

# 核図表計算のための新しいWoods-Saxon-Strutinsky法

田嶋直樹、清水良文、高原哲士、大西直毅  
(福井大工) (九州大理) (杏林大医)

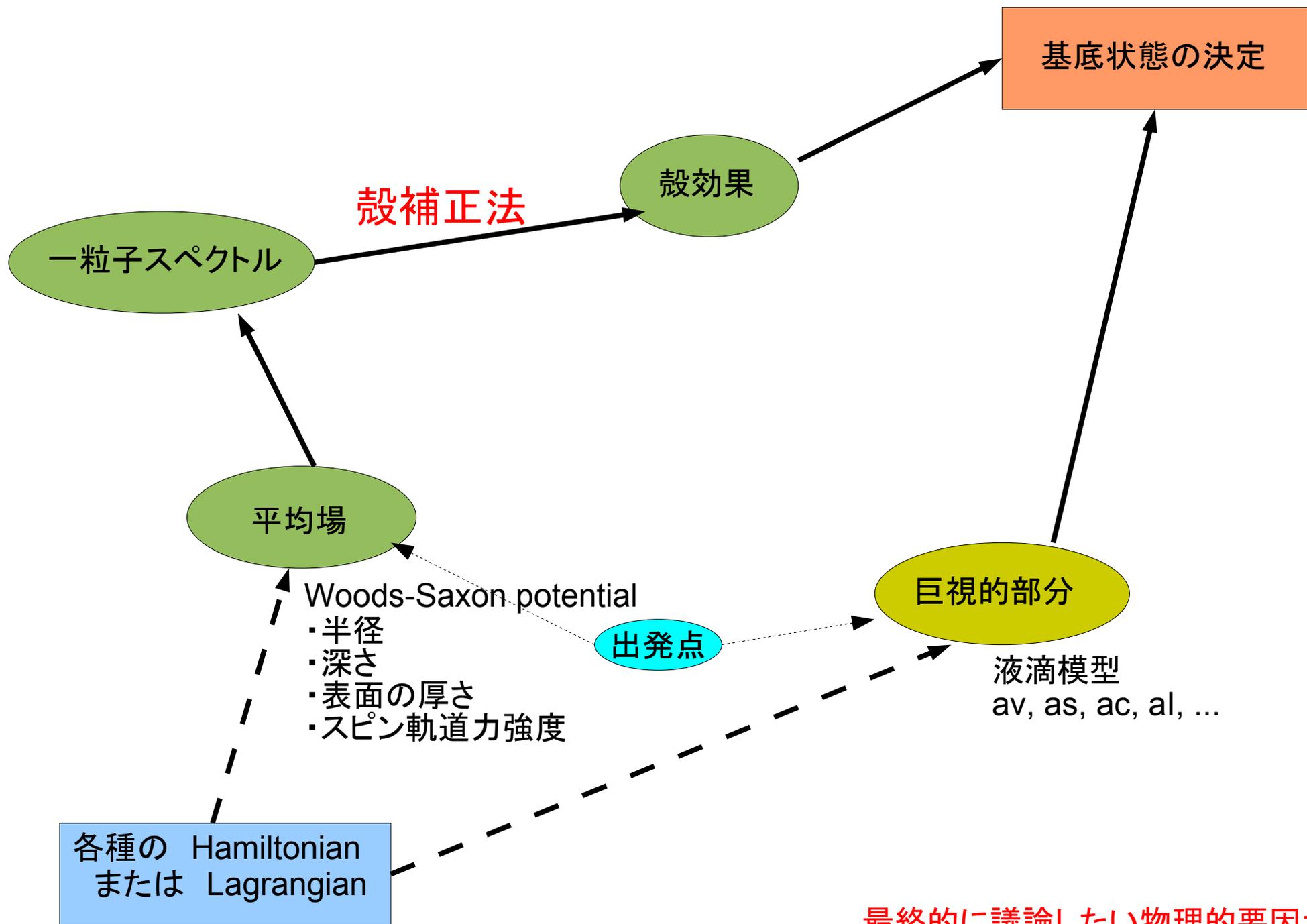
「核図表計算のための計算法」に込めた意味は2つ:

- (1) **ドリップ線**まで適用できる (連続状態を扱う処方を持つ)
- (2) **Nuclear Chart 1面**の計算を繰り返し行える (1核に要する計算時間が比較的短い)  
モデルパラメータの最適化のため / 現実とは異なる世界の原子核を論じるため

## 内 容

1. Strutinsky法に連続状態を扱う処方を加える
  - Kruppa法 (Kruppa et al., 1998)
  - Reference Density法 (new)
  - Potential Depth Adjustment for Micro-Macro consistency (new)
  - Kruppa-BCS法 (new)
2. 原子核のプロレート変形優勢の起源の考察への応用
  - スピン軌道ポテンシャルの重要性

# Strutinsky法とは



最終的に議論したい物理的要因がそのまま模型の入力となる。

## Strutinsky法の歴史（本研究に関連する事項）

- **Shell Correction Method** V.M.Strutinski (1967)
  - **Nilsson-Strutinsky method**
- **Woods-Saxon-Strutinsky method** Z.Szymanski et al. (1986頃～)
  - for high-spin nuclei , Nilsson's  $l(l+1)$  potential should be replaced.
- **Finite-Range Droplet Model** Moller, Nix et al. (1995)
  - with shell correction for Folded Yukawa Potential
  - This result still seems to be the theoretical mass table.
- **Kruppa method** Kruppa et al. (1998)
  - treatment of the continuum in the harmonic oscillator basis

### 清水氏との共同研究

for Nilsson-Strutinsky (1998, 2001-2002) 偏長変形優勢の起源の研究に応用  
for Woods-Saxon-Strutinsky (2005-) まず、ドリップ線まで適用可能に改良する

# 殻補正法とは

左側の一粒子準位スペクトル  $\epsilon_i$

準位密度に粗密がある。

右側の一粒子準位スペクトル  $\epsilon_i$

量子的効果を抜くことが可能なら  
粗密は消えるはず。

(図では離散スペクトルとして描いてある  
が、実際は連続な密度分布関数である。)

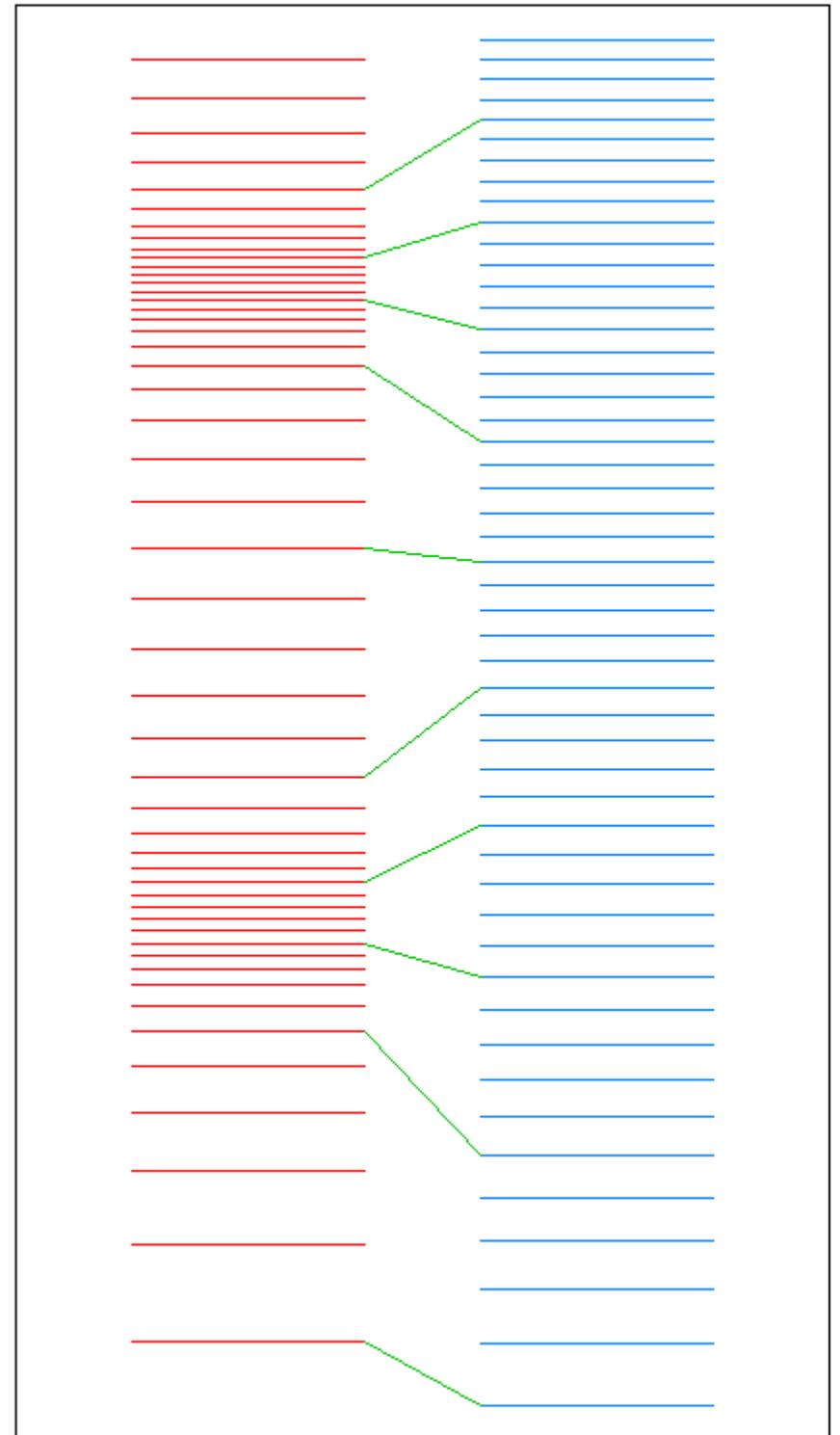
粗密を消すには何らかの平滑化処理を  
すればよい。

平滑化した結果を、量子的効果を抜いた結  
果とみなすことにする。

緑色の線分は順位に対応を表す

この線分の傾きが量子的効果による各準  
位のエネルギーの得失を表す。

殻補正法では、  
左右のスペクトルの差を量子的効果として  
巨視的模型のエネルギーに加える



核の全束縛エネルギーの表式は、

$$E_{sh} = \sum_{i=0}^n \epsilon_i$$

$$\tilde{E}_{sh} = \sum_{i=0}^n \tilde{\epsilon}_i$$

および

$E_{LDM}$  液滴模型のエネルギー 等

を用いて、

$$E_{TOTAL} = E_{sh} - \tilde{E}_{sh} + E_{LDM}$$

と表される。

残る唯一の問題は、いかにして準位密度を平滑化するかである。

## Strutinsky の平滑化法

$$\rho(\epsilon) = \sum_i \delta(\epsilon - \epsilon_i), \quad A = \int_{-\infty}^{\lambda} \rho(\epsilon) d\epsilon, \quad E_{\text{sh}} = \int_{-\infty}^{\lambda} \epsilon \rho(\epsilon) d\epsilon$$

$$\tilde{\rho}(\epsilon) = \frac{1}{\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\epsilon') f\left(\frac{\epsilon' - \epsilon}{\gamma}\right) d\epsilon', \quad A = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} \tilde{\rho}(\epsilon) d\epsilon, \quad \tilde{E}_{\text{sh}} = \int_{-\infty}^{\tilde{\lambda}} \epsilon \tilde{\rho}(\epsilon) d\epsilon$$

デルタ関数を幅 $\gamma$ 程度の関数で置き換える。幅 $\gamma$ は主殻間隔程度にとる。

### 問題点

中性子のフェルミ準位が  $-\gamma$  より高いと、連続スペクトルの影響が強くなる。

調和振動子基底による展開では、連続スペクトルの影響が、基底サイズに依存して変化する。少なくとも、結果の基底サイズ依存性は除去すべきである。

⇒ Kruppa法

Woods Saxon ポテンシャル中の一粒子のスペクトルから自由粒子のスペクトルを差し引く。(両者は同じ基底での対角化で求める)

また、できれば、結果の $\gamma$ 依存性も小さくすべきである。(プラトー条件を緩めたもの)

⇒ Reference density 法

Kruppa準位密度のエネルギーゼロにある山は (Oscillator-Basis) Thomas-Fermi法でも存在するから、平滑化によって崩してはならない。

# Kruppa の処方

Vertse et al. PRC61(2000)064317

準位密度は離散部分と連続部分からなる

$$\rho(\epsilon) = \rho_d(\epsilon) + \rho_c(\epsilon)$$

2つの基底(一粒子、自由粒子)を用いて

$$H\psi_i = \epsilon_i\psi_i, T\psi_i^0 = \epsilon_i^0\psi_i^0 (i = 1, \dots, M, \dots, \infty)$$

準位密度を次のように近似

$$\rho_M(\epsilon) = \sum_{i=1}^M \delta(\epsilon - \epsilon_i) - \sum_{i=1}^M \delta(\epsilon - \epsilon_i^0)$$

- 通常の Strutinsky 法では基底の個数  $M$  に対して収束しない
- Kruppa 法では  $M$  に対して収束

基底を増やして計算精度を向上できる。

(loosely bound を扱える)

しかし、プラトー条件が満たされず、結果が平滑化パラメータに依存

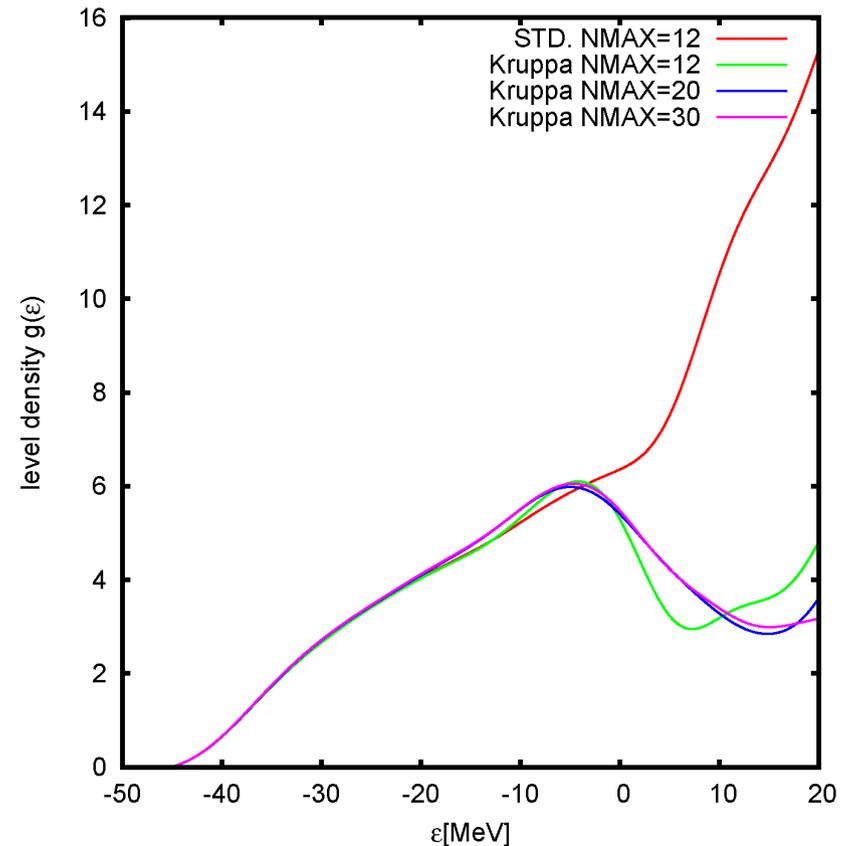


図1  $^{156}\text{Gd}$ ,  $\gamma = 1.2\hbar\omega$

# reference level density method

ある基準となる準位密度  $\rho_0$  を考え、それからのずれを平滑化することを考える。  
平滑化の操作

$$S[\rho](\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\epsilon') \frac{1}{\gamma} f\left(\frac{\epsilon - \epsilon'}{\gamma}\right) d\epsilon'$$

は線形である。reference density法での平滑化を次のように定義する。

$$\begin{aligned} S'[\rho](\epsilon) &= S[\rho - \rho_0](\epsilon) + \rho_0(\epsilon) \\ &= S[\rho](\epsilon) - S[\rho_0](\epsilon) + \rho_0(\epsilon) \end{aligned}$$

reference level density  $\rho_0(\epsilon)$  を以下のように定義

$$\rho_0(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\epsilon') \frac{1}{\gamma(\epsilon)} f_0\left(\frac{\epsilon - \epsilon'}{\gamma(\epsilon)}\right) d\epsilon'$$

$$\gamma(\epsilon) = \gamma_a + (\gamma_b - \gamma_a) \exp\left[-\left(\frac{\epsilon - \epsilon_{peak}}{\gamma_c}\right)^2\right]$$

平滑化関数の幅  $\gamma$  にエネルギー依存性を持たせる。

エネルギーゼロ近傍で幅が小さくなるようにする。 ( $\gamma_a = 3.0, \gamma_b = 0.7, \gamma_c = 2.0, \epsilon_{peak} = 0.0$ )

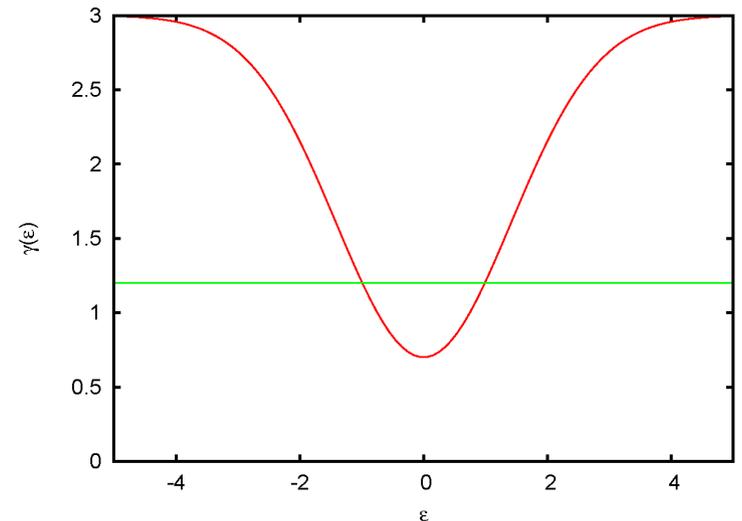


図2 smoothing width  $\gamma(\epsilon)$

## reference level density method 2

ある基準となる準位密度 $\rho_0$ を考え、それからのずれを平滑化することを考える。

平滑化の操作

$$S[\rho](\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\epsilon') \frac{1}{\gamma} f\left(\frac{\epsilon - \epsilon'}{\gamma}\right) d\epsilon'$$

は線形である。reference density法での平滑化を次のように定義する。

$$\begin{aligned} S'[\rho](\epsilon) &= S[\rho - \rho_0](\epsilon) + \rho_0(\epsilon) \\ &= S[\rho](\epsilon) - S[\rho_0](\epsilon) + \rho_0(\epsilon) \end{aligned}$$

reference level density  $\rho_0(\epsilon)$ を以下のように定義

$$\rho_0(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\epsilon') \frac{1}{\gamma(\epsilon)} f_0\left(\frac{\epsilon - \epsilon'}{\gamma(\epsilon)}\right) d\epsilon'$$

$$\gamma(\epsilon) = \gamma_a + (\gamma_b - \gamma_a) \exp\left[-\left(\frac{\epsilon - \epsilon_{peak}}{\gamma_c}\right)^2\right]$$

