ヒント】(1) の解答にあたっては下記の諸式を参考にするとよい。

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ のとき $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$,
$v = |\mathbf{v}|$, $\mathbf{t} = \mathbf{v}/v$, $\mathbf{a}_{\mathrm{n}} = \mathbf{a} - (\mathbf{t}\cdot\mathbf{a})\mathbf{t}$, $a_{\mathrm{n}} = |\mathbf{a}_{\mathrm{n}}|$,
$\kappa = a_{\mathrm{n}}/v^2$, $\rho = 1/\kappa$, $\mathbf{n} = \mathbf{a}_{\mathrm{n}}/a_{\mathrm{n}}$, $\mathbf{r}_{\mathrm{c}} = \mathbf{r} + \rho\mathbf{n}$

福井大学 工学部
機械工学科 2年生 応用数学III 中間試験答案（2003年11月21日 2限実施）

[1] 3点×6

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
	(, ,)	(, ,)		(, ,)	°

[2] 3点×4

(1)	(2)	(3)	(4)
		(, ,)	

[3] 3点×8

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)

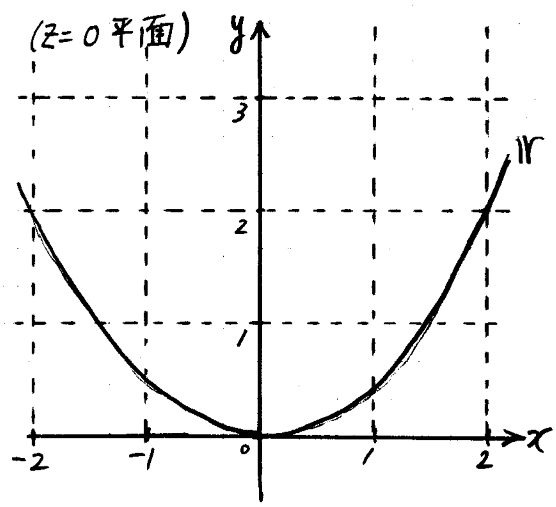
[4] 4点

[5] 2点×2

α	β

[6] 4点

[7] 10点



[8] (1)は裏面に解答せよ。(2)は右の図に描き込め。
20点 4点

学科	機械	番号		氏名	

得点	

100点満点

福井大学工学部
機械工学科2年生対象 応用数学III 中間試験 (2003年11月21日実施)の解答

[1] (1) $\mathbf{A}=(2,1,2)$ なので $|\mathbf{A}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

(2) $\hat{\mathbf{A}}=\dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

(3) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=(2,1,2)+(4,-1,1)=(2+4,\,1-1,\,2+1)=(6,0,3)$

(4) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(2,1,2)\cdot(4,-1,1)=2\cdot4+1\cdot(-1)+2\cdot1=8-1+2=9$

(5) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(2,1,2)\times(4,-1,1)=$ 「外積の成分表示の公式」 $=(1+2,\,8-2,\,-2-4)=(3,6,-6)$

(6) $|\mathbf{B}|=\sqrt{4^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, θを$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$の交角とすると内積の定義は

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$. $\therefore \cos\theta=\dfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}=\dfrac{9}{3\cdot3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\therefore \theta=45^\circ$

㊟ (2),(3),(5)は各成分に1点ずつ与える.

[2] (1) $\overrightarrow{PQ}=(1-(-1),\,1-0,\,1-(-1))=(2,1,2)$ $\quad PQ=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

(2) 三角形PQRの面積 $S_{\triangle PQR}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|=\dfrac{1}{2}|(2,1,2)\times(4,-1,1)|=\dfrac{1}{2}|(3,6,-6)|$

$=\dfrac{3}{2}|(1,2,-2)|=\dfrac{3}{2}\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{9}=\dfrac{9}{2}$ $\left(\dfrac{1}{2}|(3,6,-6)|=\dfrac{1}{2}\sqrt{3^2+6^2+(-6)^2}=\dfrac{9}{2}\right)$

(3) 求める単位ベクトルは、$\mathbf{n}=\dfrac{\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|}=\dfrac{1}{9}(3,6,-6)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$

またはその-1倍 $-\mathbf{n}=\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$ ← どちらを答えても正解である.

