応用数学C(ベクトル解析)　定期試験　問題・答案 用紙　(全6頁中の第1頁目)

福井大学工学部機械・システム工学科2年生対象講義, 担当教員 田嶋, 2018 年 8 月 1 日 1 限実施

【1】 $\vec{A} = \left(x + 2y + 3z,\ xy^2z^3,\ \sin(x+y+z)\right)$ のとき、$\mathrm{div}\,\vec{A}$ および $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ を求めよ。(10 点)

【2】 $\varphi = x + 2xy + 3xyz + 4z^2$ のとき、$\mathrm{grad}\,\varphi$ および $\triangle\varphi$ を求めよ。但し、$\triangle$ はラプラス演算子である。(10 点)

科目名: 微分積分演習 (再試験)	試験日: 2018 年 8 月 1 日	出題者: 田嶋	学科 機械・システム工学科	学籍番号	氏名	得点 /20

【3】 点 A の座標を (2, 3, 5)、点 B の座標を (1, 4, 4)、点 C の座標を (1, 2, 3) とするとき、三角形 ABC の面積 S を求めよ。(10 点)

【4】 下記の文章 (1)〜(10) のうち、内容の正しいものの番号を ○ で囲み、そうでないものの番号に × を重ねて書け。理由を述べる必要はない。(10 点)

(1) 同一平面上にない 4 点 A, B, C, D を頂点とする四面体の体積は $\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\times\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\right|$ である。

(2) 大きさと方向を持つ量をスカラー量と言う。

(3) ベクトルの 和、内積、外積 のすべてについて、交換則が成立する。

(4) ベクトルの 内積、外積 のどちらについても、分配則が成立する。

(5) ベクトルの 和、外積 のどちらについても、結合則が成立する。

(6) 任意の3ベクトル $\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$ について $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}$ が成立する。

(7) 任意のベクトル $\vec{A}$ およびそれと直交する単位ベクトル $\vec{n}$ について、$\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\vec{A}\right)=-\vec{A}$ が成立する。

(8) 任意のベクトル $\vec{A}$ について、$\vec{A}$ と x,y,z 軸とのなす角を α、β、γ とすると $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$ が成立する。

(9) 任意のベクトル $\vec{A}$、$\vec{B}$ について、$\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)^2+\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|^2=\left|\vec{A}\right|^2\left|\vec{B}\right|^2$ が成立する。

(10) 任意のベクトル $\vec{A}$、 $\vec{B}$、 $\vec{C}$、 $\vec{D}$ について、$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)$ は、ゼロベクトルでなければ、$\vec{A}$ と $\vec{C}$ の張る平面と $\vec{B}$ と $\vec{D}$ の張る平面との交線に平行である。

福井大学工学部機械・システム工学科2年生対象講義, 担当教員 田嶋, 2018 年 8 月 1 日 1 限実施

【5】 パラメータ表示で $\vec{r} = (t - \sin t,\ 1 - \cos t,\ 0)$ と表される曲線 C の $t = \pi$ に対応する点での曲率半径 ρ を求めよ。(10 点)

【6】 xyz 空間内の曲線 C=$\left\{(x, y, z) \,|\, x = t + 1,\ y = t^2,\ z = t^3,\ 0 \leq t \leq 1\right\}$ に沿っての、ベクトル場 $\vec{A} = (y,\ -x,\ yz)$ の接線線積分 $I_{\mathrm{C}} = \displaystyle\int_{\mathrm{C}} \vec{A} \cdot d\vec{r}$ の値を求めよ。ただし、C の始点は $t = 0$ に対応する点、C の終点は $t = 1$ に対応する点とする。(10 点)

【7】 曲面 S を、$\mathrm{S} = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, x = u^2 + v^2,\ y = uv,\ z = u + v,\ u_1 \le u \le u_2,\ v_1 \le v \le v_2 \right\}$ と定める。曲面 S の面積 S が $S = \int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2} dv F(u, v)$ と表されるように、2 変数 u, v の関数 $F(u, v)$ を定めよ。(10 点)

【8】 曲面 S を、$\mathrm{S} = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, x = u^2 + v^2,\ y = uv,\ z = u + v,\ 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 2 \right\}$ と定める。

ただし、S の表・裏は次のように定める: $(u, v) = (1, 0)$ に対応する点 (即ち $(x, y, z) = (1, 0, 1)$) における S の法線ベクトルが表（おもて）側を向いているとき、その z 成分は正であるとする。

このとき、ベクトル場 $\vec{A} = \left(0,\ -x,\ z\right)$ の、S 上での法線面積分 $I_{\mathrm{S}} = \int_{\mathrm{S}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$ の値を求めよ。(10 点)

【9】 座標原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ を中心とし半径が a $(a > 0)$ の球の内部の領域のうち、$x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0$ である部分を V とする。スカラー場 $f(x, y, z) = xy$ の、領域 V での体積積分 $I_{\mathrm{V}} = \int_{\mathrm{V}} f(x, y, z)\, dxdydz$ の値を求めよ。(10 点)

【10】 3 次元領域 $V = \{(x, y, z) \,|\, 0 \le z \le 2,\ \sqrt{x^2 + y^2} \le 2 - z\}$ の表面を S とする。ただし、S の表（おもて）面は V の外部の領域に面した側とする。このとき、ベクトル場 $\vec{A} = (y, x, z^2)$ の曲面 S 上での法線面積分 $I_{\mathrm{S}} = \int_{\mathrm{S}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$ を求めよ。（ヒント：ガウスの発散定理）(10 点)