平滑化関数の幅 $\gamma$ にエネルギー依存性を持たせる。  
エネルギーゼロ近傍で幅が小さくなるようにする。

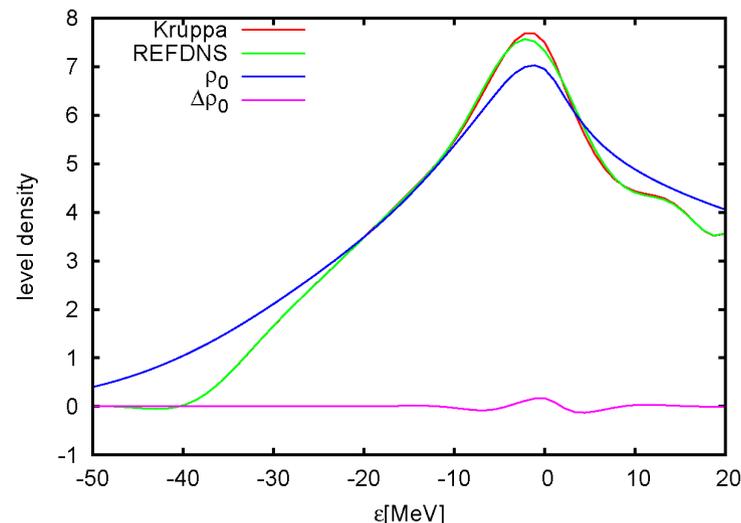


図3  $^{156}\text{Gd}$ ,  $\gamma = 1.2\hbar\omega$ ,  $N_{\text{MAX}}=30$

# reference法による plateau condition2(Pb)

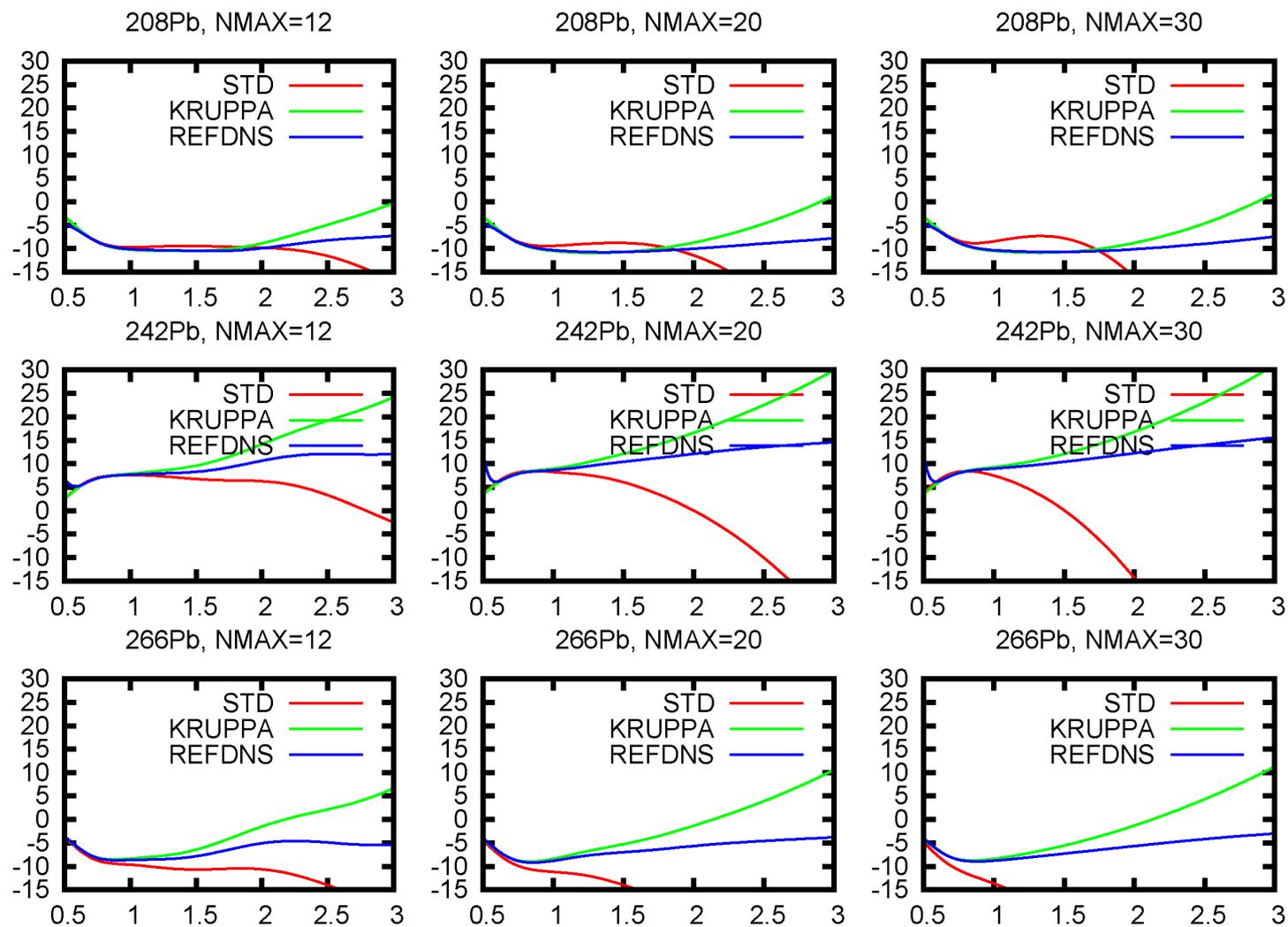


図5 Pb isotopes, 横軸  $\gamma/\hbar\omega_0$ , 縦軸 Energy correction[MeV]

## ポテンシャルの深さの決定法

従来のStrutinsky法計算では

核子分離エネルギー と 一粒子スペクトルのフェルミ準位の差が大きい。

ドリップ線の位置は、前者に基づいて決定した場合は、(巨視的部分のお陰で)もってもらしいが、後者に基づいて決定した場合は、10核子、20核子、と大きくずれる。

模型の 微視的部分 (Woods-Saxon potential parameter set)の決定に際して、巨視的部分との首尾一貫性があまり顧慮されてこなかったらしい。

我々は、トーマスフェルミ近似で求まるフェルミ準位が、巨視的部分の核子分離エネルギーと一致するように、ポテンシャルの深さを決定することにした。

## ポテンシャル深さの修正

---

通常の Woods-Saxon パラメータをそのまま使うと、早くドリップ線に達してしまう。  
Bethe-Weizacker の質量公式から得られる fermi level を再現するように、Thomas-Fermi 近似で potential depth を決定する。ドリップ線を超える核については外挿で決定した。

### 古典近似によるパラメータの調節

Thomas-Fermi 近似で密度分布関数をフェルミ準位  $\epsilon_F$  とポテンシャルの深さ  $V_0$  の関数として表す。

$$\rho(r) = \frac{2}{h^2} \int_0^\infty \theta(\epsilon_F - H(p, r)) 4\pi p^2 dp$$

$$H(p, r) = \frac{p^2}{2m} + \frac{V_0}{1 + \exp \frac{r-R_0}{a}} (+V_{\text{Coul}})$$

$\epsilon_F$  は質量公式  $E = E(N, Z)$  から  $\epsilon_{Fn} = \frac{\partial E}{\partial N}$  で求め、

$$N = \int_0^\infty \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

を満たすように  $V_0$  を決定する。

## ポテンシャルの深さの決定についての補足

- ・ドリップ線の近くでは、外挿値を用いる。
- ・一粒子スペクトルのフェルミ準位と核子分離エネルギーとの食い違いは  $\pm 2\text{MeV}$  くらい

さらに、

調和振動子基底による展開が、弱束縛に起因する密度分布の空間的拡大の扱いに弱いということ

も考えると、

Woods-Saxon-Strutinsky 型の手法は、  
ドリップ線上の核に関しては、記述の精度が落ちる

と言わねばならない。

これらの核には、ドリップラインに適用可能な解法による平均場法が適している。

## Kruppa法の状態密度を用いた対相関相互作用強度の決定

クルッパ法では状態密度がエネルギーゼロに大きなピークを持つ。

このピークのため、対相関が強くなる。

これは現実を正しく反映しているのか？ いないのか？

我々は、安全策をとり、

フェルミ準位がゼロに接近しても、対相関が異常に強まらないようにした。

(Skyrme Canonical-basis HFB法の結果に倣った)

具体的には、

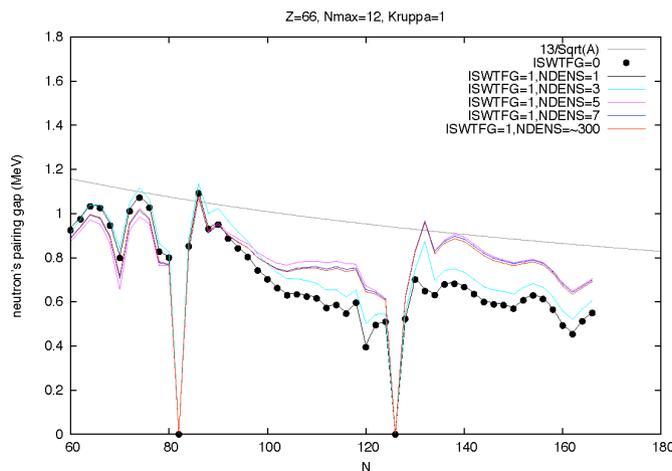
平滑化された準位密度を使って得られるBCSのギャップが  $13/\sqrt{A}$  MeV に一致するように、対相関強度を決定する。

# 対相関強度の決定

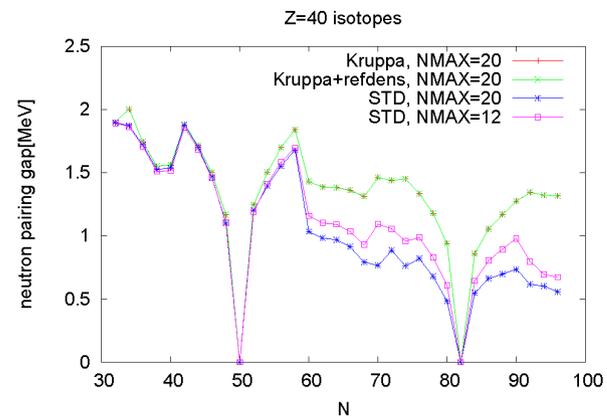
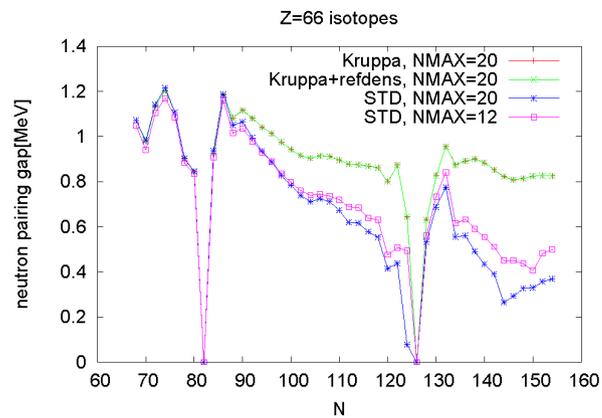
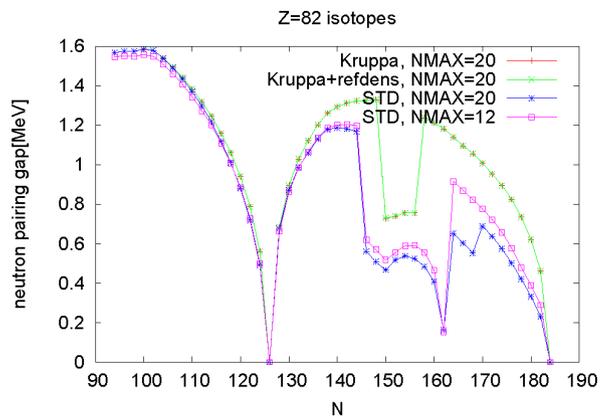
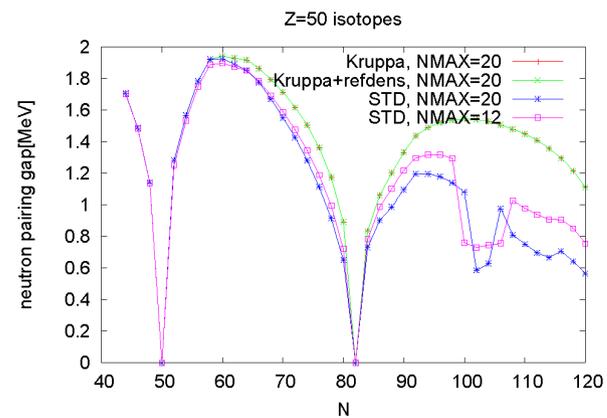
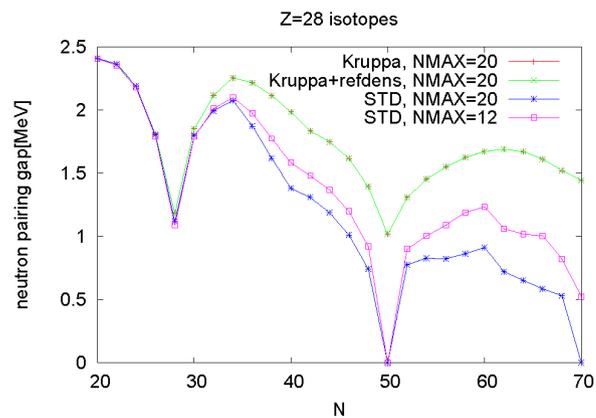
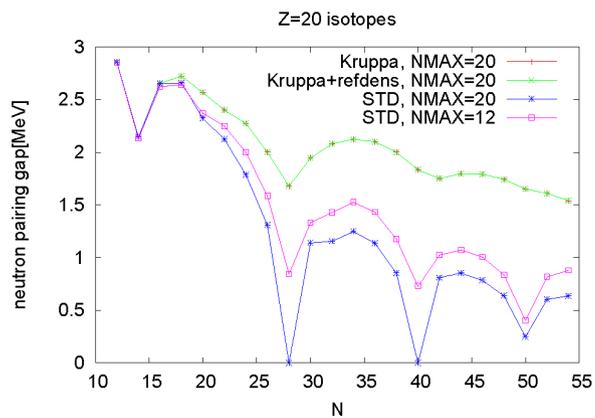
- 大域的に計算するため、対相関強度  $G$  は経験的な式  $\Delta = 13/\sqrt{A}$  を再現するように決める。
- ドリップ線近傍では連続状態の準位密度が高くなっているため、フェルミ面1点での準位密度で代表させるのでは不十分。
- ギャップ方程式において、準位密度を一定とせず積分で  $G$  を決定。

$$1 = \frac{G}{2} \int \frac{\rho(\epsilon) d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}}$$

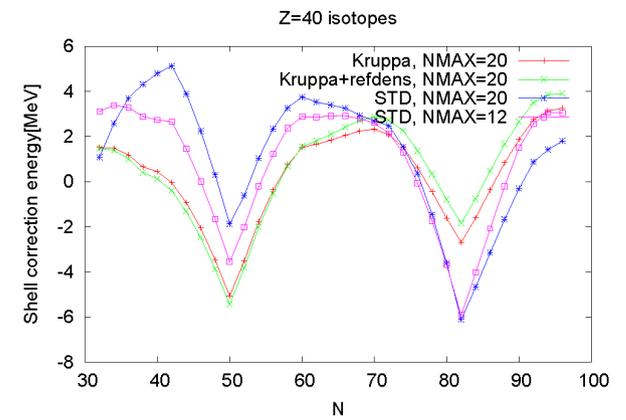
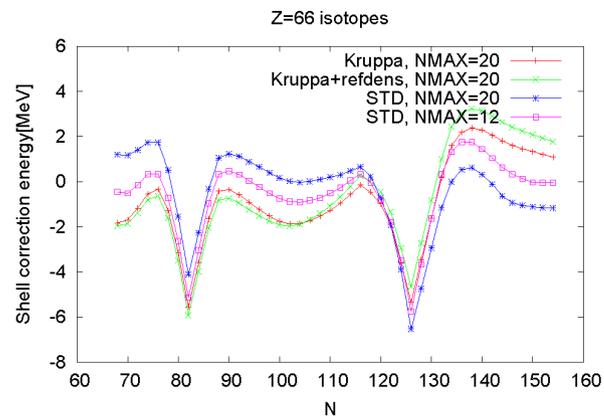
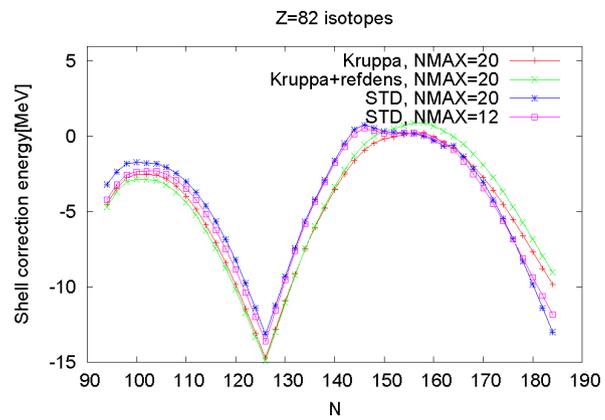
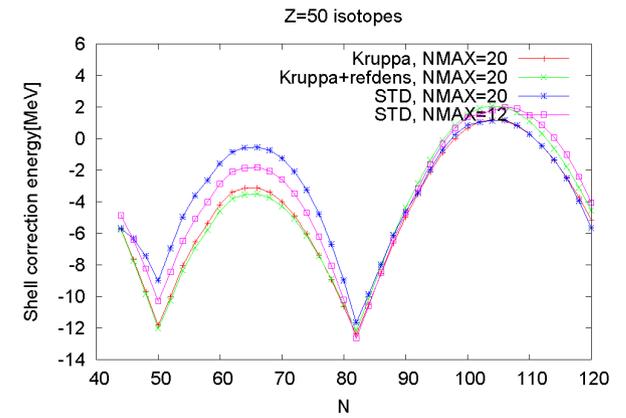
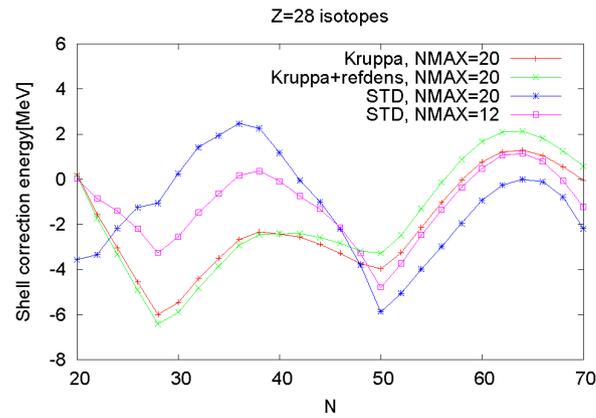
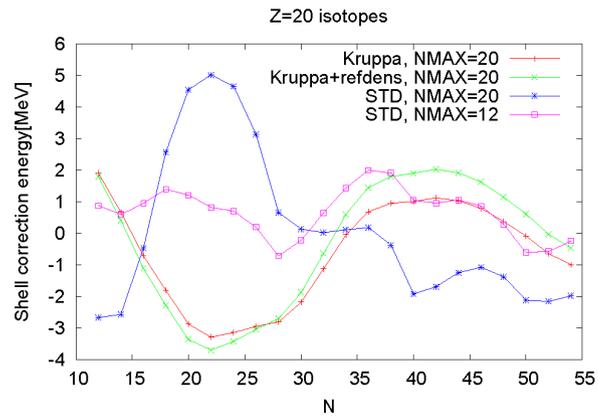
- これにより不安定核では pairing gap を大きくする方向にはたらく。