(4) 求める体積Vは.(3)の$\mathbf{n}$を使うと, $V=\dfrac{1}{3}|\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{PS}|\,S_{\triangle PQR}$ と書ける.

∵(錐体の体積)$=\dfrac{1}{3}\times$(底面積)$\times$(高さ)

$\therefore V=\dfrac{1}{3}\left|\dfrac{\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|}\cdot\overrightarrow{PS}\right|\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|=\dfrac{1}{6}|(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR})\cdot\overrightarrow{PS}|$

$=\dfrac{1}{6}(3,6,-6)\cdot(4,3,-1)=6$

㊟ 講義では平行六面体の体積のみを論じたためか、正解者が少なかった.

㊟ 計算の手間軽減のため,[1]の$\mathbf{A}$が$\overrightarrow{PQ}$に,$\mathbf{B}$が$\overrightarrow{PR}$に等しくしてあります.

[3] (1) ○ $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ は内積の交換則を表している.

(2) × 外積は交換則でなく反交換則($\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A}$)に従う.

(3) ○ スカラー三重積のもつ巡回置換対称性を表している.

(4) ○ $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$ だから恒等式である

(5) × $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=|\mathbf{A}|^2$ なので $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=0$ となるのは零ベクトルだけである.

(6) ○ $\mathbf{A}\times\mathbf{A}=-\mathbf{A}\times\mathbf{A}$ $\therefore 2\mathbf{A}\times\mathbf{A}=0$ $\therefore \mathbf{A}\times\mathbf{A}=0$ として導ける.

(7) ○ ,(8) × : ベクトル三重積の公式である

[4] エ $\quad \because (\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot(\mathbb{A}\times\mathbb{B}) = \mathbb{A}\cdot\{\mathbb{B}\times(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\} = \mathbb{A}\cdot\{(\mathbb{B}\cdot\mathbb{B})\mathbb{A} - (\mathbb{B}\cdot\mathbb{A})\mathbb{B}\}$

$$= (\mathbb{A}\cdot\mathbb{A})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{B}) - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})(\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}) = |\mathbb{A}|^2|\mathbb{B}|^2 - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})^2$$

あるいは $(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot(\mathbb{A}\times\mathbb{B}) = |\mathbb{A}\times\mathbb{B}|^2 = |\mathbb{A}|^2|\mathbb{B}|^2\sin^2\theta = |\mathbb{A}|^2|\mathbb{B}|^2(1-\cos^2\theta)$

$$= |\mathbb{A}|^2|\mathbb{B}|^2 - \{|\mathbb{A}|\,|\mathbb{B}|\cos\theta\}^2 = |\mathbb{A}|^2|\mathbb{B}|^2 - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})^2$$

[5] セ (α), サ (β) $\quad \because (\mathbb{A}\times\mathbb{B})\times(\mathbb{C}\times\mathbb{D}) = \{\mathbb{A}\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{D})\}\mathbb{B} - \{\mathbb{B}\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{D})\}\mathbb{A}$

(注) (α)に「$-$ス」(マイナス)は0点. $\quad \therefore \beta = \mathbb{A}\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{D}),\ \alpha = -\mathbb{B}\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{D}) = -\mathbb{D}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{C}) = \mathbb{D}\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{B})$

[6] オ $\quad \because \dfrac{d}{dt}|\mathbb{A}| = \dfrac{d}{dt}\sqrt{\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}}}\,2\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}' = \dfrac{\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}'}{|\mathbb{A}|}$

