機械工学科２年生 応用数学 III 中間試験問題 2002 年 11 月 22 日 2 限実施

答案用紙は縦長に置いて使用し、最上部に学科・学籍番号・氏名を明記せよ。

【1】２本のベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は成分表示で $\mathbf{A} = (1, 2, -7)$、$\mathbf{B} = (1, -1, -4)$ と表される。このとき下記の (i) 〜 (iv) を求めよ。(iii) は成分表示で答えよ。

(i) $|\mathbf{A}|$　　(ii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$　　(iii) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$　　(iv) $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の交角 θ

【2】任意のベクトル $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ について　$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2$　が成り立つことを示せ。

【ヒント】何通りかの示し方があるが、内積・外積の幾何学的定義を用いるのがもっとも簡単である。

【3】任意のベクトル関数 $\mathbf{A}(t)$ について下記の等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{d\hat{\mathbf{A}}}{dt} = -\frac{\hat{\mathbf{A}} \times (\hat{\mathbf{A}} \times \mathbf{A}')}{|\mathbf{A}|}$$

ただし　$\hat{\mathbf{A}} = \dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$、$\mathbf{A}' = \dfrac{d\mathbf{A}}{dt}$　とする。

【4】点 P の位置ベクトル $\mathbf{r}$ は時刻 t のベクトル関数として下式で与えられるとする。

$$\mathbf{r}(t) = \Big(\cos t,\ \ \sin 2t,\ \ \cos^2 t\Big)$$

このとき $t = \dfrac{\pi}{4}$ における速さ (速度の大きさ) v、加速度の接線成分 a_t、法線成分 a_n を求めよ。

応数III 中間試験(2002/11/22) 解答

[1] 40点

(i) 10点 $|\mathbb{A}| = \sqrt{1^2+2^2+(-7)^2} = \sqrt{1+4+49} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

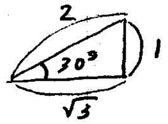
(ii) 10点 $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + (-7)\cdot(-4) = 1 - 2 + 28 = 27$

(iii) 10点 $\mathbb{A}\times\mathbb{B} = (-8-7,\ -7+4,\ -1-2) = (-15,\ -3,\ -3)$

各成分3点，完答なら10点.

(iv) 10点 $|\mathbb{B}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+(-4)^2} = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$$\cos\theta = \frac{\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}}{|\mathbb{A}||\mathbb{B}|} = \frac{27}{3\sqrt{6}\ 3\sqrt{2}} = \frac{\cancel{27}^{\,3}}{\cancel{18}_{\,2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



交角は $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で表すことにすると. $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

[2] 20点

$\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ の交角を θ とすると $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$.

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = |\mathbb{A}||\mathbb{B}|\cos\theta, \qquad |\mathbb{A}\times\mathbb{B}| = |\mathbb{A}||\mathbb{B}|\sin\theta$$

$$\therefore |\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}|^2 + |\mathbb{A}\times\mathbb{B}|^2 = |\mathbb{A}|^2|\mathbb{B}|^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = |\mathbb{A}|^2|\mathbb{B}|^2$$

[3] 20点

$$(\text{左辺}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|\mathbb{A}|}\mathbb{A}\right) = \left(\frac{d}{dt}\frac{1}{|\mathbb{A}|}\right)\mathbb{A} + \frac{1}{|\mathbb{A}|}\frac{d}{dt}\mathbb{A} = -\frac{1}{|\mathbb{A}|^2}\left(\frac{d}{dt}|\mathbb{A}|\right)\mathbb{A} + \frac{\mathbb{A}'}{|\mathbb{A}|}$$