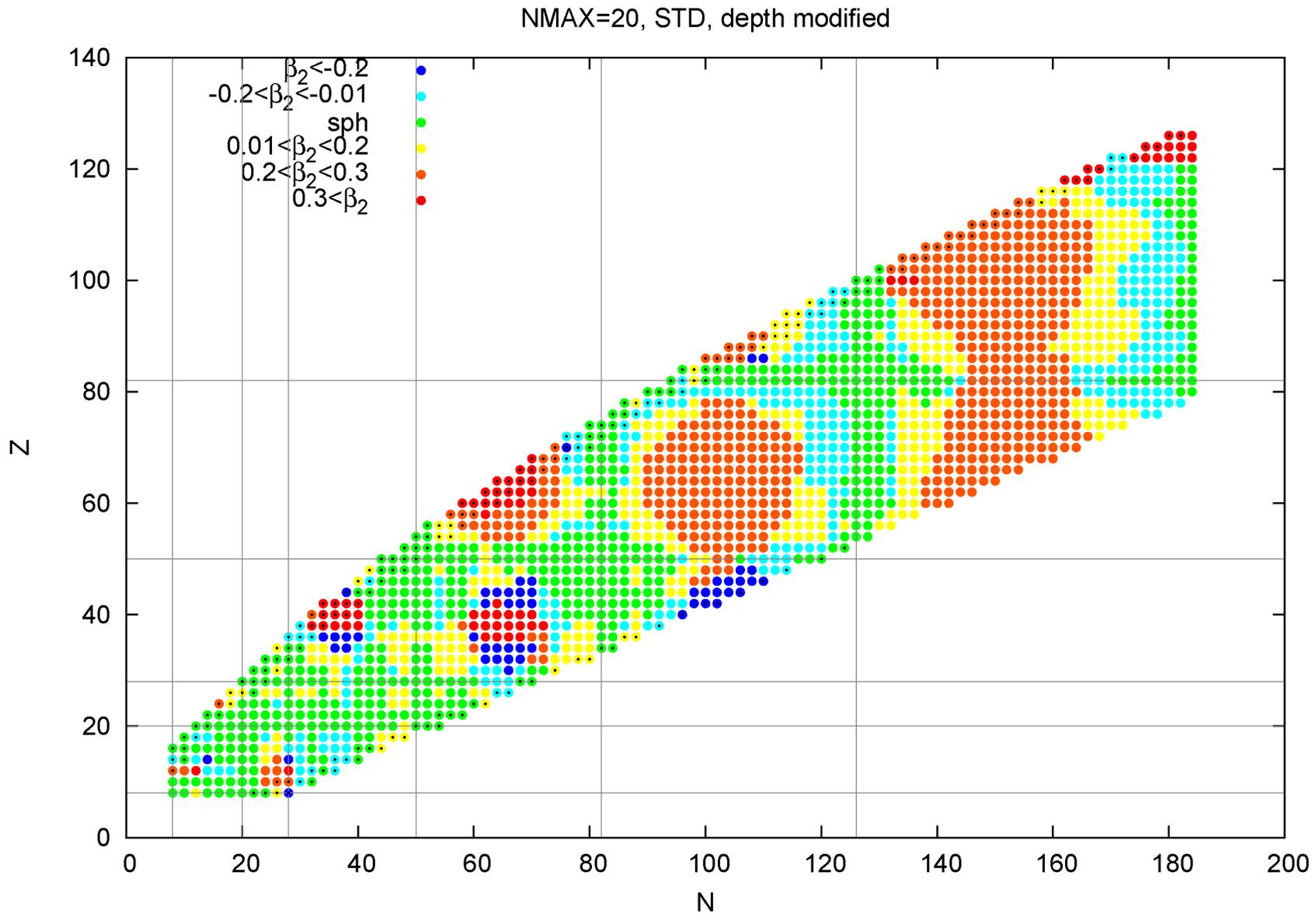
# pairing gap



# Shell correction energy

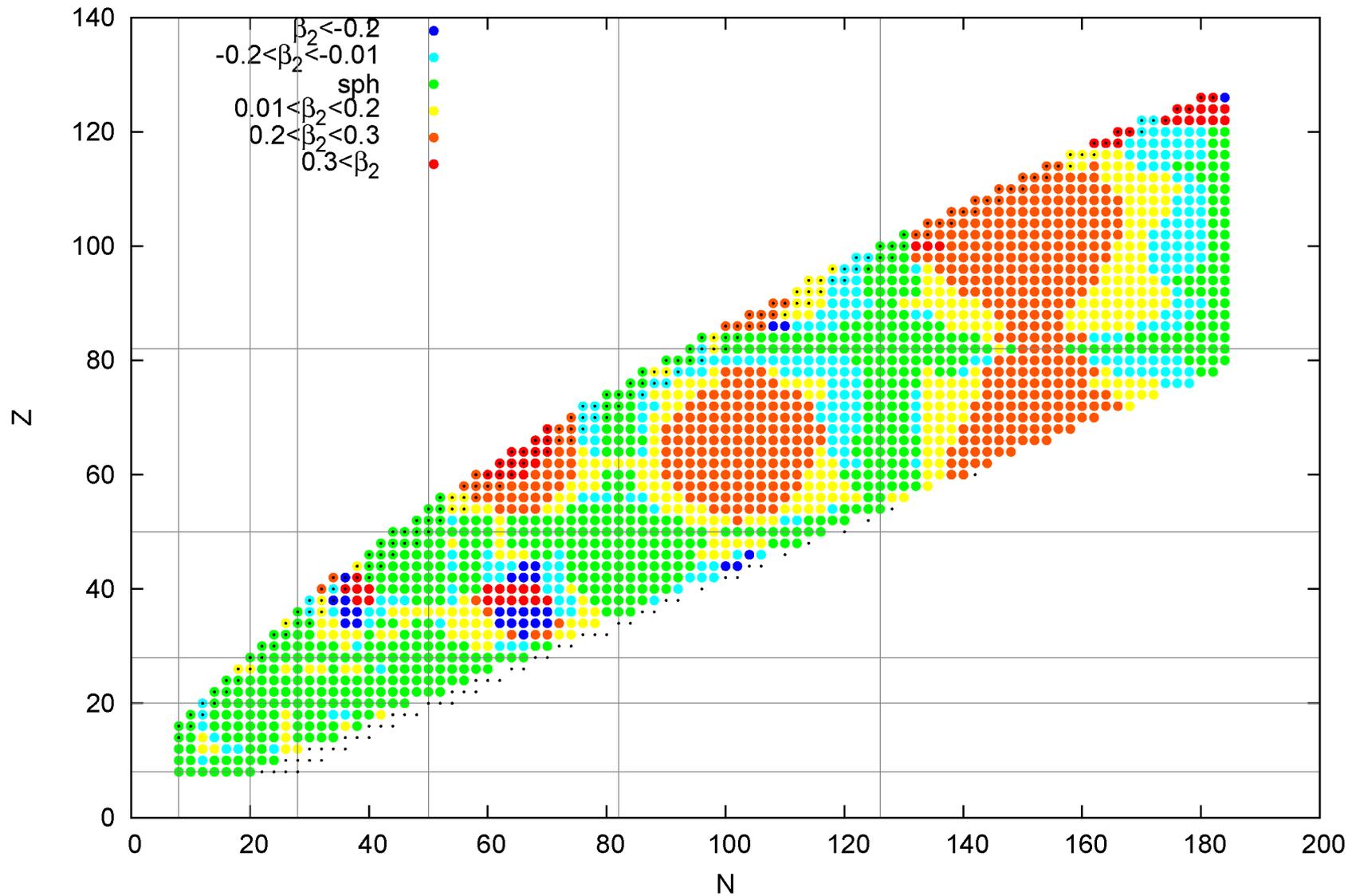


# 変形 Standard Strutinsky Nmax=20

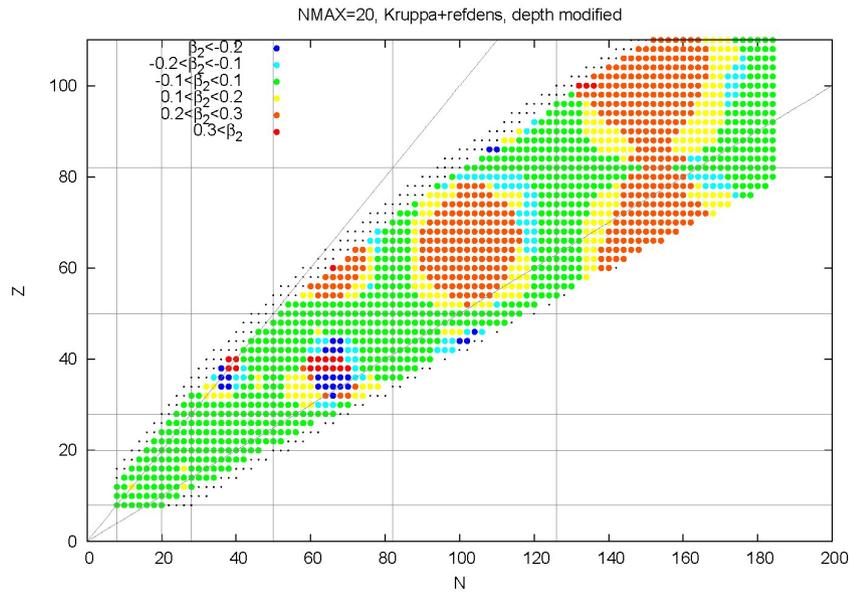


# 変形 Kruppa+reference density method

NMAX=20, Kruppa+refdens, depth modified

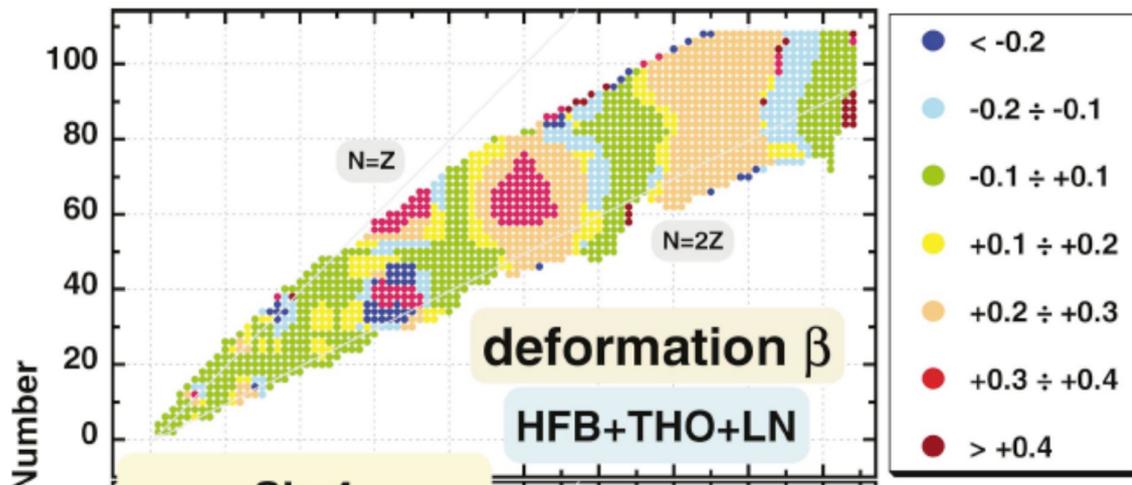


# 変形 Kruppa+reference density method



M. V. STOITSOV *et al.*

PHYS



## 「新しいWoods-Saxon-Strutinsky法」 についてのまとめ

- ・ 連続状態の寄与には Kruppa法で対処できる。  
(Woods-Saxon spectrum) – (free-particle spectrum) obtained in the same basis
- ・ Kruppa法で 緩めたプラトー条件 にこたえるため、  
Kruppa法の状態密度がエネルギーゼロにもつ山を平滑化で崩さない工夫をした  
The reference density method
- ・ Kruppa法の状態密度がエネルギーゼロにもつ山で対相関が異常に強まらないように  
Kruppa-BCS法
- ・ 模型の巨視的部分(液滴模型)と微視的部分(Woods-Saxon potential)との  
首尾不貫の改善  
Potential depth determined in terms of the Thomas-Fermi approximation

開発の現状： 今週の悩み：

Kruppa法で、フェルミ準位が正になっても、それなりの解を出さねばならないが、  
表面の厚さを2倍にしたり、スピン軌道ポテンシャルをオフにすると  
計算に失敗することがまだある。これに逐一对処して定式・コードを修正している

LDMはやわらか過ぎる？

FRDMのように曲率補正を入れるのが必要か？

高スピンの超変形、ハイパー変形の計算に使われていたものなのになぜ？

「原子核の偏長変形優勢の起源  
の探求」への応用

## 変形核の大半がプロレート(偏長)形に変形するのはなぜか？

液滴は、回転していなければ、球形か、分裂するかのどちらかである。  
したがって、**変形は殻効果**である。

殻効果によって、プロレート、オブレートの両方の変形状態が可能となる場合、  
どちらが基底状態になるかには、液滴の性質も寄与する。  
しかし、陽子間のクーロン反発は重い核以外では決定的要因ではない。

殻効果、即ち **一粒子運動** がプロレート変形優勢の原因であると思われる。

**H. Friskの説(1990年):**

一粒子**ポテンシャルの動径依存性**が井戸型であることが原因である  
古典軌道の性質に基づく議論

我々は、H.Friskの理論を、現実的な原子核の計算により、検証するとともに、  
**スピン軌道ポテンシャル**も重要な役割を果たすことを示したい。

なお、個々の核の形状は、Strutinsky法により、一粒子スペクトルに帰着できる。  
しかし、この種の説明は、あまりに個別的な説明であり、  
一般的傾向の説明とは言えない。

このあと、ニルソンについて、  
スピン軌道ポテンシャルの強さを、  
現実の原子核での強さの  $-2.5 \sim 2.5$  倍に変化させた場合の、  
四重極変形度の核図表上の分布を、ご覧下さい。

# Woods-Saxon potential

---

central

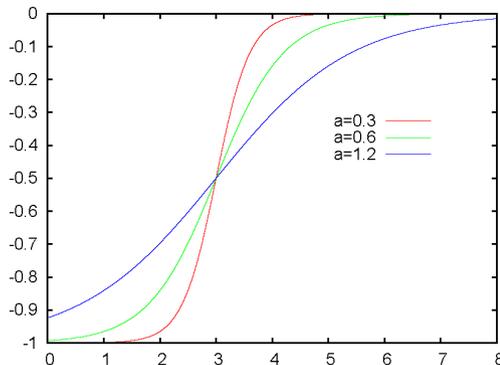
$$V(\mathbf{r}, \hat{\beta}) = \frac{V_0}{1 + \exp[\text{dist}_\Sigma(\mathbf{r}, \hat{\beta})/f_a a]}$$

spin-orbit

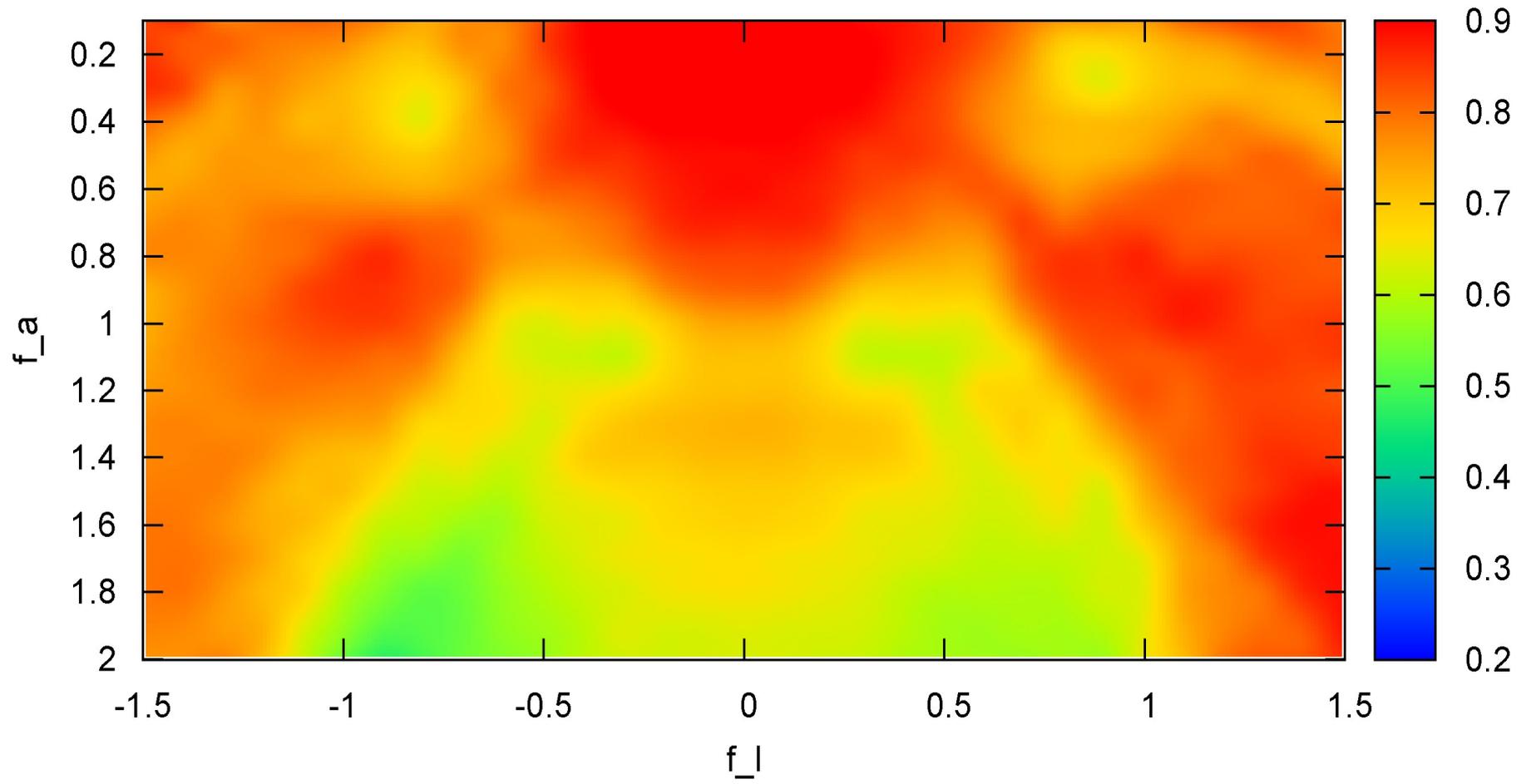
$$V_{SO}(\mathbf{r}, \hat{\beta}) = f_l \lambda \left( \frac{\hbar}{2Mc} \right)^2 \nabla \left\{ \frac{1}{1 + \exp[\text{dist}_\Sigma(\mathbf{r}, \hat{\beta})/f_a a]} \right\} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p})$$

pairing gap

$$\bar{\Delta} = f_a 13A^{-1/2} (\text{MeV})$$



WS, ratio of prolate nuclei



## 偏長変形優勢の起源 についてのまとめ

H. Friskの理論のとおり、表面が鋭くなるほど、偏長変形が優勢になる。

スピン軌道ポテンシャルによっても状況は大きく変わる。

表面の厚さを現実の原子核のままとすれば、スピン軌道ポテンシャルの強度に対して、偏長核の割合は大振幅の振動をする。

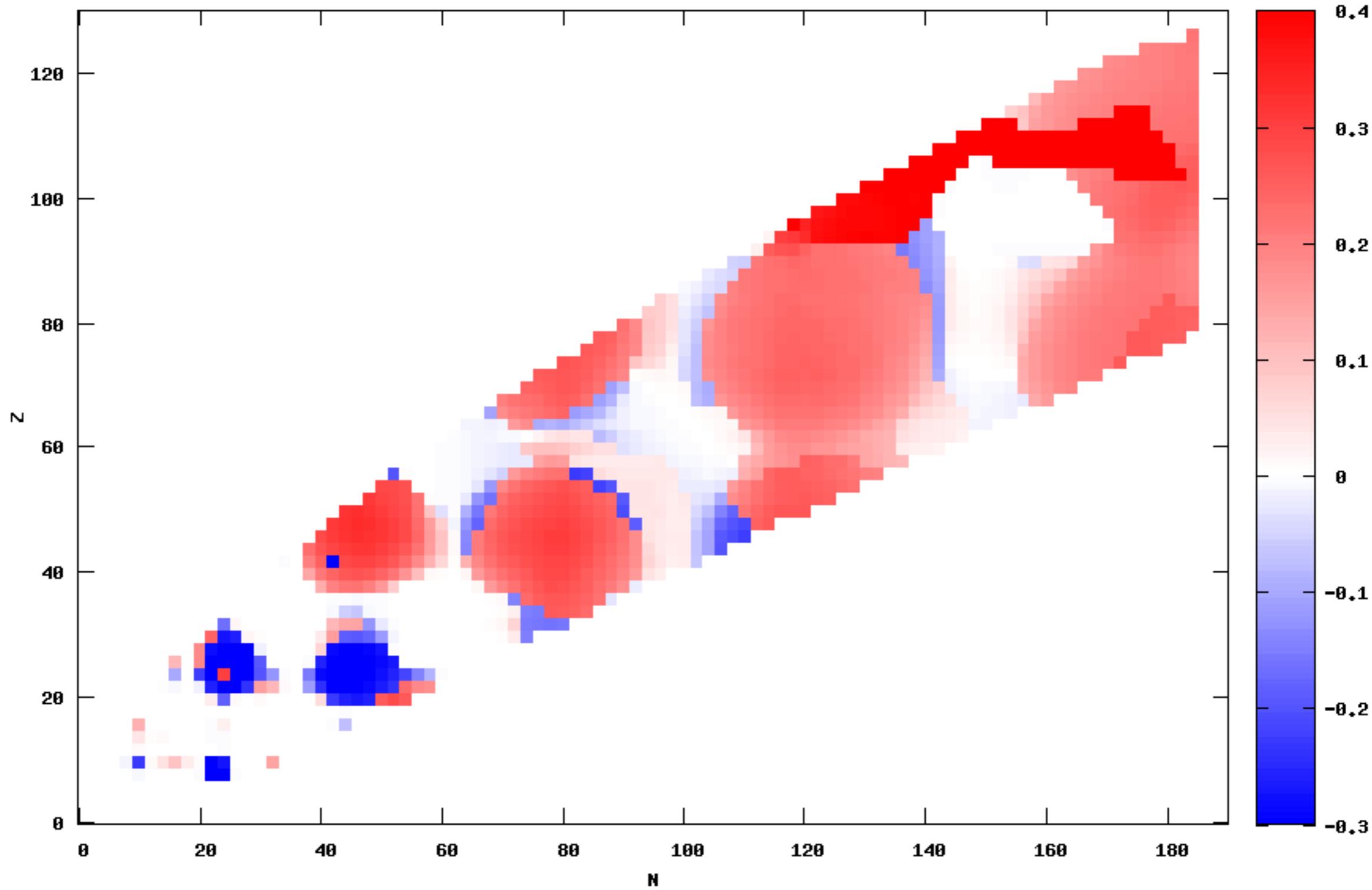
これはニルソンポテンシャルについて調べた結果と同じである。(2001、2002年)

