応用数学C(ベクトル解析）　定期試験　問題・答案 用紙　（全6頁中の第1頁目)

福井大学工学部機械・システム工学科2年生対象講義, 担当教員 田嶋, 2018 年 8 月 1 日 1 限実施

【1】 $\vec{A} = \big(x + 2y + 3z,\ xy^2z^3,\ \sin(x + y + z)\big)$ のとき、$\mathrm{div}\,\vec{A}$ および $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ を求めよ。(10 点)

解答例

$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(x + 2y + 3z) + \frac{\partial}{\partial y}(xy^2z^3) + \frac{\partial}{\partial z}\sin(x + y + z)$

$= 1 + 2xyz^3 + \cos(x + y + z)$　(答)

$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\sin(x + y + z) - \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z^3),\ \frac{\partial}{\partial z}(x + 2y + 3z) - \frac{\partial}{\partial x}\sin(x + y + z),\ \frac{\partial}{\partial x}(xy^2z^3) - \frac{\partial}{\partial y}(x + 2y + 3z)\right)$

$= \big(\cos(x + y + z) - 3xy^2z^2,\ 3 - \cos(x + y + z),\ y^2z^3 - 2\big)$　(答)

【2】 $\varphi = x + 2xy + 3xyz + 4z^2$ のとき、$\mathrm{grad}\,\varphi$ および $\triangle\varphi$ を求めよ。但し、$\triangle$ はラプラス演算子である。(10 点)

解答例

$\mathrm{grad}\,\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x + 2xy + 3xyz + 4z^2),\ \frac{\partial}{\partial y}(x + 2xy + 3xyz + 4z^2),\ \frac{\partial}{\partial z}(x + 2xy + 3xyz + 4z^2)\right)$

$= \Big(1 + 2y + 3yz,\ 2x + 3xz,\ 3xy + 8z\Big)$ (答)

$\triangle\varphi = \frac{\partial}{\partial x}(1 + 2y + 3yz) + \frac{\partial}{\partial y}(2x + 3xz) + \frac{\partial}{\partial z}(3xy + 8z) = 0 + 0 + 8 = 8$ (答)

科目名: 微分積分演習 (再試験)	試験日: 2018 年 8 月 1 日	出題者: 田嶋	学科　機械・システム工学科	学籍番号	氏名	得点　/20

【3】 点 A の座標を (2, 3, 5)、点 B の座標を (1, 4, 4)、点 C の座標を (1, 2, 3) とするとき、三角形 ABC の面積 S を求めよ。(10 点)

解答例

$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (1, 1, 2)$

$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = (0, 2, 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \times \overrightarrow{\mathrm{CB}} = (-3, -1, 2)$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}} \times \overrightarrow{\mathrm{CB}}\right| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$

$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}} \times \overrightarrow{\mathrm{CB}}\right| = \frac{\sqrt{14}}{2}$　(答)

【4】 下記の文章 (1)〜(10) のうち、内容の正しいものの番号を ○ で囲み、そうでないものの番号に × を重ねて書け。理由を述べる必要はない。(10 点)

(1) 同一平面上にない 4 点 A, B, C, D を頂点とする四面体の体積は $\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} \times \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\right|$ である。

(2) 大きさと方向を持つ量をスカラー量と言う。

(3) ベクトルの 和、内積、外積 のすべてについて、交換則が成立する。

(4) ベクトルの 内積、外積 のどちらについても、分配則が成立する。

(5) ベクトルの 和、外積 のどちらについても、結合則が成立する。

(6) 任意の 3 ベクトル $\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$ について $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{C}$ が成立する。

(7) 任意のベクトル $\vec{A}$ およびそれと直交する単位ベクトル $\vec{n}$ について、$\vec{n} \times \left(\vec{n} \times \vec{A}\right) = -\vec{A}$ が成立する。

(8) 任意のベクトル $\vec{A}$ について、$\vec{A}$ と x,y,z 軸とのなす角を α、β、γ とすると $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$　が成立する。