[7] 部分積分法はベクトルの内積についても成立するので

$$\int_a^b \mathbb{v}(t)\cdot\frac{d\mathbb{v}(t)}{dt}dt = [\mathbb{v}(t)\cdot\mathbb{v}(t)]_a^b - \int_a^b \frac{d\mathbb{v}(t)}{dt}\cdot\mathbb{v}(t)\,dt$$

$$\therefore 2\int_a^b \mathbb{v}(t)\cdot\frac{d\mathbb{v}(t)}{dt}dt = \mathbb{v}(b)\cdot\mathbb{v}(b) - \mathbb{v}(a)\cdot\mathbb{v}(a)$$

$$\therefore \int_a^b \mathbb{v}(t)\cdot\frac{d\mathbb{v}(t)}{dt}dt = \frac{1}{2}\mathbb{v}(b)\cdot\mathbb{v}(b) - \frac{1}{2}\mathbb{v}(a)\cdot\mathbb{v}(a)$$ 証明終り

(注) スカラーとベクトルを区別して表記していない答案は −2点. (v はスカラー, ベクトルは $\mathbb{v}$ か $\vec{v}$)
内積を表す • を省略した答案は −1点. (•を略してよいのは $\mathbb{v}\cdot\mathbb{v} = \mathbb{v}^2$ だけ)

[8] (1) $\mathbb{r} = (t, \frac{1}{2}t^2, 0)$, $\quad \mathbb{v} = \dfrac{d\mathbb{r}}{dt} = (1, t, 0)$, $\quad \mathbb{a} = \dfrac{d\mathbb{v}}{dt} = (0,1,0)$ ↑4点.

$\mathbb{a}_n = \mathbb{a} - \left(\dfrac{\mathbb{v}}{v}\cdot\mathbb{a}\right)\dfrac{\mathbb{v}}{v} = \mathbb{a} - \dfrac{\mathbb{v}\cdot\mathbb{a}}{v^2}\mathbb{v}$, $\quad v^2 = 1+t^2$, $\ \mathbb{v}\cdot\mathbb{a} = t$

$\therefore \mathbb{a}_n = (0,1,0) - \dfrac{t}{1+t^2}(1,t,0) = \dfrac{1}{1+t^2}(-t,1,0)$ ↑10点.

$a_n = \dfrac{1}{1+t^2}\sqrt{t^2+1} = (1+t^2)^{-1/2}$

$K = a_n/v^2 = (1+t^2)^{-1/2}/(1+t^2) = (1+t^2)^{-3/2}$, $\quad \rho = \dfrac{1}{K} = (1+t^2)^{3/2}$ ↑15点.

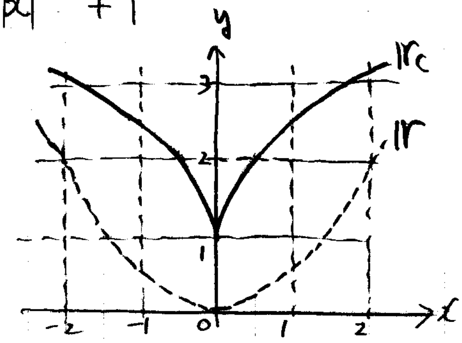
$\mathbb{r}_c = \mathbb{r} + \rho\,\mathbb{n} = \mathbb{r} + \dfrac{\rho}{a_n}\mathbb{a}_n$

$= (t, \frac{1}{2}t^2, 0) + (1+t^2)^{3/2}(1+t^2)^{1/2}\dfrac{1}{1+t^2}(-t,1,0)$

$= (t, \frac{1}{2}t^2, 0) + (1+t^2)(-t,1,0) = (-t^3, \frac{3}{2}t^2+1, 0)$ ↑20点.

(2) $\begin{cases} x = -t^3 \\ y = \frac{3}{2}t^2+1 \end{cases} \longrightarrow t = -x^{1/3}$ ($x^{1/3}$ は $|x|^{1/3}$ に x の符号をつけたものとする) $\rightarrow y = \frac{3}{2}|x|^{2/3}+1$

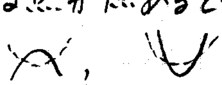
$x=0$ で $y=1$, $\quad x=\pm1$ で $y=\frac{5}{2}$



(注) $\mathbb{r}$ の内側に $\mathbb{r}_c$ があれば…2点.

$\mathbb{r}_c$ が $\mathbb{r}$ に接する点が1点あると…1点.

他は…0点.



完全な正答は1名のみ. (4点)