## 研究の展望

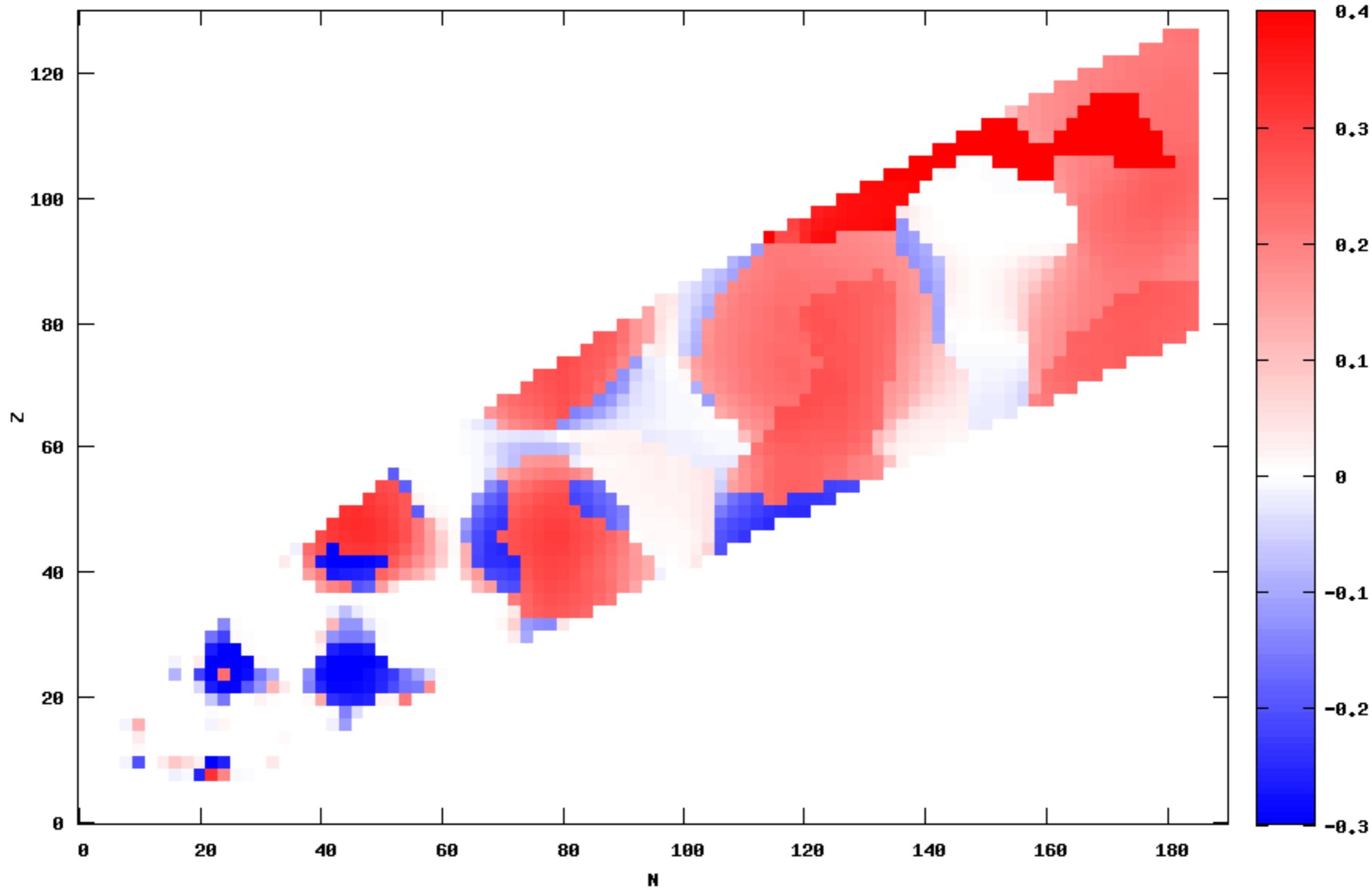
H.Friskが古典周期軌道の性質に基づいて議論したように、スピンを含めた古典軌道の性質に基づいて、スピン軌道ポテンシャルの影響を議論できそうである。