ここで $\dfrac{d}{dt}|\mathbb{A}| = \dfrac{d}{dt}(\mathbb{A}\cdot\mathbb{A})^{1/2} = \dfrac{1}{2}(\mathbb{A}\cdot\mathbb{A})^{-1/2}\dfrac{d}{dt}(\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}) = \dfrac{1}{2}(|\mathbb{A}|^2)^{-1/2}\,2\,\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}'$

$$= \frac{\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}'}{|\mathbb{A}|}$$

$$\therefore (\text{左辺}) = -\frac{1}{|\mathbb{A}|^2}\frac{\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}'}{|\mathbb{A}|}\mathbb{A} + \frac{\mathbb{A}'}{|\mathbb{A}|} = \frac{-(\hat{\mathbb{A}}\cdot\mathbb{A}')\hat{\mathbb{A}} + \mathbb{A}'}{|\mathbb{A}|}$$

$$(\text{右辺}) = -\frac{\hat{\mathbb{A}}\times(\hat{\mathbb{A}}\times\mathbb{A}')}{|\mathbb{A}|} = -\frac{1}{|\mathbb{A}|}\left\{(\hat{\mathbb{A}}\cdot\mathbb{A}')\hat{\mathbb{A}} - (\hat{\mathbb{A}}\cdot\hat{\mathbb{A}})\mathbb{A}'\right\}$$

$$= \frac{-(\hat{\mathbb{A}}\cdot\mathbb{A}')\hat{\mathbb{A}} + \mathbb{A}'}{|\mathbb{A}|}$$

$\therefore$ (左辺) = (右辺)

[4] 20点

$\mathbb{r} = (\cos t,\ \sin 2t,\ \cos^2 t)$

$$\mathbb{v} = \frac{d\mathbb{r}}{dt} = (-\sin t,\ 2\cos 2t,\ \underbrace{-2\cos t\sin t}_{=-\sin 2t})$$

$$\mathbb{a} = \frac{d\mathbb{v}}{dt} = (-\cos t,\ -4\sin 2t,\ -2\cos 2t)$$

$t = \frac{\pi}{4}$ のとき $\mathbb{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -1\right)$, $\mathbb{a} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ -4,\ 0\right)$

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\frac{1}{2}+0+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (6点)$$

$$a_t = \frac{\mathbf{v}}{v}\cdot\mathbf{a} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}+0+0\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (7点)$$

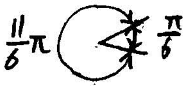
$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{v}}{v}a_t = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -4, 0\right) - \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -1\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}},\ -4+0,\ 0+\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{3},\ -4,\ \frac{1}{3}\right)$$

$$a_n = |\mathbf{a}_n| = \sqrt{\frac{2}{9}+16+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} \quad (7点)$$

【コメント】

- ベクトル量とスカラー量を区別して書いていなければ、各問毎に−1点。
- [1](iv)で「$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi$」は間違いではないが、$\frac{11}{6}\pi$は書かないほうがよい。



「$\theta = \frac{5}{6}\pi$」はまちがい。

- [2]の別解: $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2 = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\{\mathbf{B}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\}$

$$= \mathbf{A}\cdot\{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\mathbf{A} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}\} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})$$

$$= |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}|^2 \qquad \therefore\ |\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2$$

あるいは成分表示で左右両辺を表し、一致することを示すのでも良い。

- [3]では、内積、外積、スカラー乗法を混同しないよう、不必要な・や×を書かないように気をつけて下さい。

- [4]で、a_tをベクトル$\mathbf{a}_t$と書いて$\mathbf{a}_t = (a_t, 0, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, 0\right)$とした誤答が数枚ありました。$a_t$は$a_t = \mathbf{a}\cdot\mathbf{t}$を計算したあと$\mathbf{a}_t = a_t\,\mathbf{t}$として求めるべきものです。法線成分は$\mathbf{a}_n$を求めたあと$a_n = |\mathbf{a}_n|$として$a_n$を求めますが、接線成分はまず$a_t$から求めます。

受験者94人 平均 . 点 標準偏差 . 点

得点	人数(* = 1.0人)
30〜 39	
40〜 49	
50〜 59	
60〜 69	
70〜 79	
80〜 89	
90〜 99	
100〜100	