(9) 任意のベクトル $\vec{A}$、$\vec{B}$ について、$\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)^2 + \left|\vec{A} \times \vec{B}\right|^2 = \left|\vec{A}\right|^2 \left|\vec{B}\right|^2$ が成立する。

(10) 任意のベクトル $\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$、$\vec{D}$ について、$\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \times \left(\vec{C} \times \vec{D}\right)$ は、ゼロベクトルでなければ、$\vec{A}$ と $\vec{C}$ の張る平面と $\vec{B}$ と $\vec{D}$ の張る平面との交線に平行である。

解答例

(1) ○　(2) ×　(3) ×　(4) ○　(5) ×　(6) ○　(7) ○　(8) ×　(9) ○　(10) ×

【5】 パラメータ表示で $\vec{r}=(t-\sin t,\ 1-\cos t,\ 0)$ と表される曲線 C の $t=\pi$ に対応する点での曲率半径 ρ を求めよ。(10 点)

解答例

$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=(1-\cos t,\ \sin t,\ 0)$

$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=(\sin t,\ \cos t,\ 0)$

$t=\pi$ のとき $\vec{v}=(2,0,0)$, $\vec{a}=(0,-1,0)$

$v=|\vec{v}|=2$

$\vec{t}=\frac{\vec{v}}{v}=(1,0,0)$

$\vec{a}\cdot\vec{t}=0$

$\vec{a}_{\mathrm{n}}=\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{t})\vec{t}=\vec{a}=(0,-1,0)$

$a_{\mathrm{n}}=|\vec{a}_{\mathrm{n}}|=1$

$\rho=\frac{v^2}{a_{\mathrm{n}}}=\frac{2^2}{1}=4$ (答)

【6】 xyz 空間内の曲線 C=$\left\{(x,y,z)\,|\,x=t+1,\ y=t^2,\ z=t^3,\ 0\le t\le 1\right\}$ に沿っての、ベクトル場 $\vec{A}=(y,\ -x,\ yz)$ の接線線積分 $I_{\mathrm{C}}=\displaystyle\int_{\mathrm{C}}\vec{A}\cdot d\vec{r}$ の値を求めよ。ただし、C の始点は $t=0$ に対応する点、C の終点は $t=1$ に対応する点とする。(10 点)

解答例

$I_{\mathrm{C}}=\int_0^1\vec{A}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt$

$=\int_0^1\left(t^2,\ -t-1,\ t^5\right)\cdot\left(1,\ 2t,\ 3t^2\right)\,dt$

$=\int_0^1\left(3t^7-t^2-2t\right)\,dt$

$=\left[\frac{3}{8}t^8-\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{t=0}^{t=1}$

$=\frac{3}{8}-\frac{1}{3}-1$

$=-\frac{23}{24}$ (答)

【7】 曲面 S を、$\mathrm{S} = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, x = u^2 + v^2,\ y = uv,\ z = u + v,\ u_1 \le u \le u_2,\ v_1 \le v \le v_2 \right\}$ と定める。曲面 S の面積 S が $S = \displaystyle\int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2} dv F(u,v)$ と表されるように、2 変数 u, v の関数 $F(u,v)$ を定めよ。(10 点)

解答例

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (2u,\ v,\ 1)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (2v,\ u,\ 1)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(v - u,\ 2(v-u),\ 2(u^2 - v^2)\right)$

$S = \int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2} dv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|$

$= \int_{u_1}^{u_2} du \int_{v_1}^{v_2} dv \sqrt{(u-v)^2 + 4(u-v)^2 + 4(u^2 - v^2)^2}$

$F(u,v) = \sqrt{4(u^2 - v^2)^2 + 5(u-v)^2} = |u - v| \sqrt{4(u+v)^2 + 5}$ (答)

【8】 曲面 S を、$\mathrm{S} = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, x = u^2 + v^2,\ y = uv,\ z = u + v,\ 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 2 \right\}$ と定める。

ただし、S の表・裏は次のように定める: $(u,v) = (1,0)$ に対応する点 (即ち $(x,y,z) = (1,0,1)$) における S の法線ベクトルが表（おもて）側を向いているとき、その z 成分は正であるとする。