Strutinsky法は一粒子ポテンシャルを出発点に置くため、古典周期軌道による考察との相性が大変に良い。

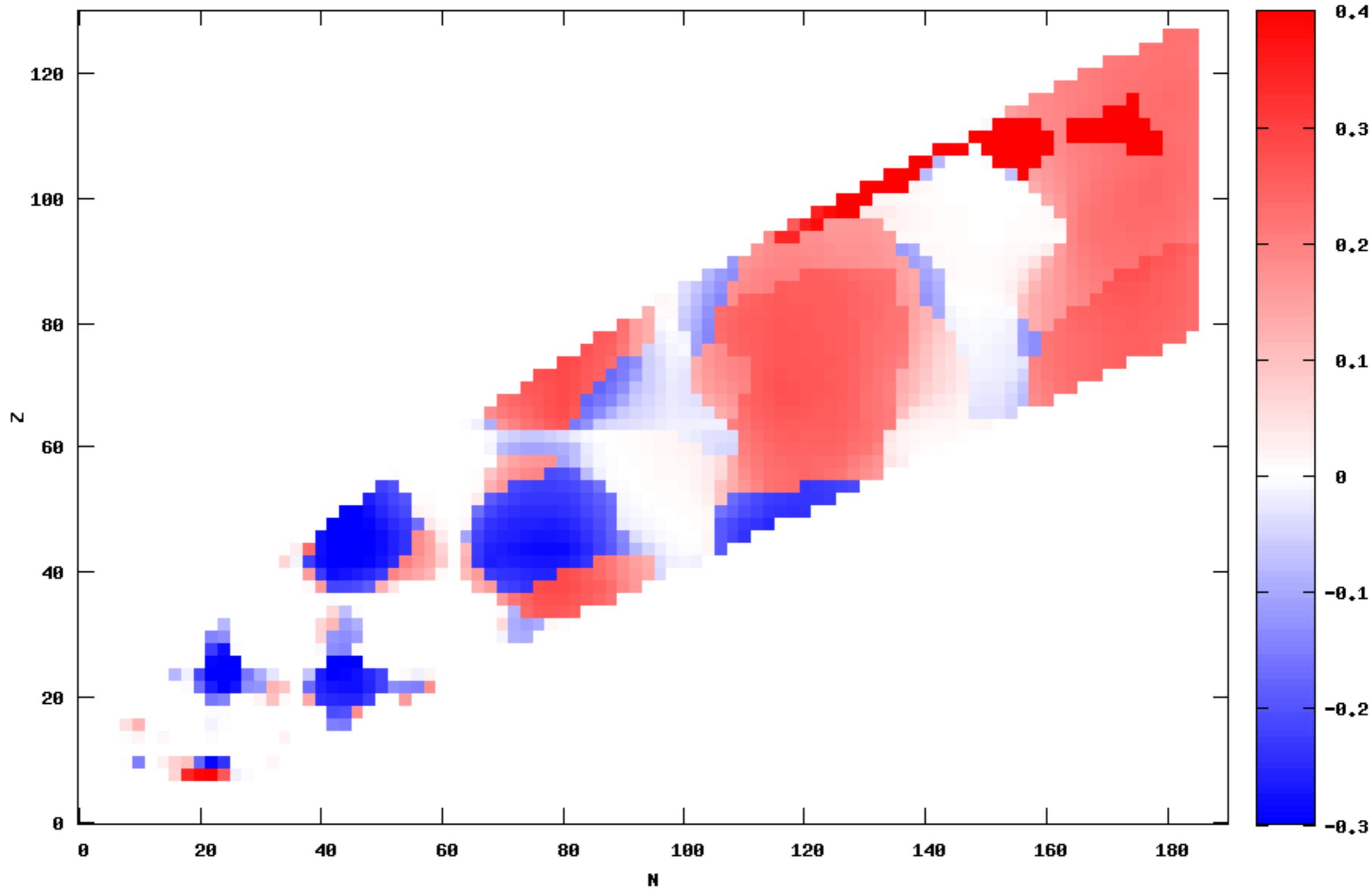
$\lambda = -2.50$



$\lambda = -2.40$

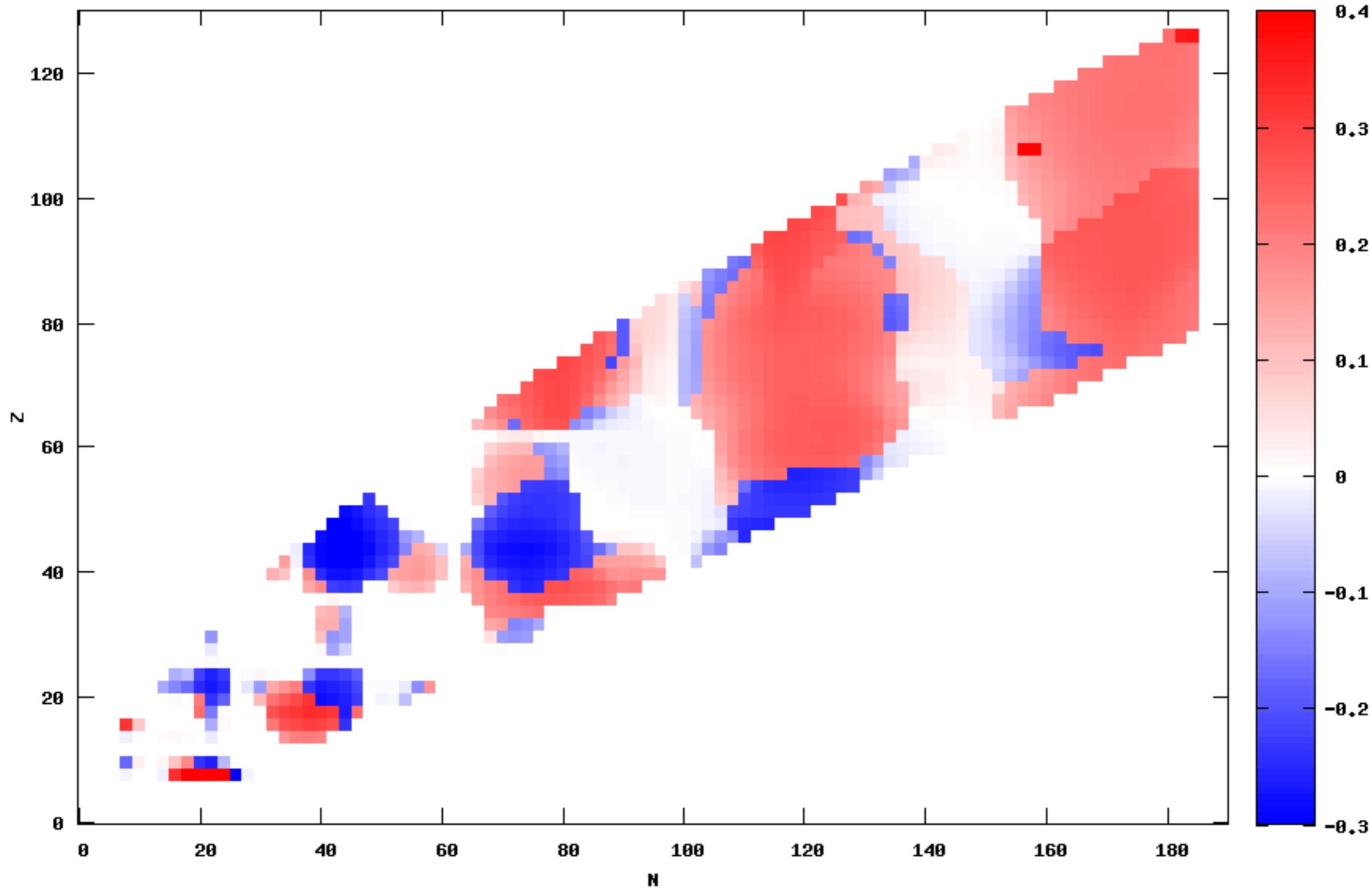


$\lambda = -2.30$

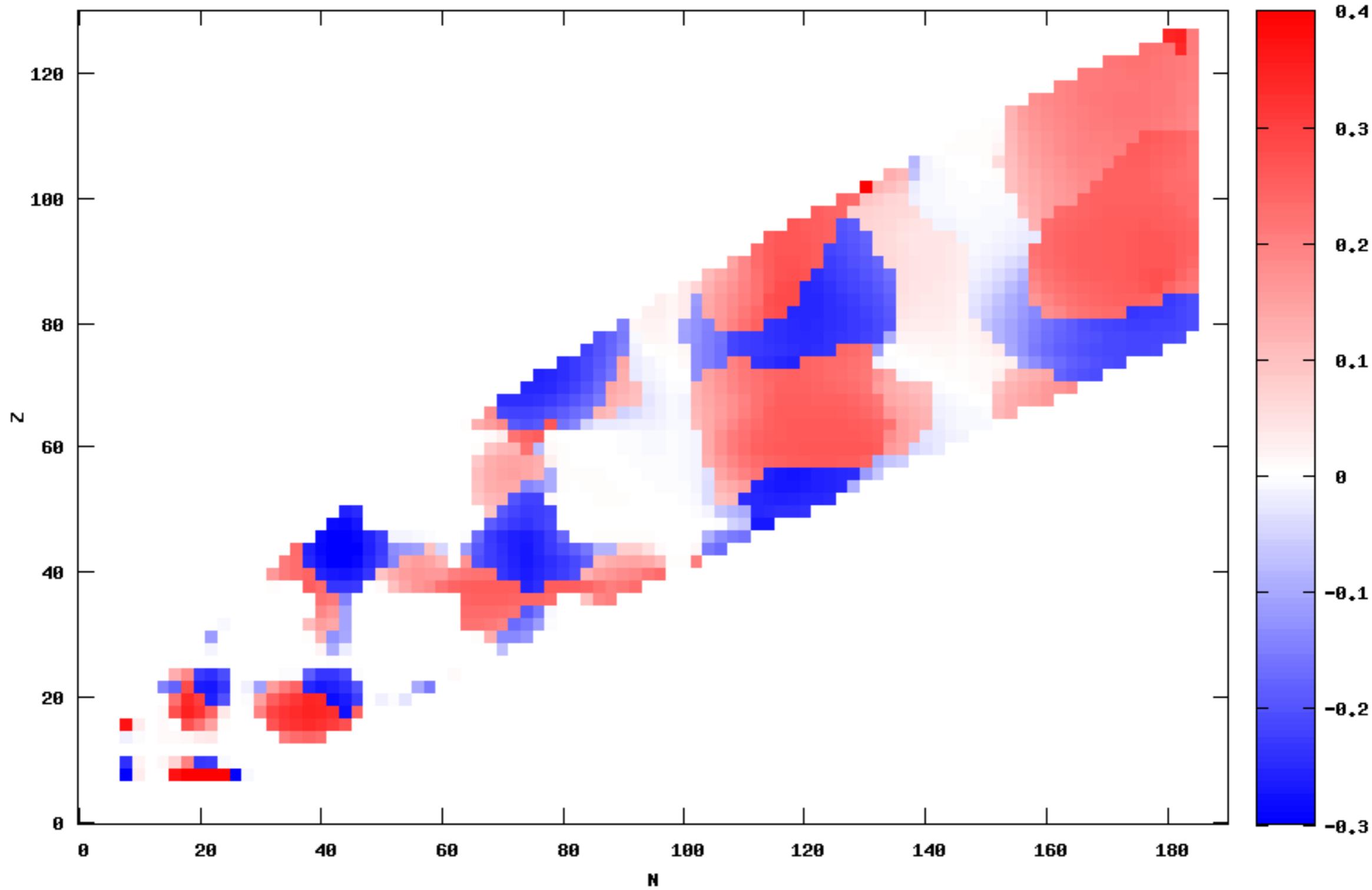




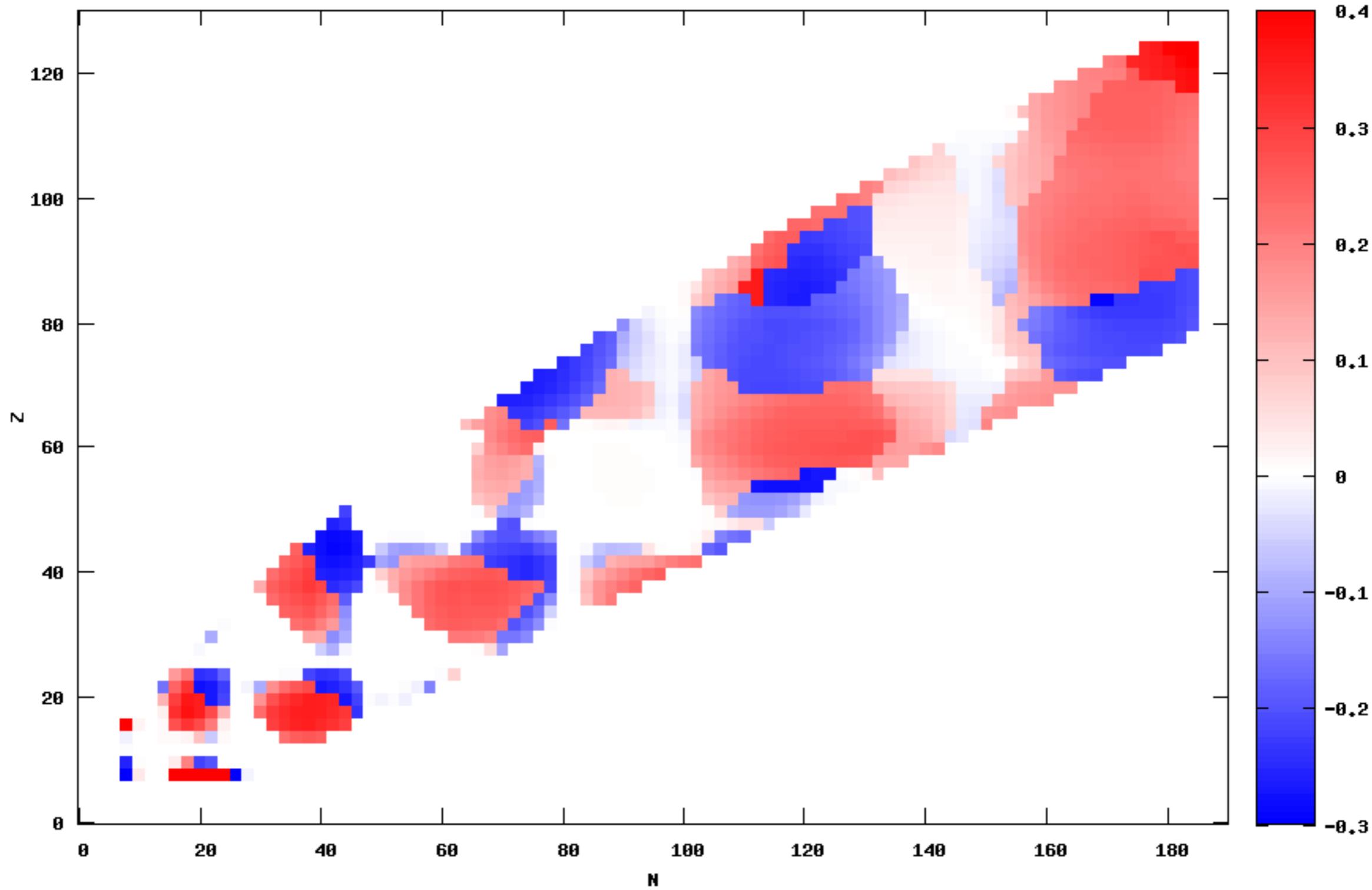
$\lambda = -2.10$



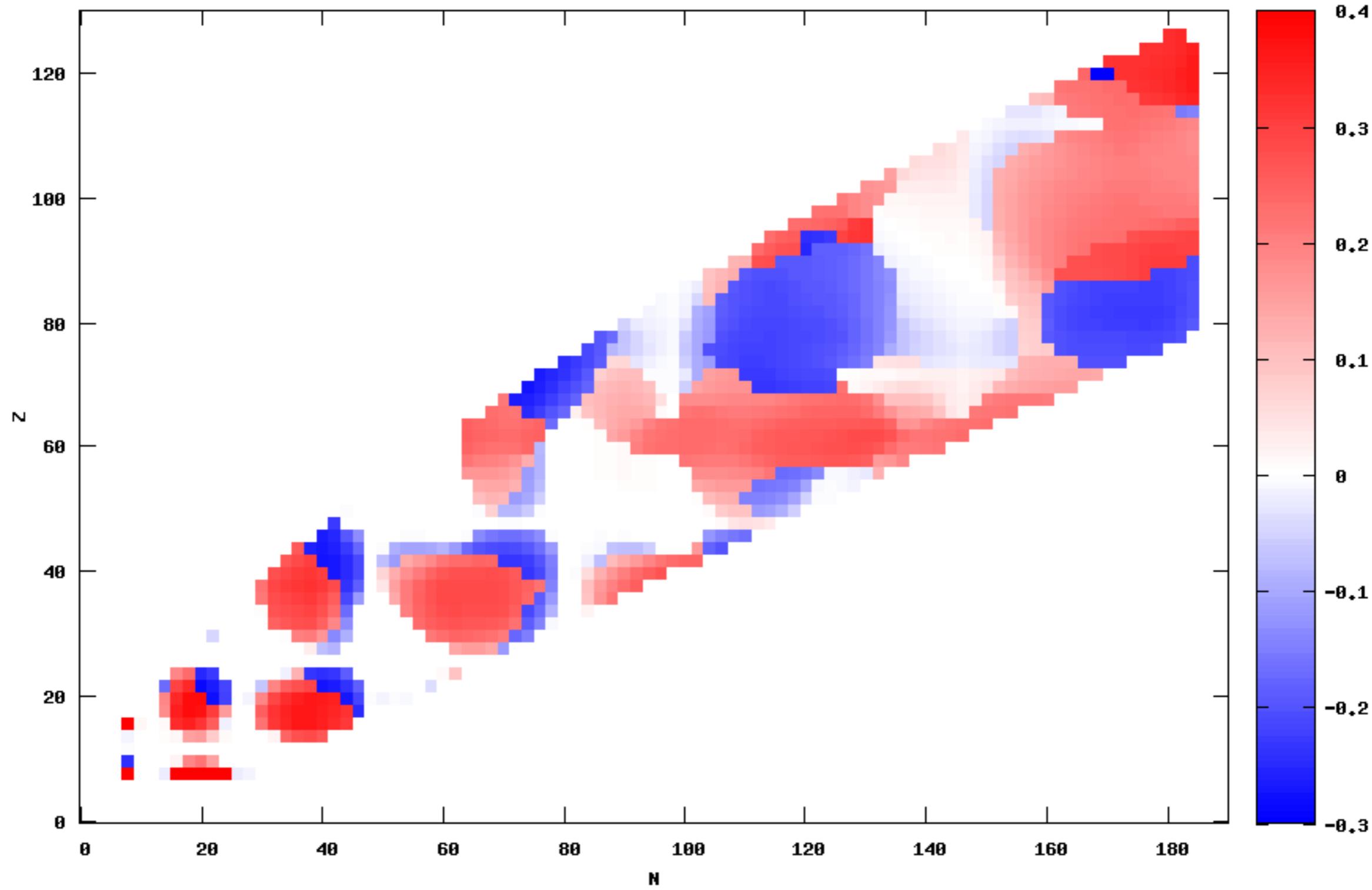
$\lambda = -2.00$



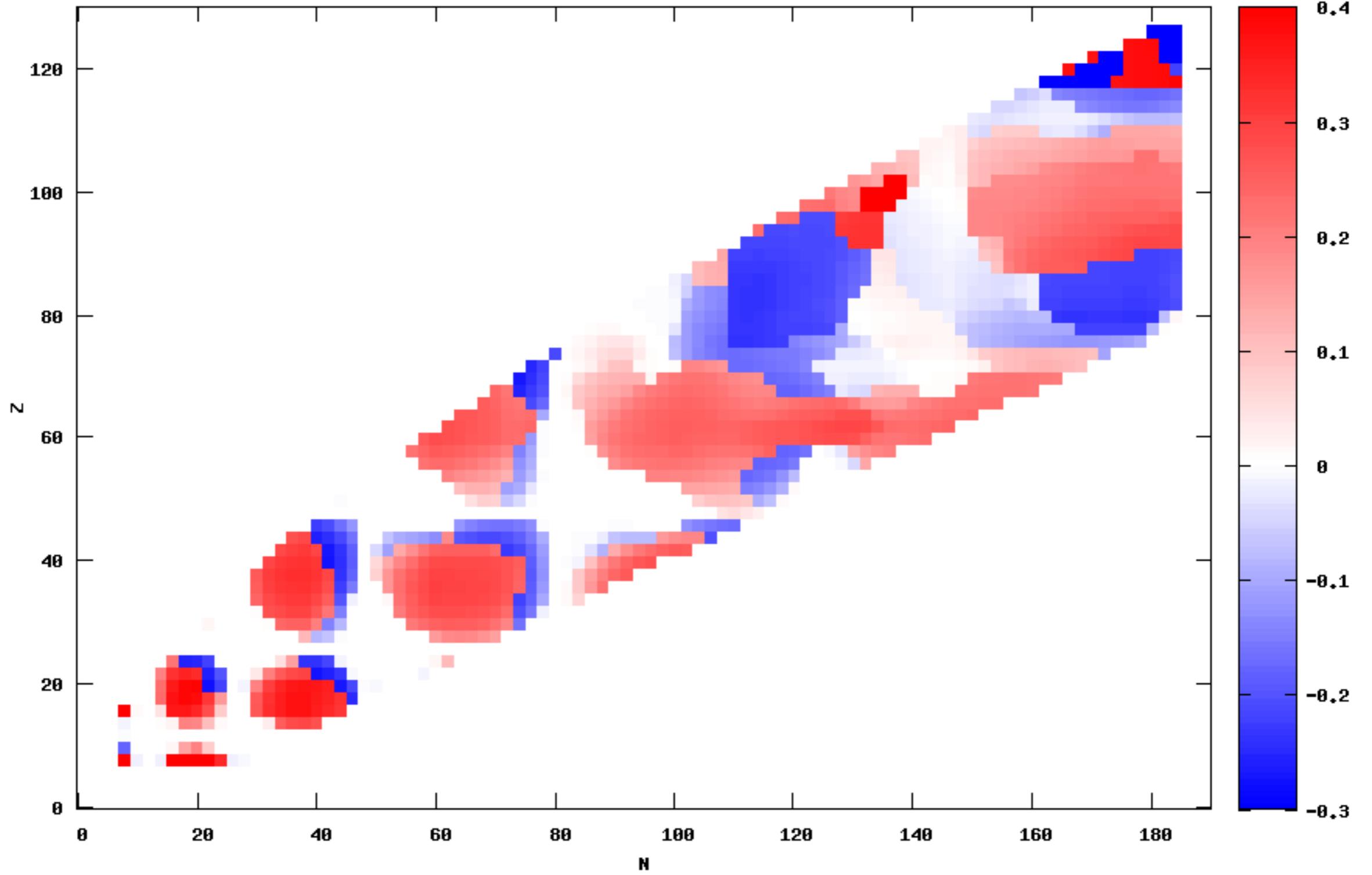
$\lambda = -1.90$



