機械工学科２年生 応用数学 III 定期試験問題 2003 年２月 14 日２限実施

答案用紙は縦長に置いて使用し、最上部に学科・学籍番号・氏名を明記せよ。

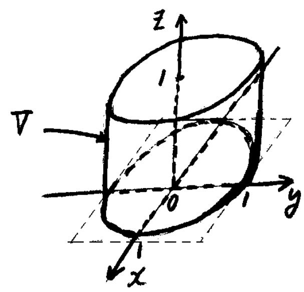
【1】(i) $\varphi = x^2y + z, \quad \mathbf{A} = \mathrm{grad}\,\varphi$ とする。$\mathbf{A}$ を成分表示で求めよ。

(ii) $\mathbf{B} = (x^3,\, x^2y,\, xy^2), \quad \psi = \mathrm{div}\,\mathbf{B}$ とする。ψ を求めよ。

(iii) $\mathbf{C} = (x - 3y + 2z,\ y^2,\ y + z)$、 $\mathbf{D} = \mathrm{rot}\,\mathbf{C}$ とする。$\mathbf{D}$ を成分表示で求めよ。

【2】「ベクトル場 $\mathbf{A}$ がいたるところで $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{0}$ を満たすならば、接線線積分 $I = \int_{\mathrm{C}} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ は、曲線 C の始点と終点だけに依存し、途中の経路によらない」ことをストークスの定理を使って証明せよ。

【3】３次元領域 V を $\{(x, y, z)|x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$ (半径１、高さ１の円筒の内部である) とし、スカラー場 φ を $\varphi(x, y, z) = \dfrac{z}{x^2 + y^2 + 1}$ とするとき、場 φ の 領域 V での体積積分 $I_{\mathrm{V}} = \int_{\mathrm{V}} \varphi(x, y, z)\, dxdydz$ を計算せよ。積分のやりやすい座標に変換して計算するとよい。



【4】スカラー場 $\varphi(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}}$ について下記の問に答えよ。
ただし、 $\mathbf{r} = (x, y, z),\ r = |\mathbf{r}|$ であり、a と b は正の定数である。

(i) $\mathrm{grad}\,\varphi$ を求めよ。

(ii) $\triangle\,\varphi$ を求めよ。ただし $\triangle$ はラプラス演算子である。

(iii) ガウスの発散定理を述べよ。

(iii) 体積積分 $I_{\mathrm{V}} = \int_{\mathrm{V}} \triangle\,\varphi\, dv$ を求めよ。ただし V は原点を中心とする半径 b の球の内部である。

[1] (i) $\mathbb{A} = \mathrm{grad}\,\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2y+z) = (2xy,\ x^2,\ 1)$

(ii) $\psi = \mathrm{div}\,\mathbb{B} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(x^3, x^2y, xy^2) = 3x^2 + x^2 + 0 = 4x^2$

(iii) $\mathbb{D} = \mathrm{rot}\,\mathbb{C} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (x-3y+2z,\ y^2,\ y+z) = (1-0,\ 2-0,\ 0-(-3)) = (1, 2, 3)$

[2] 曲線C_1, C_2は始点同士が等しく終点同士も等しいとする

$I_1 = \int_{C_1} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r}$, $I_2 = \int_{C_2} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r}$ とする

閉曲線 C を C_1 と C_2 を逆向きにしたもの$(-C_2)$をつないだものとし、

$I_c = \oint_c \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r}$ とすると、 $I_c = I_{C_1} - I_{C_2}$ である

ストークスの定理より $I_c = \oint_c \mathbb{A}\cdot d\mathbb{r} = \int_S \mathrm{rot}\,\mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}$

但し Sは Cをふちとする曲面である。 $\mathrm{rot}\,\mathbb{A} = 0$ ならば $I_c = 0$ $\therefore I_{C_1} = I_{C_2}$

$\therefore$ $\mathbb{A}$の接線線積分は途中の経路によらない

[3] $I_V = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 dz \int_0^1 \rho\, d\rho\, \frac{z}{\rho^2+1}$

$= \left\{\int_0^{2\pi} d\varphi'\right\}\left\{\int_0^1 z\, dz\right\}\left\{\int_0^1 \frac{\rho}{\rho^2+1} d\rho\right\}$

$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2}\log(\rho^2+1)\right]_{\rho=0}^{\rho=1}$

$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\log 2 = \frac{\pi}{2}\log 2$

(注意) 左式のφ'は2次元極座標の方位角である。問題文中で、φを場を表すために使用済みなので、方位角には別の記号を使わねばならなくなったので、通常のφのかわりにφ'としたものである。

[4] (i) $\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla(r^2+a^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(r^2+a^2)^{-3/2}\cdot 2r \cdot \frac{\mathbb{r}}{r} = -(r^2+a^2)^{-3/2}\,\mathbb{r}$

(ii) $\Delta\varphi = \nabla\cdot\left\{-(r^2+a^2)^{-3/2}\mathbb{r}\right\} = -\left\{\nabla(r^2+a^2)^{-3/2}\right\}\cdot\mathbb{r} - (r^2+a^2)^{-3/2}\nabla\cdot\mathbb{r}$

$= -\left(-\frac{3}{2}\right)(r^2+a^2)^{-5/2}\cdot 2r\cdot\frac{\mathbb{r}}{r}\cdot\mathbb{r} - 3(r^2+a^2)^{-3/2}$

$= 3r^2(r^2+a^2)^{-5/2} - 3(r^2+a^2)^{-3/2}$

$= 3(r^2+a^2)^{-5/2}\left\{r^2 - (r^2+a^2)\right\} = -3a^2(r^2+a^2)^{-5/2}$

(iii) Sを閉曲面とし、外側を表面とする。VをSの囲む体積領域とする。このとき任意のベクトル場$\mathbb{A}$に対し $\int_V \mathrm{div}\,\mathbb{A}\, dv = \int_S \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}$ が成立する

(iv) $I_V = \int_V \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\varphi)\, dv = \int_S (\mathrm{grad}\,\varphi)\cdot d\mathbb{S}$

$\mathrm{grad}\,\varphi$はSの法線方向を向き、 $|\mathrm{grad}\,\varphi| = -r(r^2+a^2)^{-3/2} \underset{S上で}{=} -b(a^2+b^2)^{-3/2}$

$\therefore I_V = |\mathrm{grad}\,\varphi| \int_S dS = -b(a^2+b^2)^{-3/2}\cdot 4\pi b^2 = -4\pi b^3(a^2+b^2)^{-3/2}$

$= -4\pi\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)^{-3/2}$