このとき、ベクトル場 $\vec{A} = \left(0,\ -x,\ z\right)$ の、S 上での法線面積分 $I_{\mathrm{S}} = \displaystyle\int_{\mathrm{S}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$ の値を求めよ。(10 点)

解答例

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = (2u,\ v,\ 1)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (2v,\ u,\ 1)$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(v - u,\ 2(v-u),\ 2(u^2 - v^2)\right)$

$(u,v) = (1,0)$ のとき $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-1,\ -2,\ 2)$ は z 成分が正であるので表向きである。

$I_{\mathrm{S}} = \int_0^1 du \int_0^2 dv \vec{A} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right)$

$= \int_0^1 du \int_0^2 dv \left(0,\ -u^2 - v^2,\ u + v\right) \cdot \left(v - u,\ 2(v-u),\ 2(u^2 - v^2)\right)$

$= \int_0^1 du \int_0^2 dv 2(u - v) \left\{ u^2 + v^2 + (u+v)^2 \right\}$

$= \int_0^1 du \int_0^2 dv 4 \left(u^3 - v^3\right)$

$= 4 \left(\frac{1}{4} \cdot 2 - 1 \cdot \frac{16}{4} \right) = -14$ (答)

【9】 座標原点 $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ を中心とし半径が a $(a > 0)$ の球の内部の領域のうち、$x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0$ である部分を V とする。スカラー場 $f(x, y, z) = xy$ の、領域 V での体積積分 $I_{\rm V} = \displaystyle\int_{\rm V} f(x, y, z)\, dxdydz$ の値を求めよ。(10 点)

解答例

球座標 (3 次元極座標) r, θ, φ を使うと、$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$,

$dxdydz = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$, $f = xy = r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi$ である。

$I_{\rm V} = \int_0^a dr\ \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta\ \int_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi\, r^2\sin\theta\cdot r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi$

$= \int_0^a r^4 dr\ \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta\ \int_{\pi}^{3\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi$

$= \left[\frac{1}{5}r^5\right]_{r=0}^{r=a} \left[\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right]_{\theta=\pi/2}^{\theta=\pi} \left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_{\varphi=\pi}^{\varphi=3\pi/2}$

$= \frac{a^5}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{a^5}{15}$ (答)

科目名: 微分積分演習 (再試験)	試験日: 2018 年 8 月 1 日	出題者: 田嶋	学科 機械・システム工学科	学籍番号	氏名	得点 /10

【10】 3 次元領域 $V = \{(x,y,z)\,|\,0 \le z \le 2,\ \sqrt{x^2+y^2} \le 2-z\}$ の表面を S とする。ただし、S の表（おもて）面は V の外部の領域に面した側とする。このとき、ベクトル場 $\vec{A} = (y, x, z^2)$ の曲面 S 上での法線面積分 $I_{\rm S} = \displaystyle\int_{\rm S} \vec{A}\cdot d\vec{S}$ を求めよ。（ヒント：ガウスの発散定理）(10 点)

解答例

ガウスの発散定理により、$I_{\rm S} = \int_{\rm V} {\rm div}\vec{A} dv$

${\rm div}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}y + \frac{\partial}{\partial y}x + \frac{\partial}{\partial z}z^2 = 0 + 0 + 2z = 2z$

$\therefore\ \ I_{\rm S} = 2\int_{\rm V} z dv$

円柱座標 ρ, φ, z を使うと、$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z$, $dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz$ である。

$I = 2\int_0^2 dz\ \int_0^{2-z} d\rho\ \int_0^{2\pi} d\varphi\ \rho\, z$

$= 4\pi\int_0^2 dz\ z\ \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_{\rho=0}^{\rho=2-z}$

$= 4\pi\int_0^2 dz\ z\ \frac{1}{2}(2-z)^2$

$= 2\pi\int_0^2 dz\ \left(z^3 - 4z^2 + 4z\right)$

$= 2\pi\left[\frac{1}{4}z^4 - \frac{4}{3}z^3 + 2z^2\right]_{z=0}^{z=2}$

$= 2\pi\left(4 - \frac{32}{3} + 8\right) = \frac{8\pi}{3}$ (答)