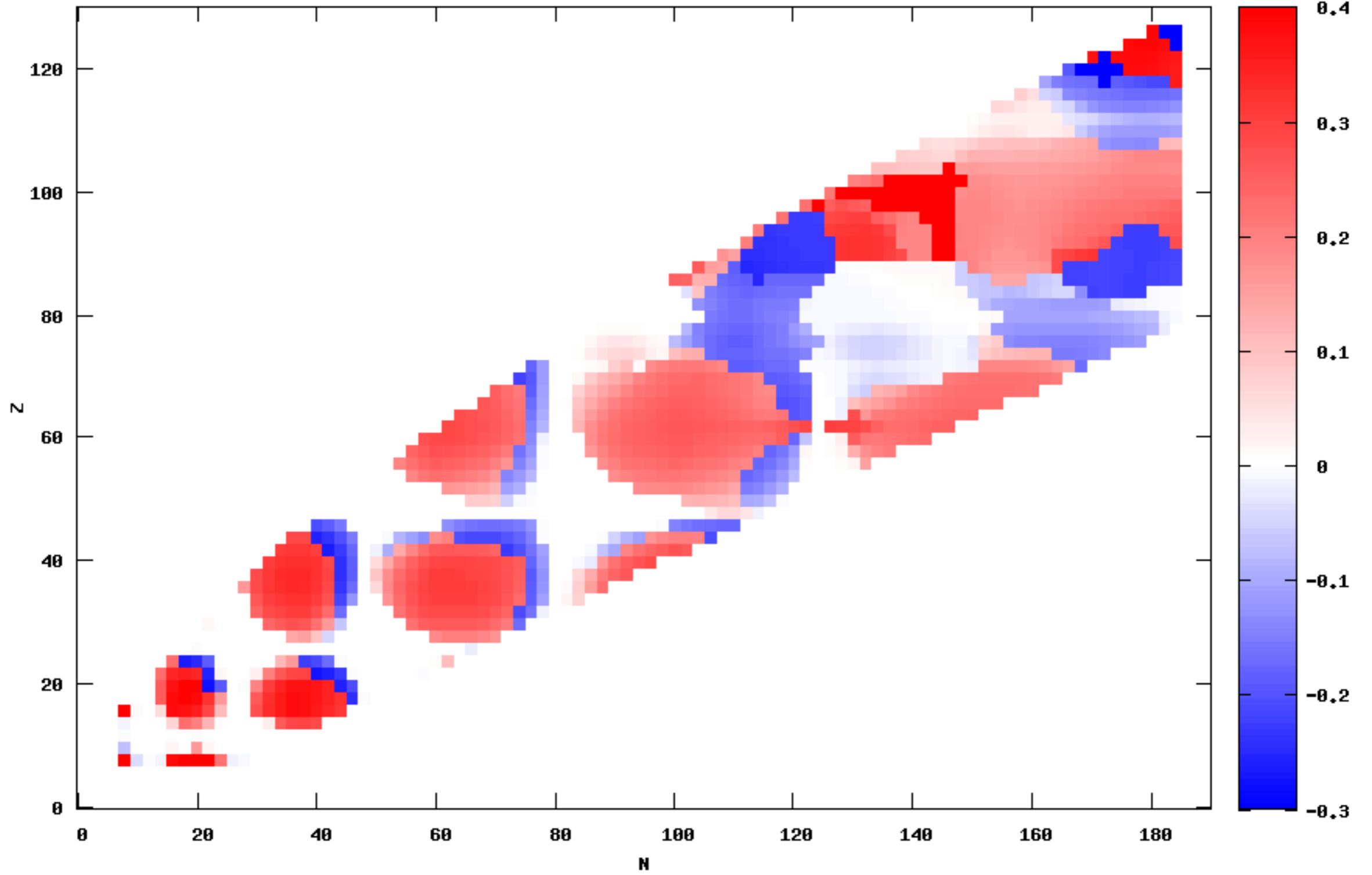
$\lambda = -1.80$



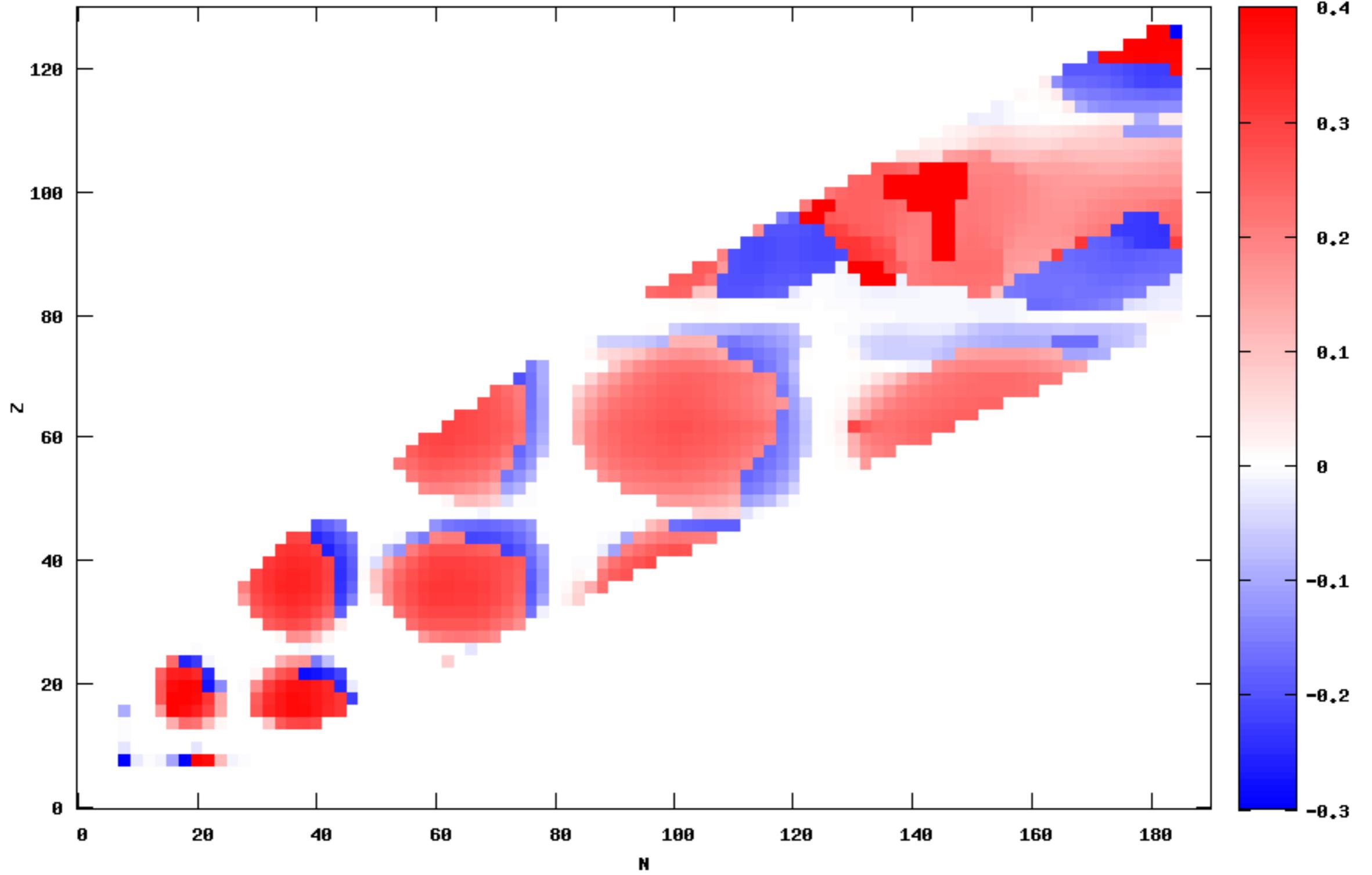
$\lambda = -1.70$



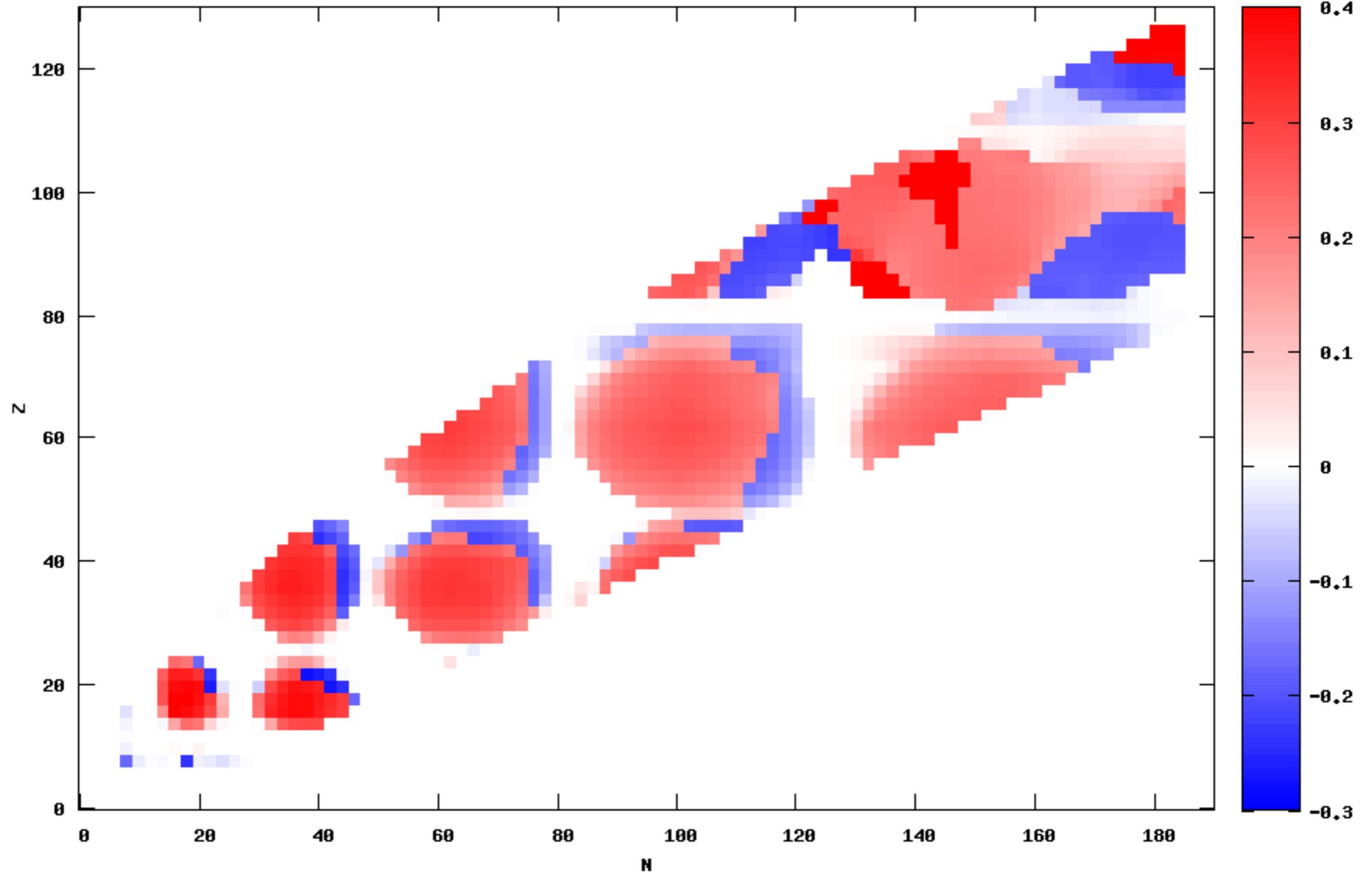
$\lambda = -1.60$



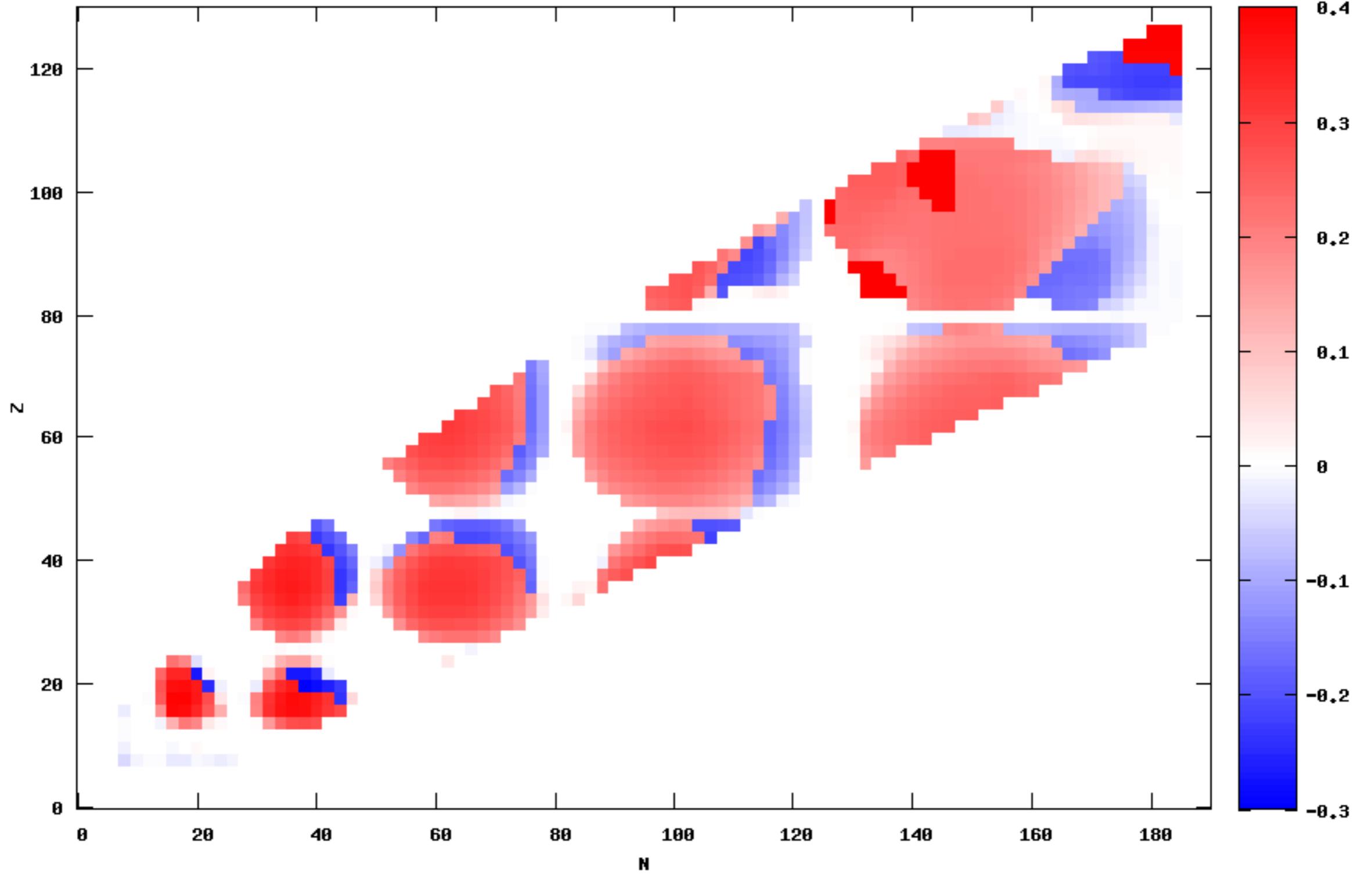
$\lambda = -1.50$



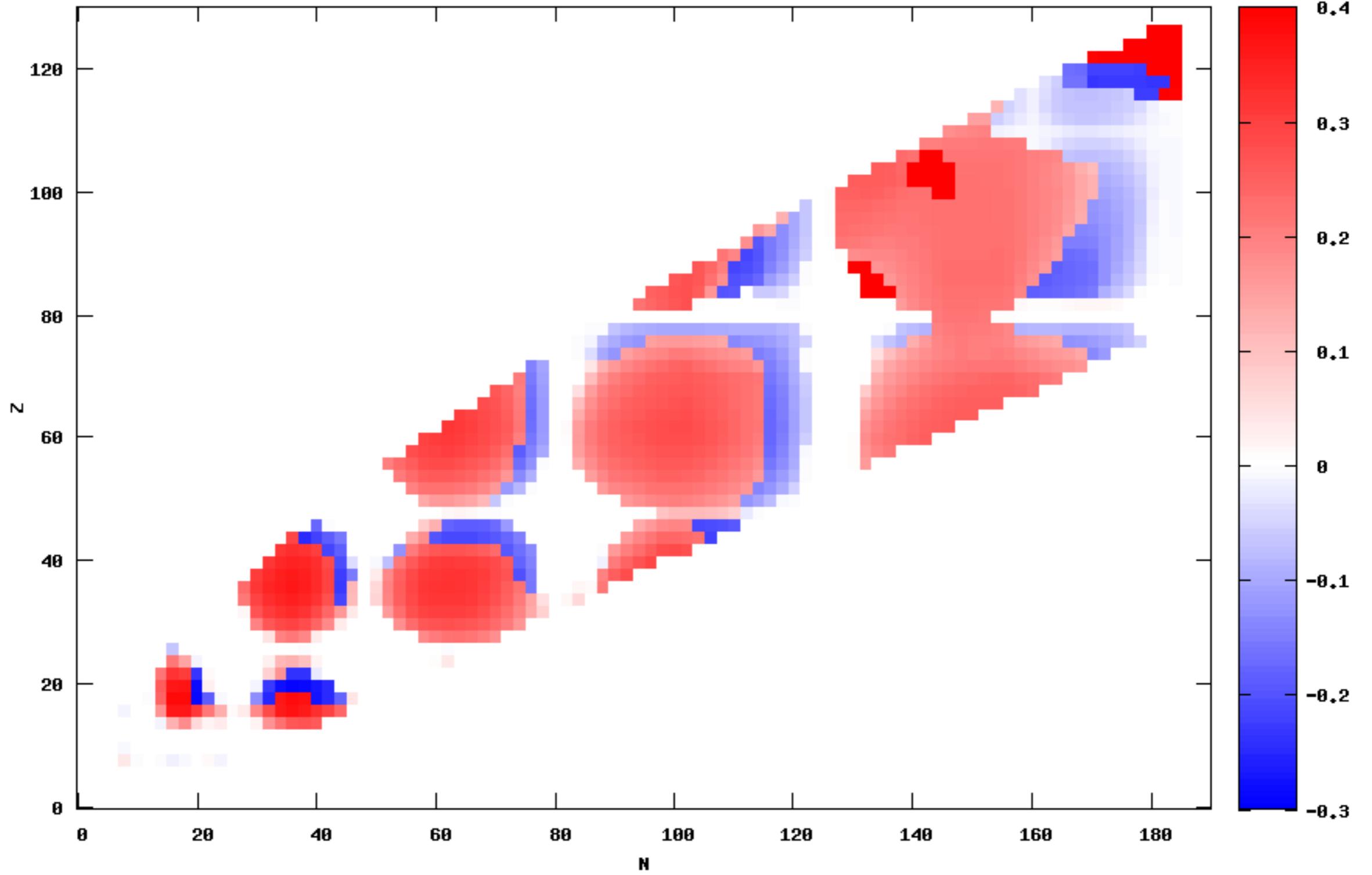
$\lambda = -1.40$



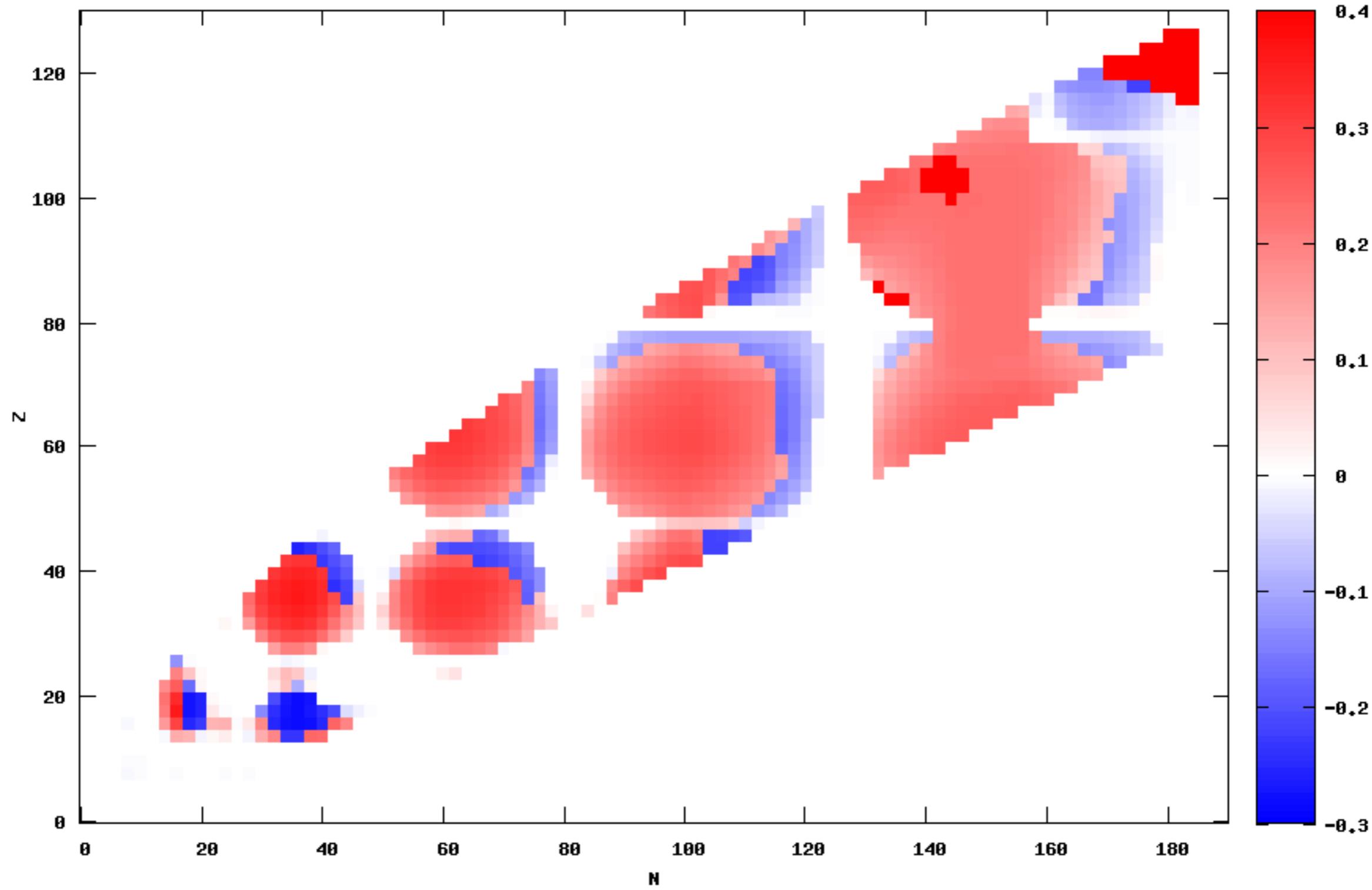
$\lambda = -1.30$



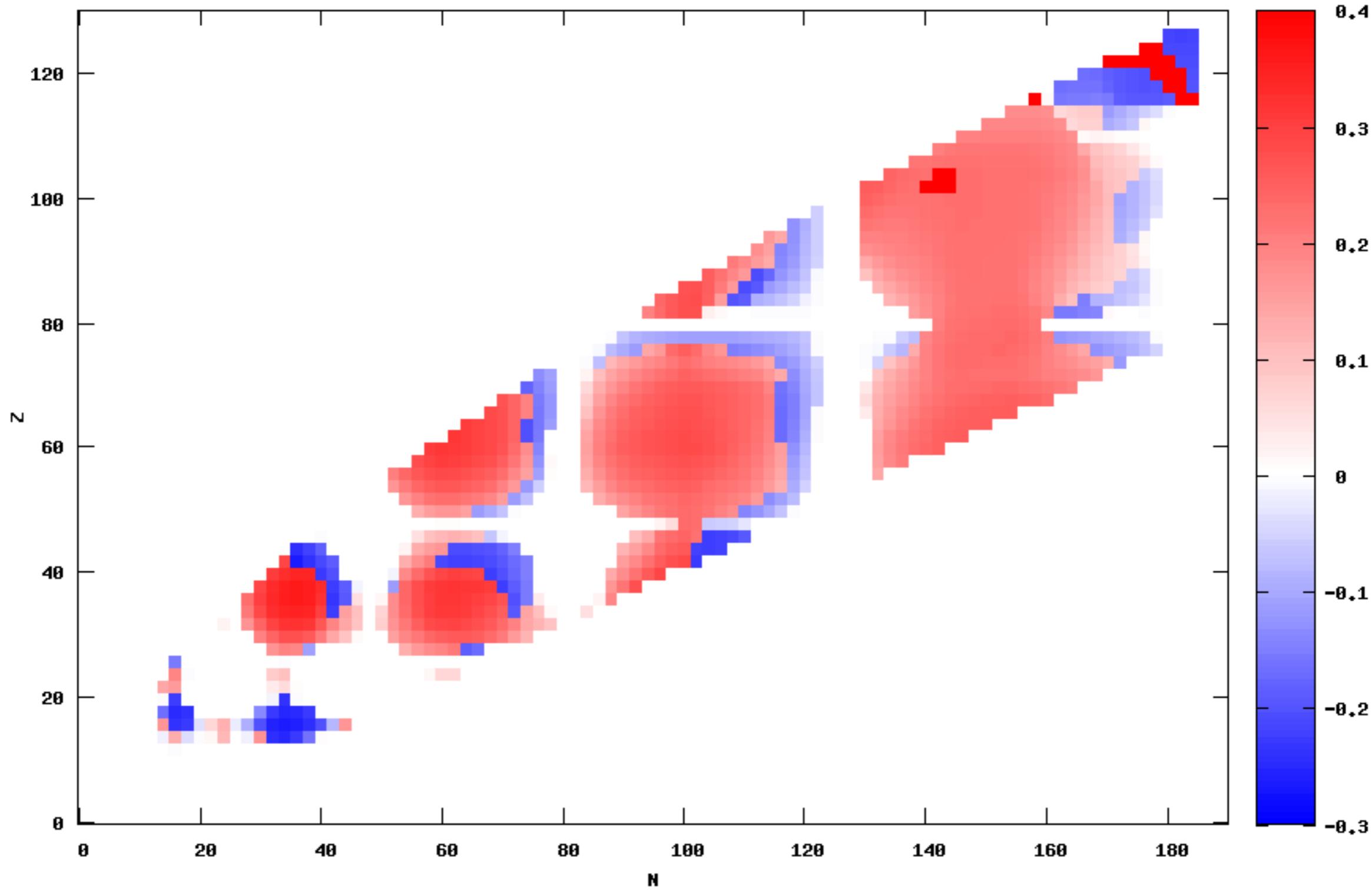
$\lambda = -1.20$



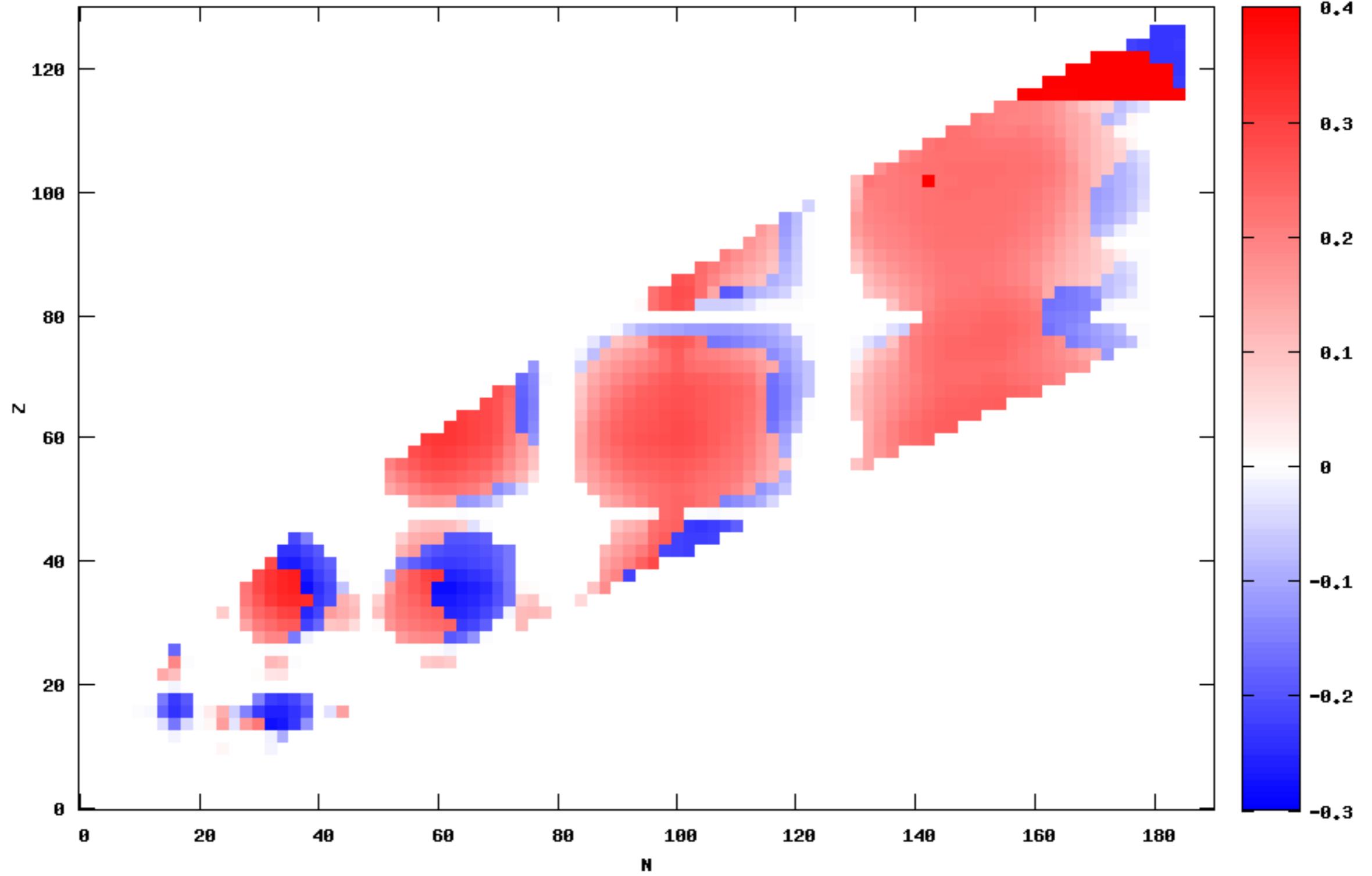
$\lambda = -1.10$



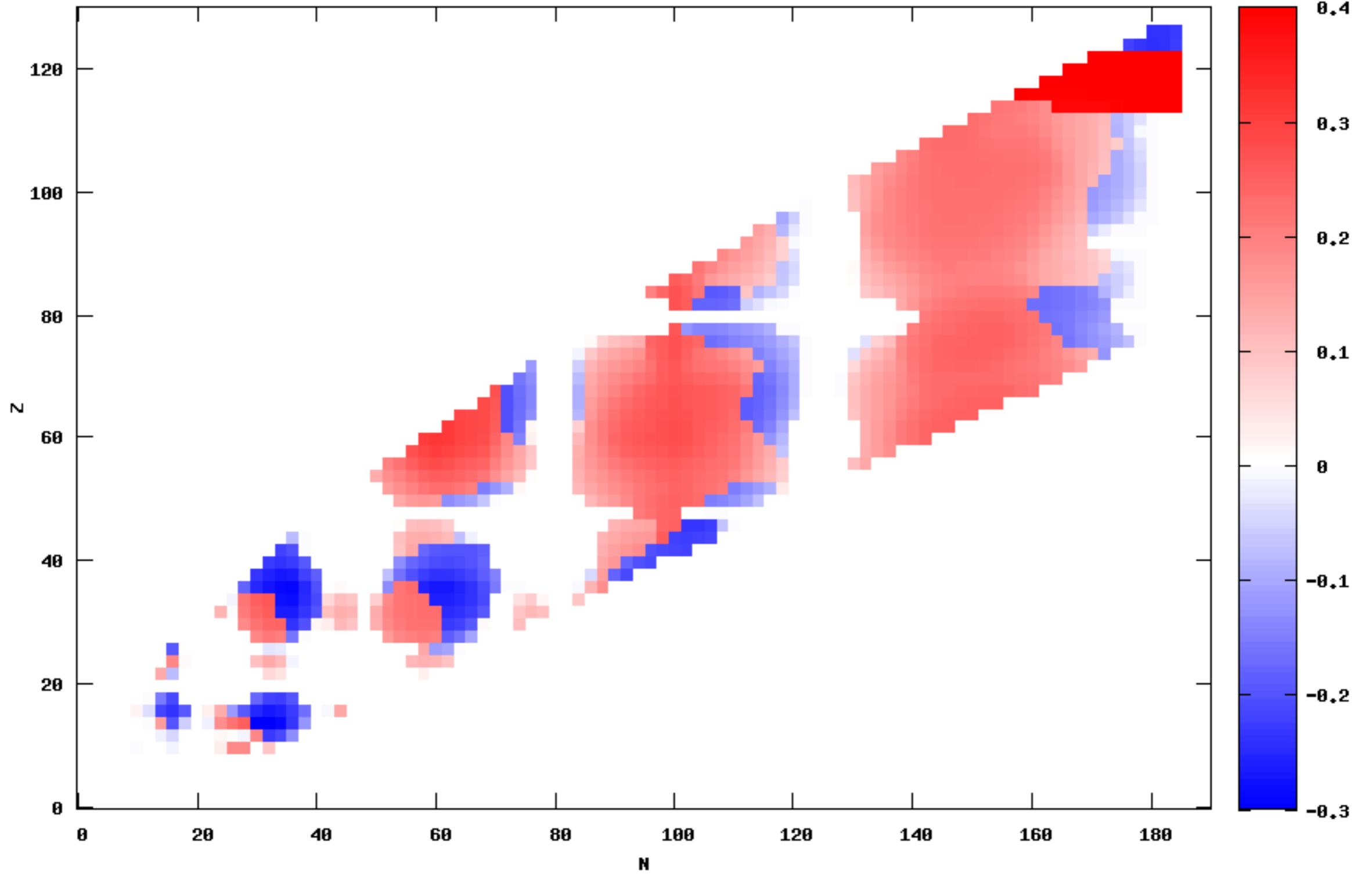
$\lambda = -1.00$



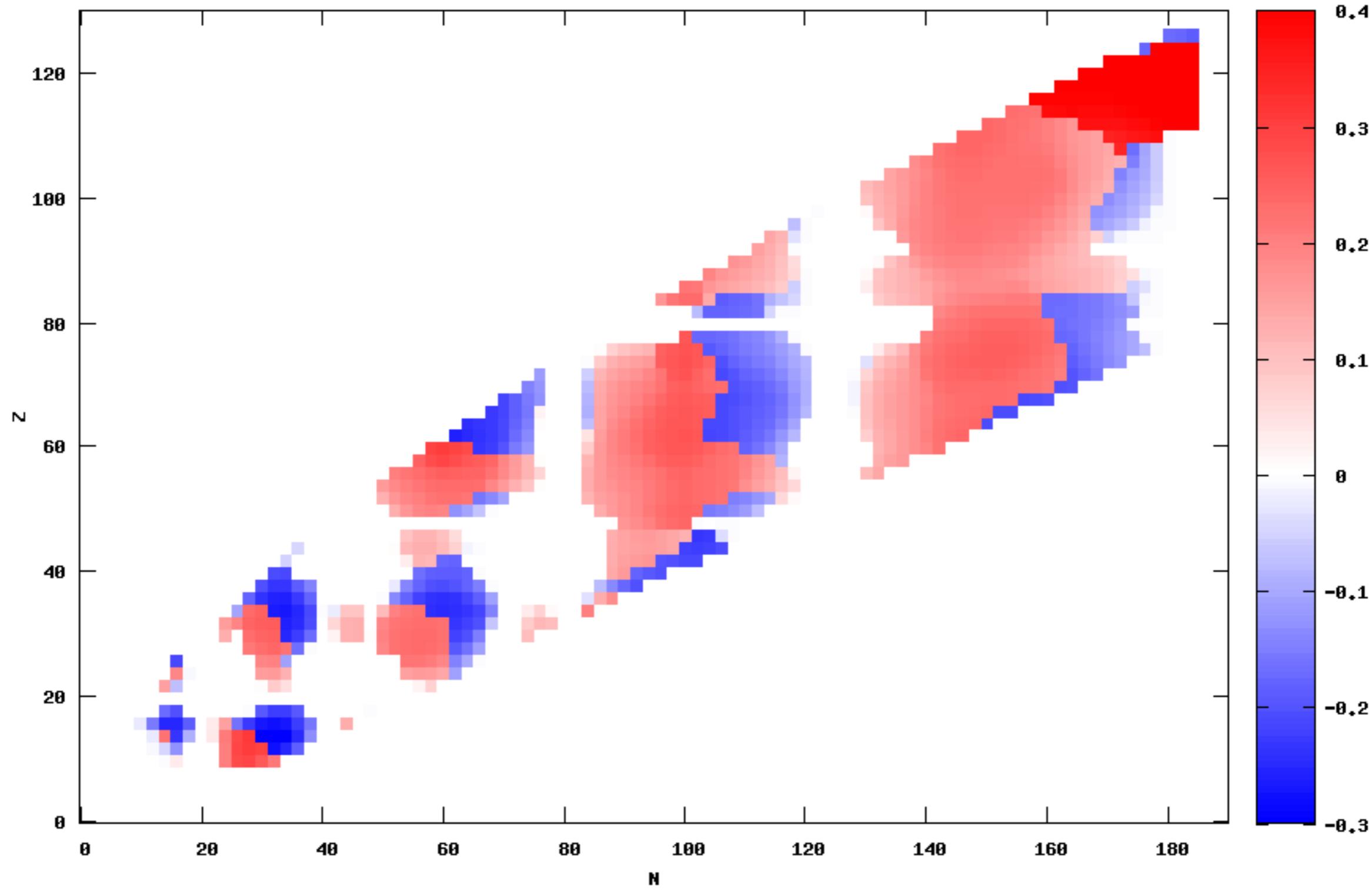
$\lambda = -0.90$



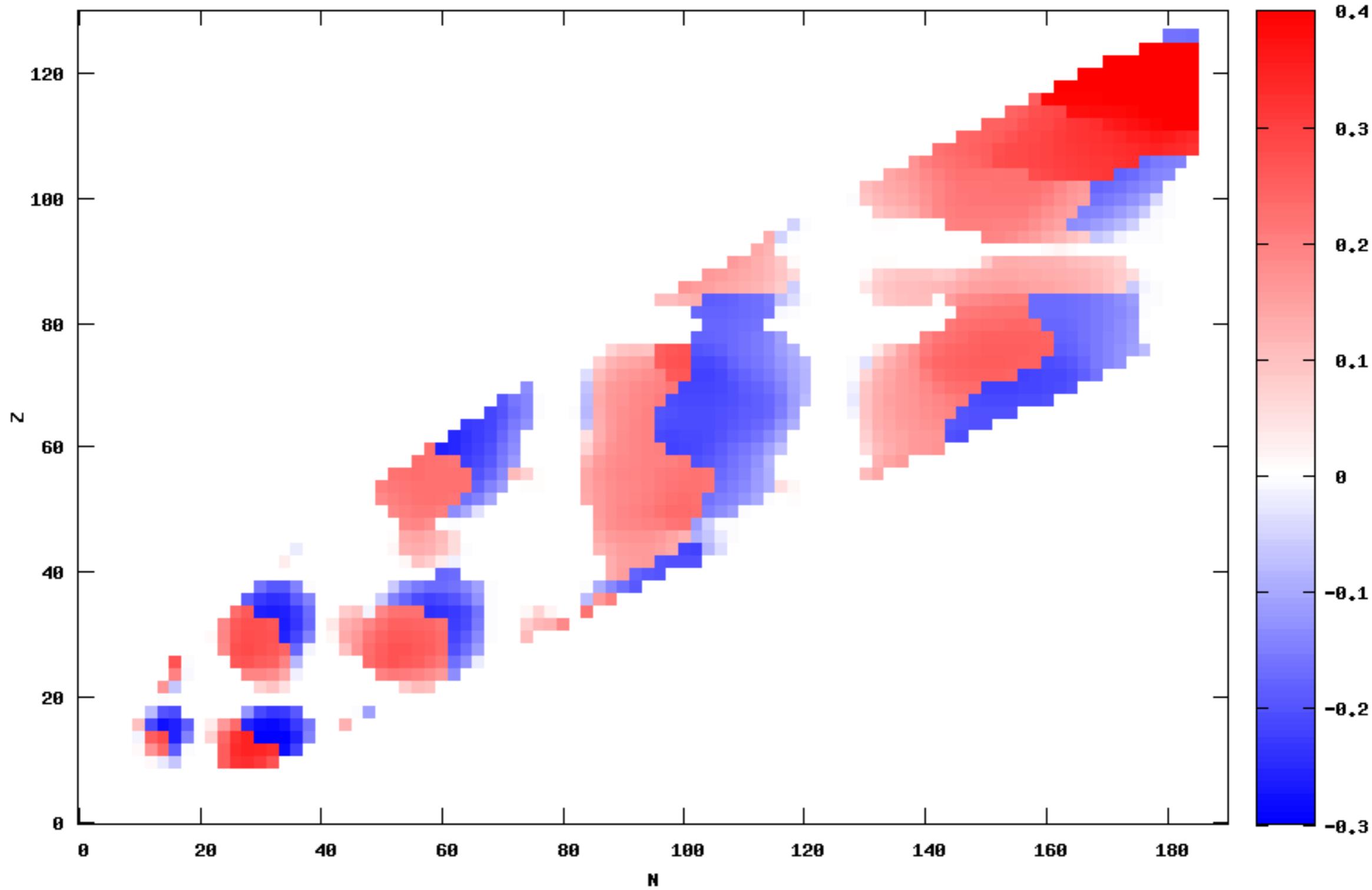
$\lambda = -0.80$



$\lambda = -0.70$

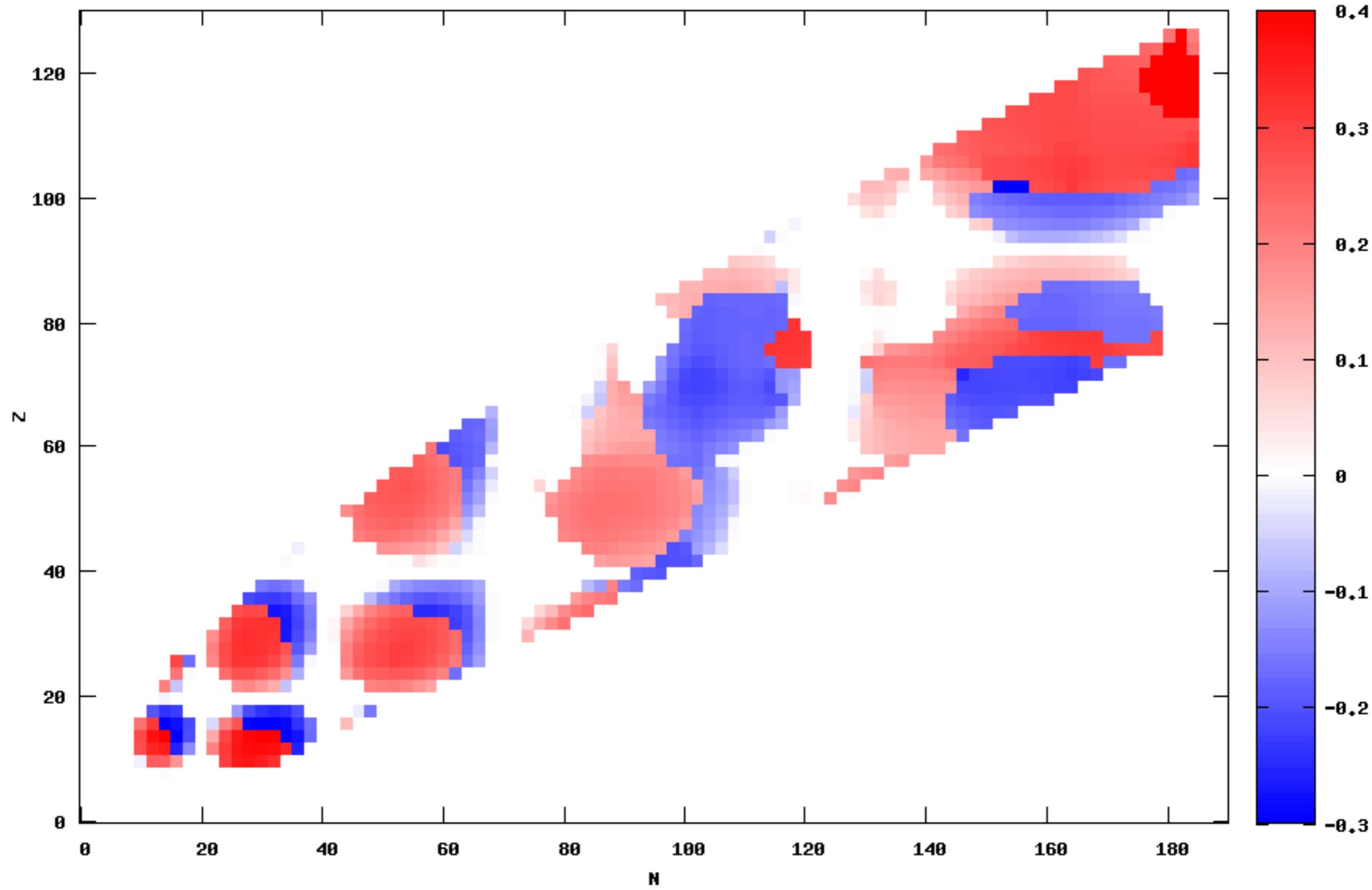


$\lambda = -0.60$

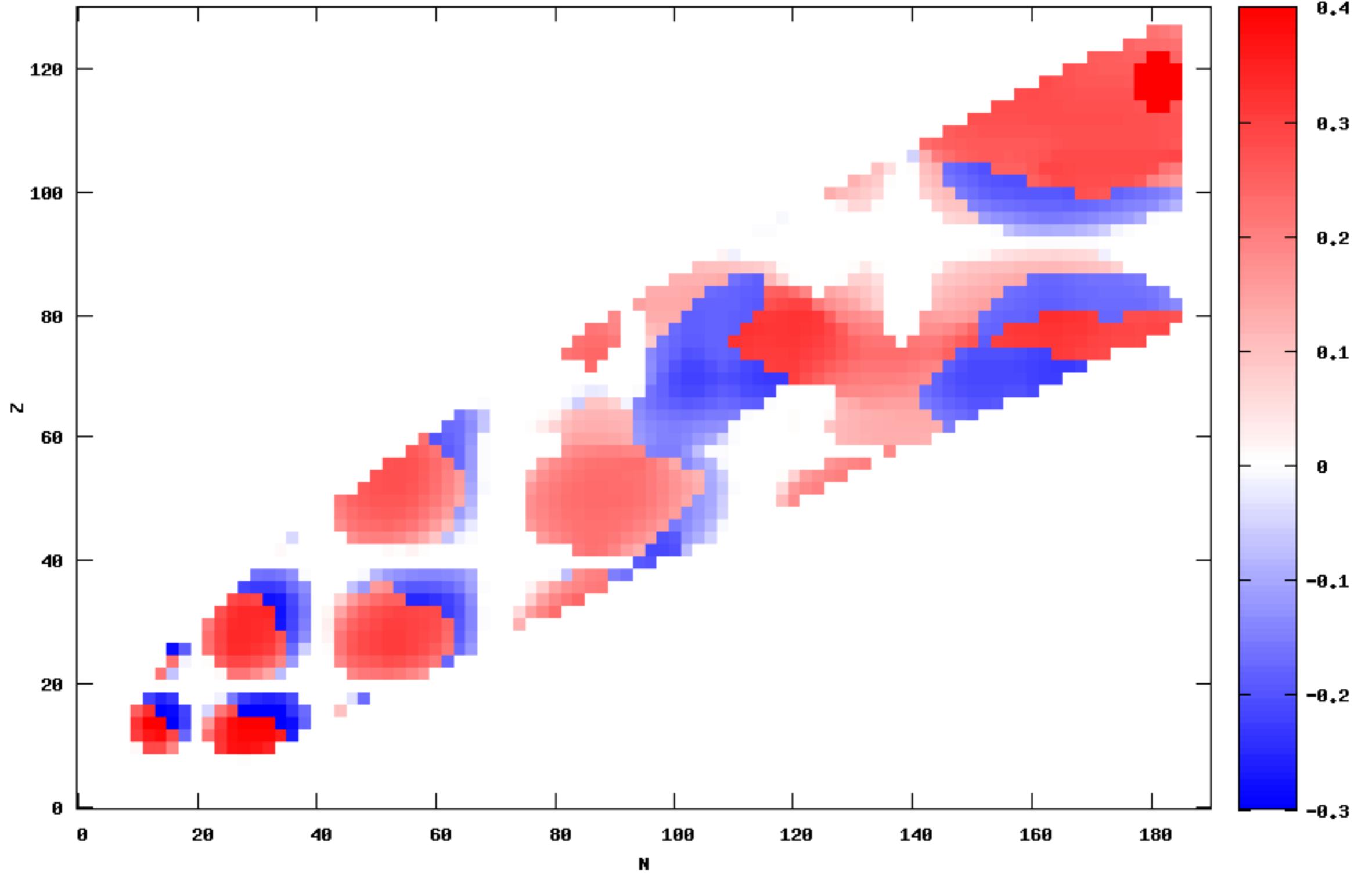




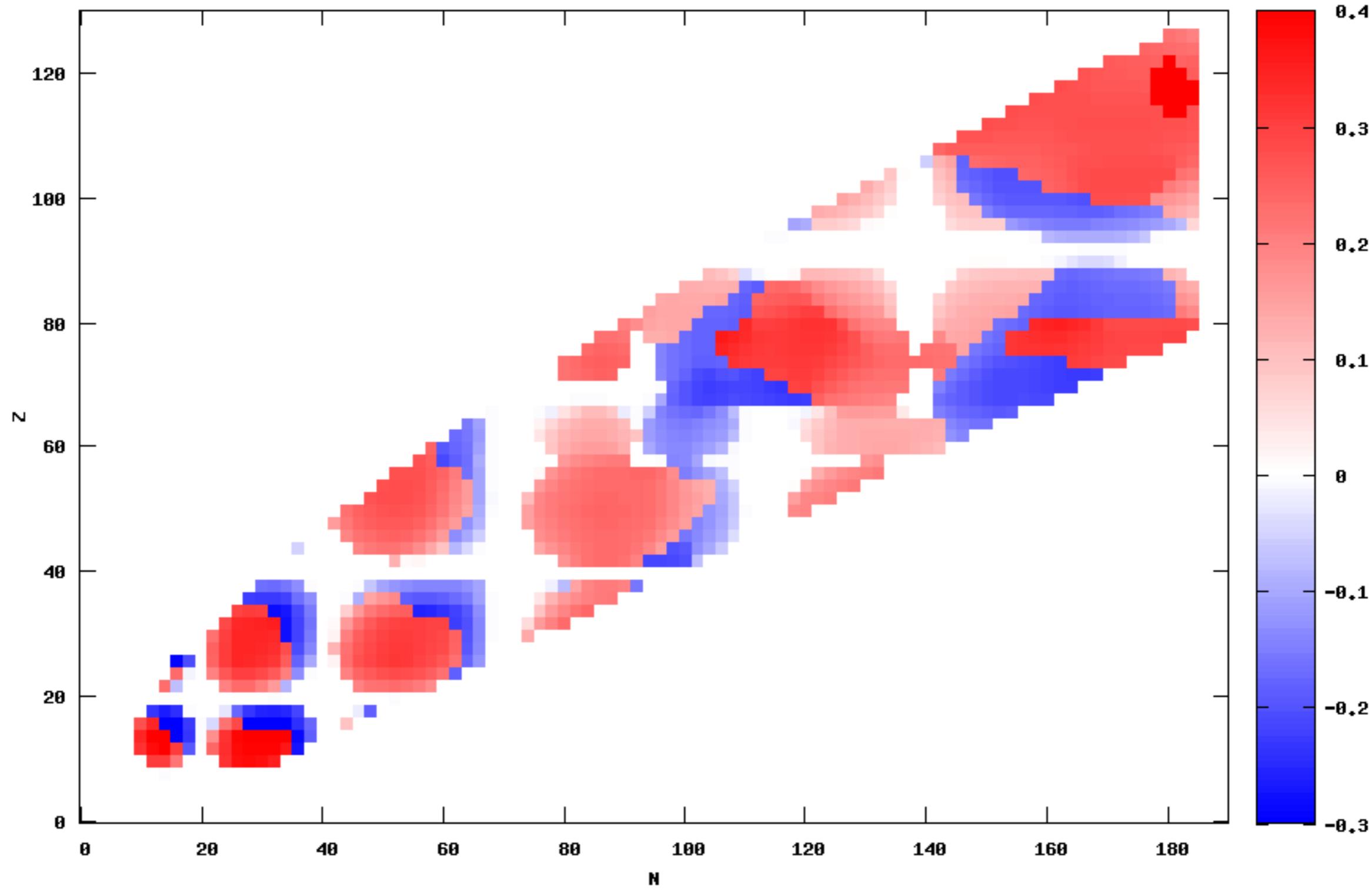
$\lambda = -0.40$



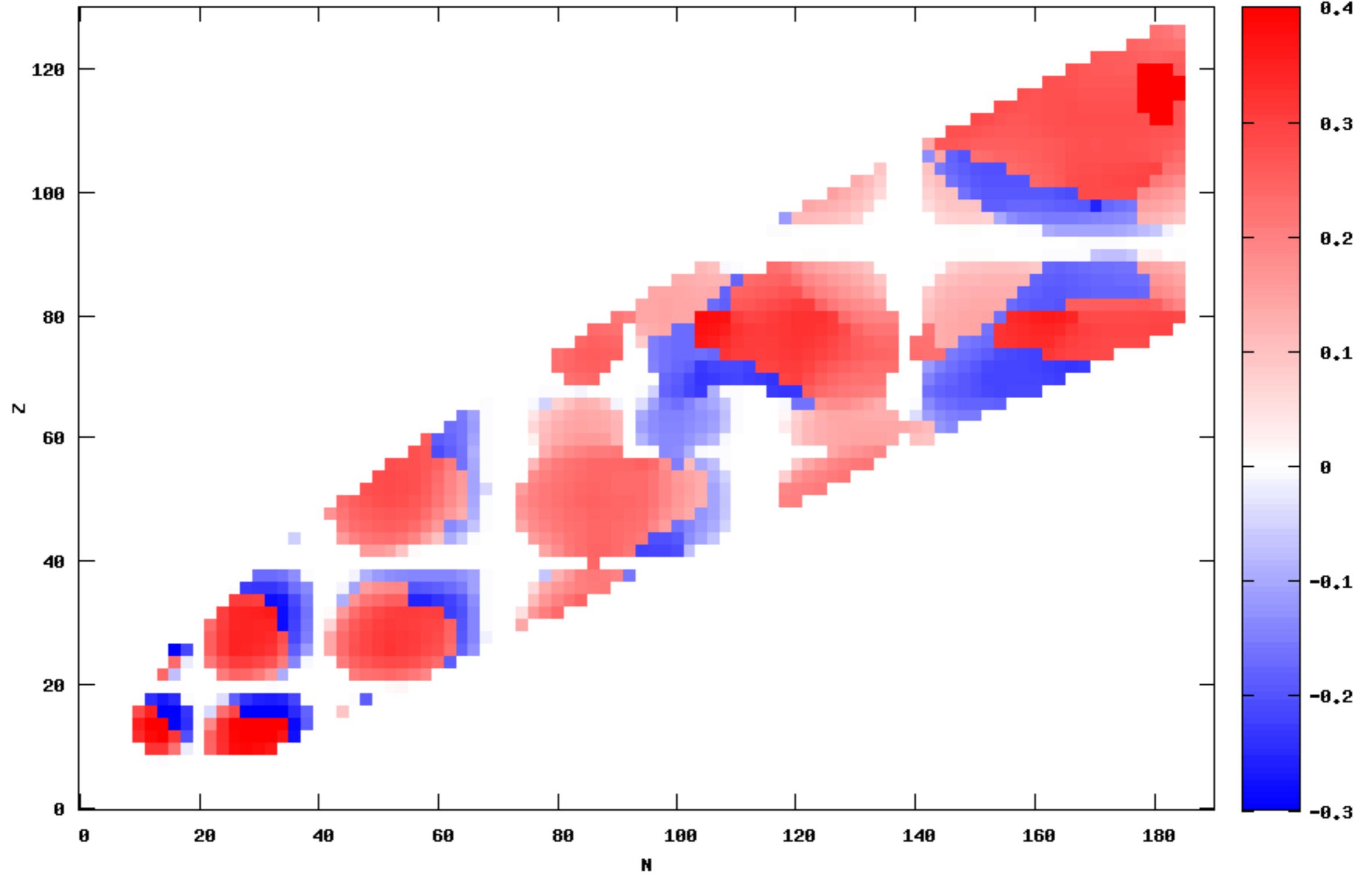
$\lambda = -0.30$



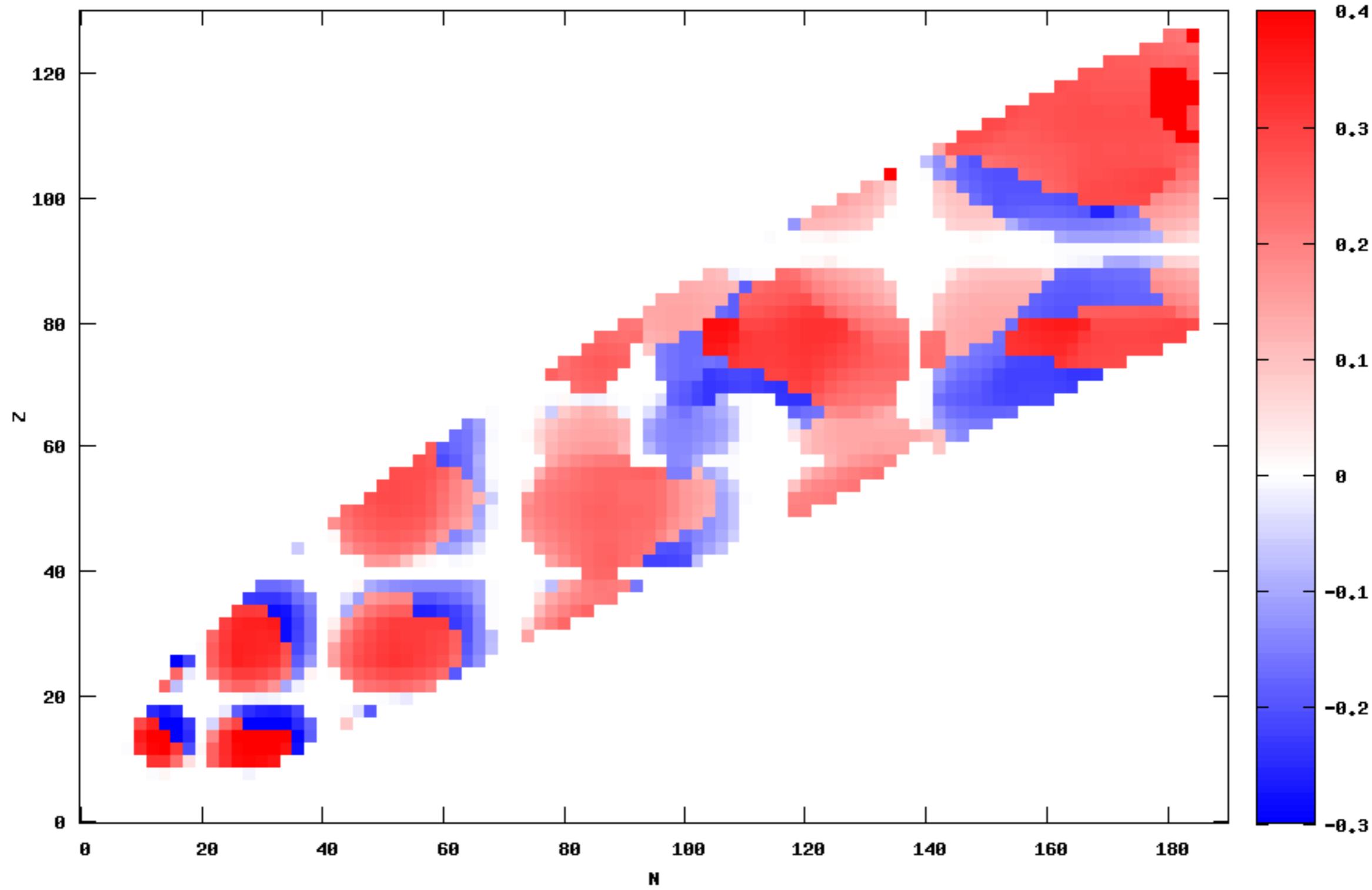
$\lambda = -0.20$



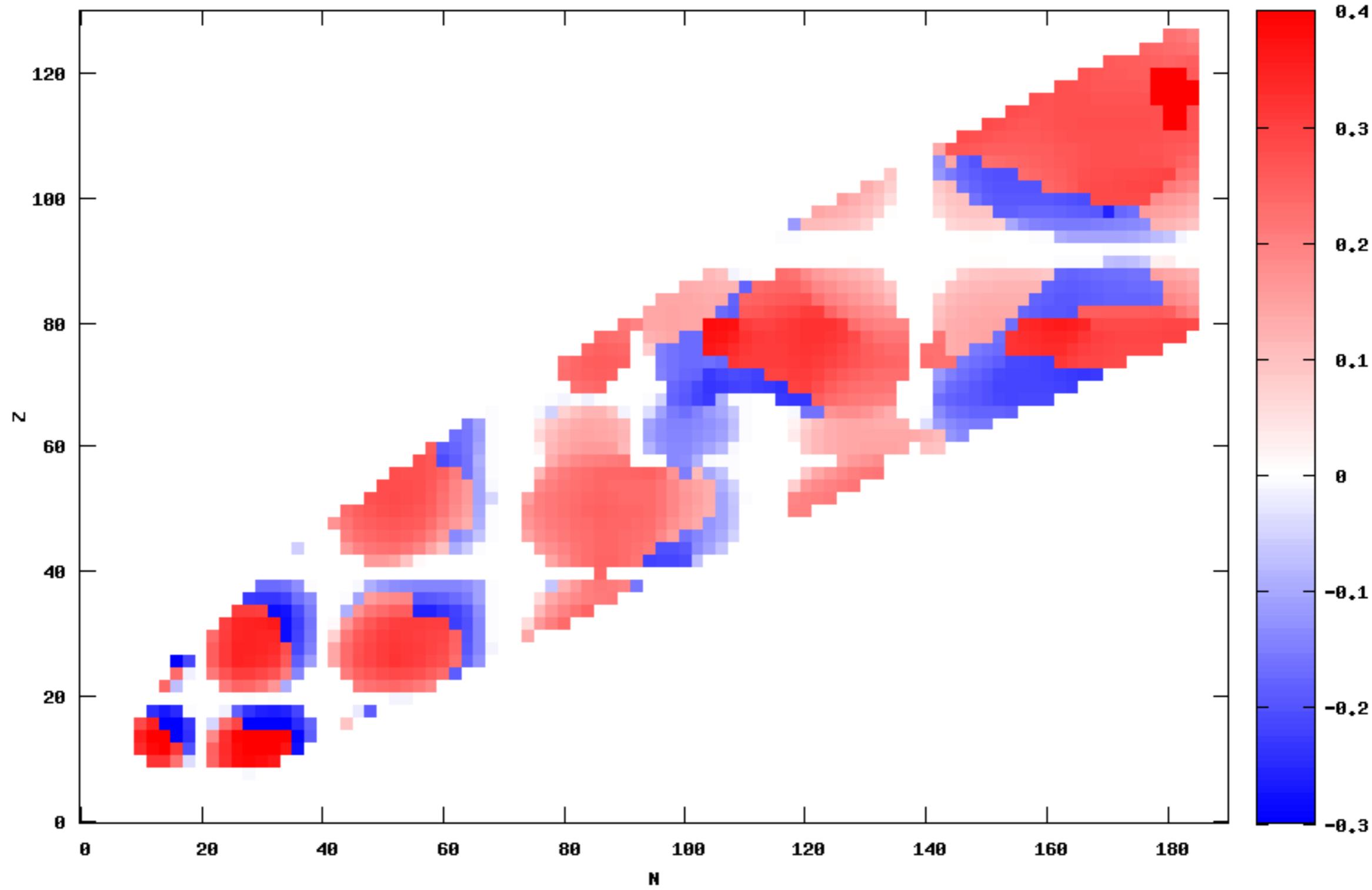
$\lambda = -0.10$



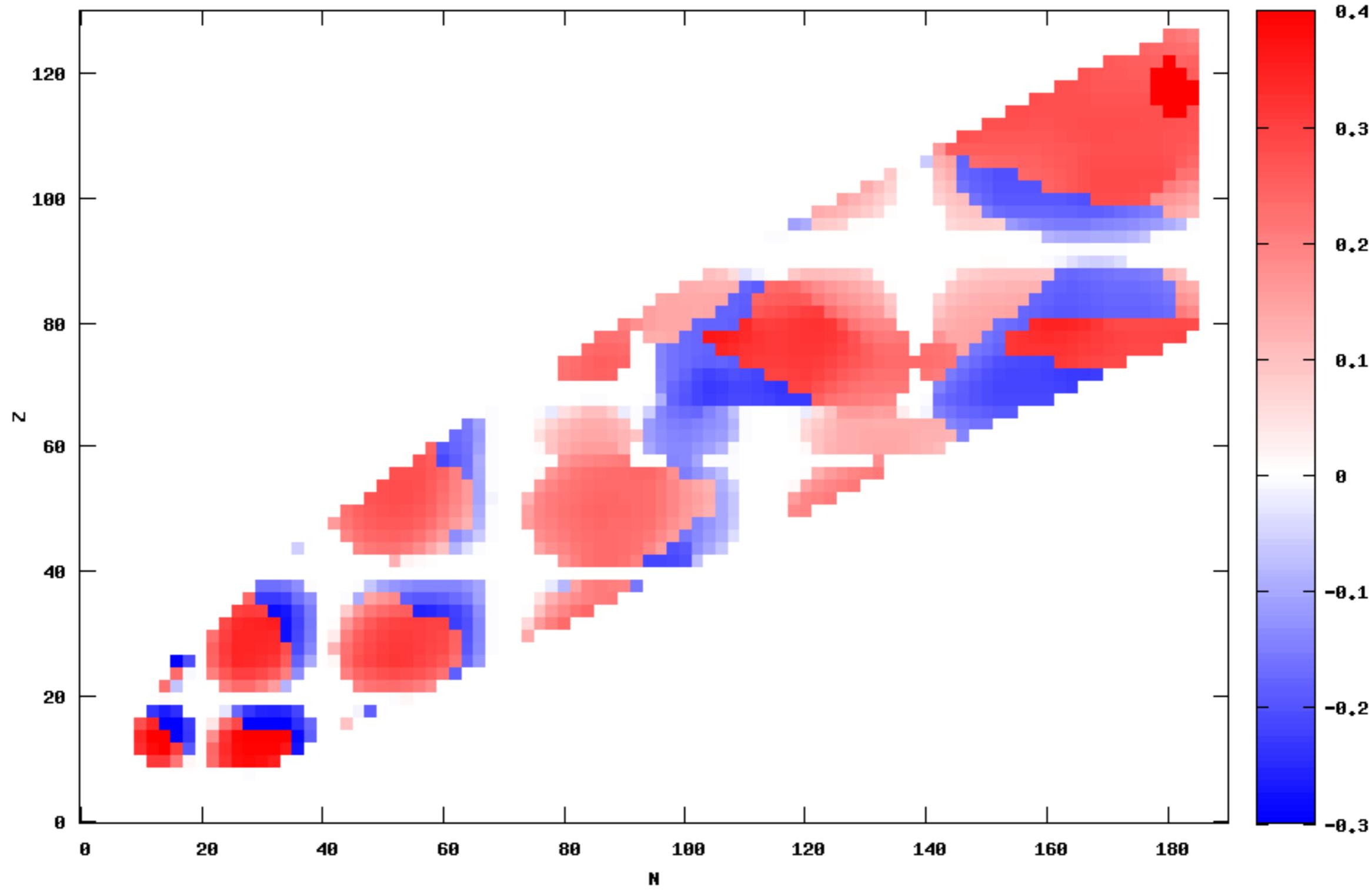
$\lambda = +0.00$



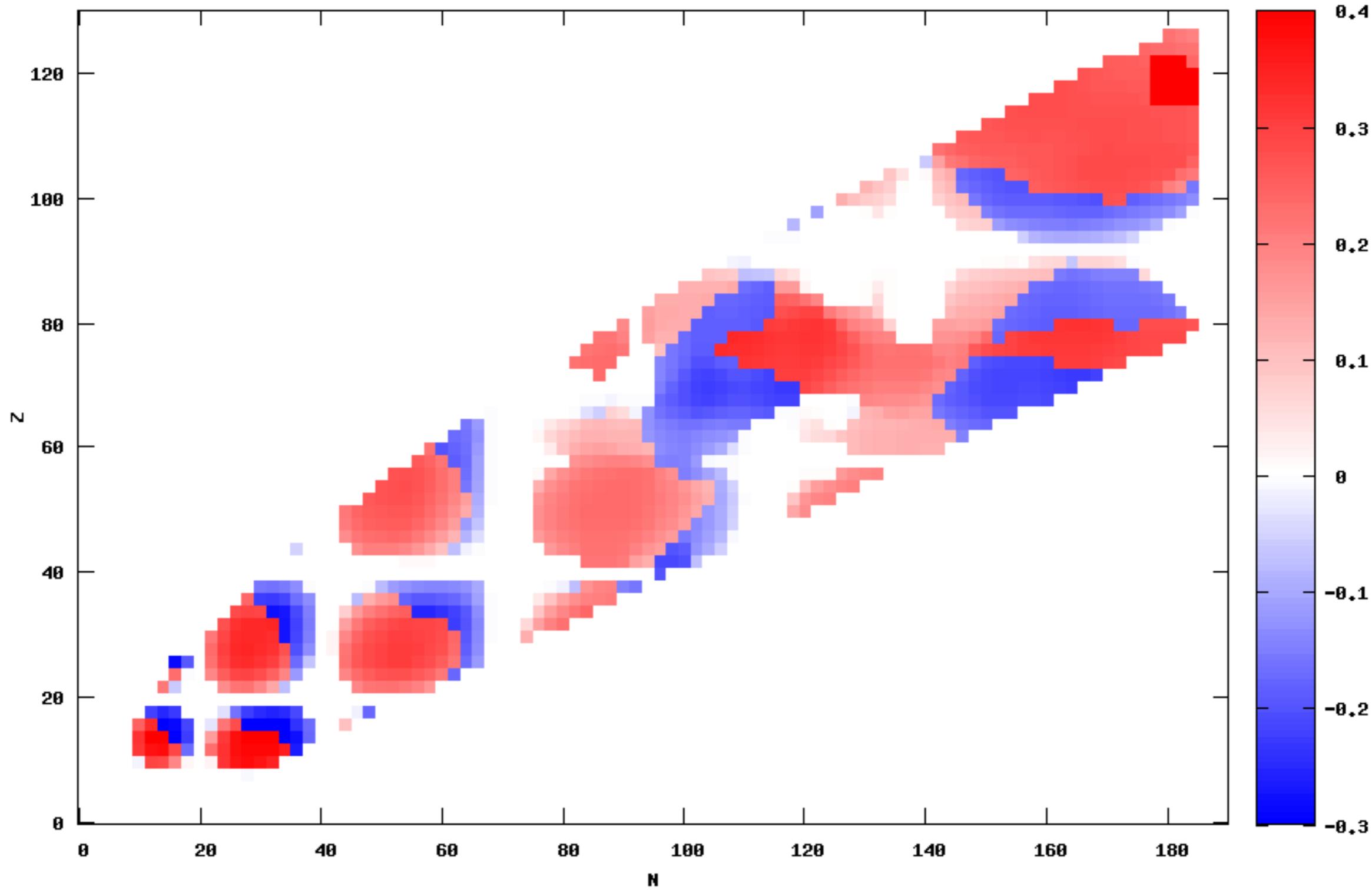
$\lambda = +0.10$



$\lambda = +0.20$

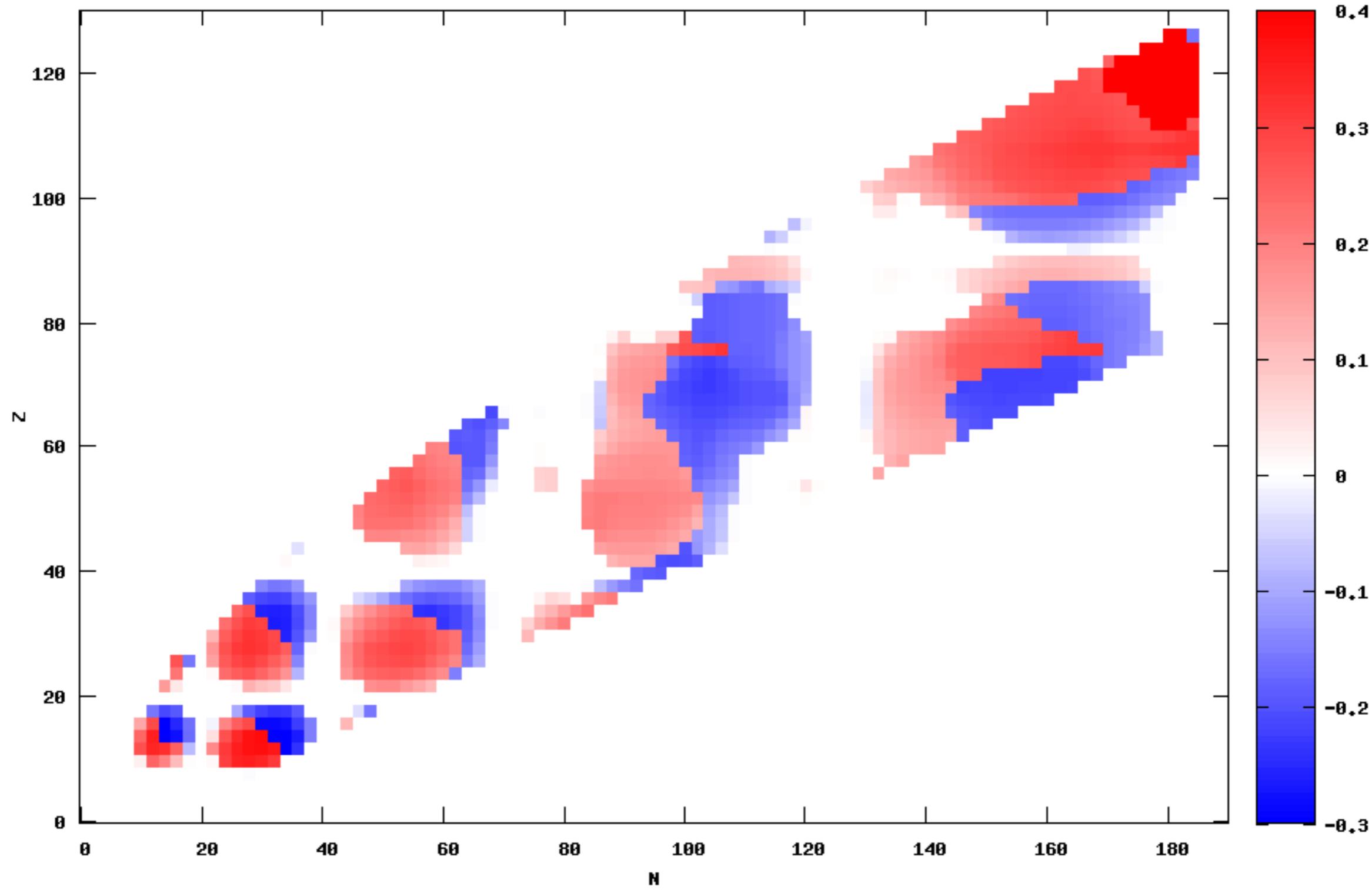


$\lambda = +0.30$

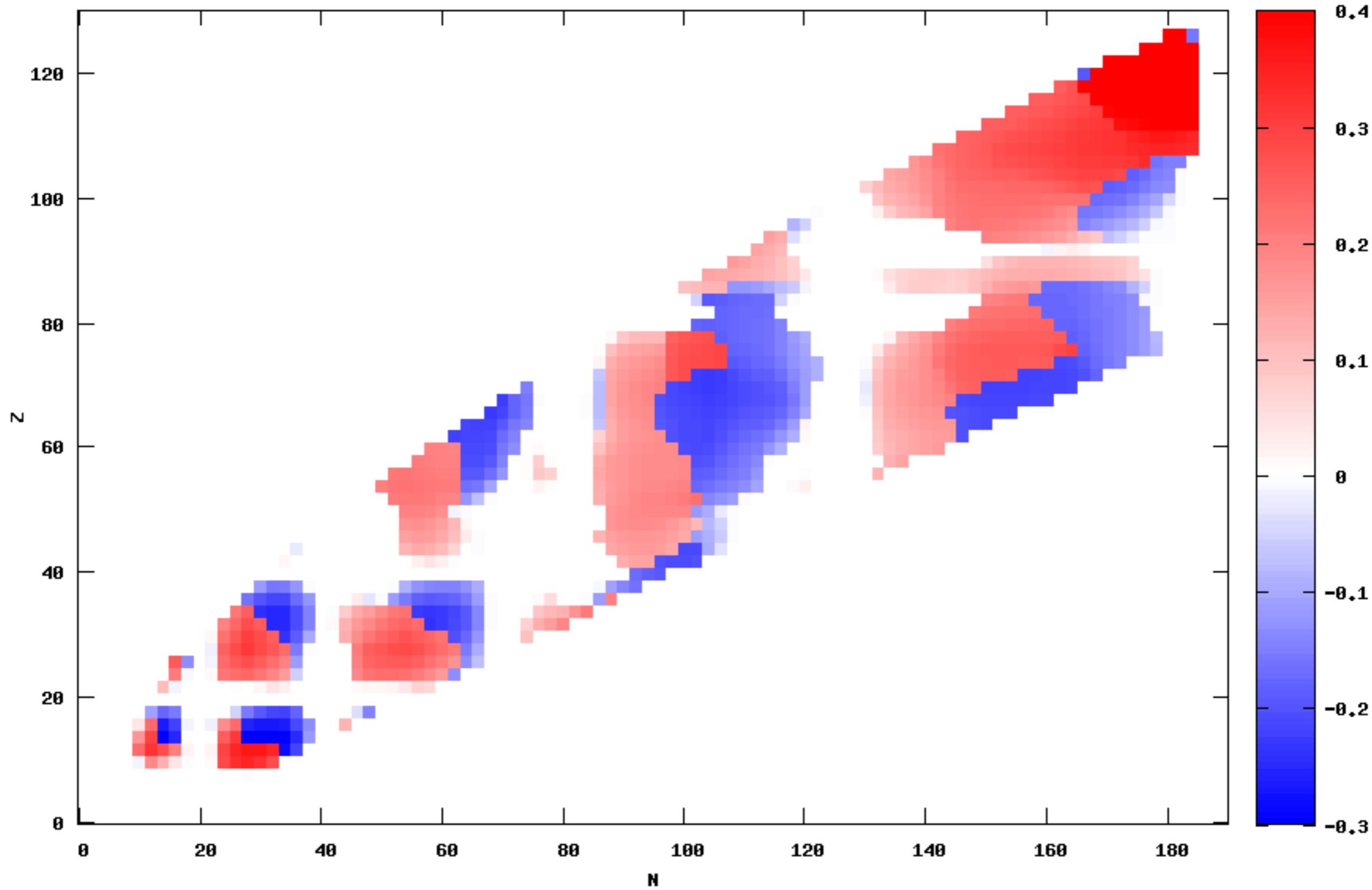




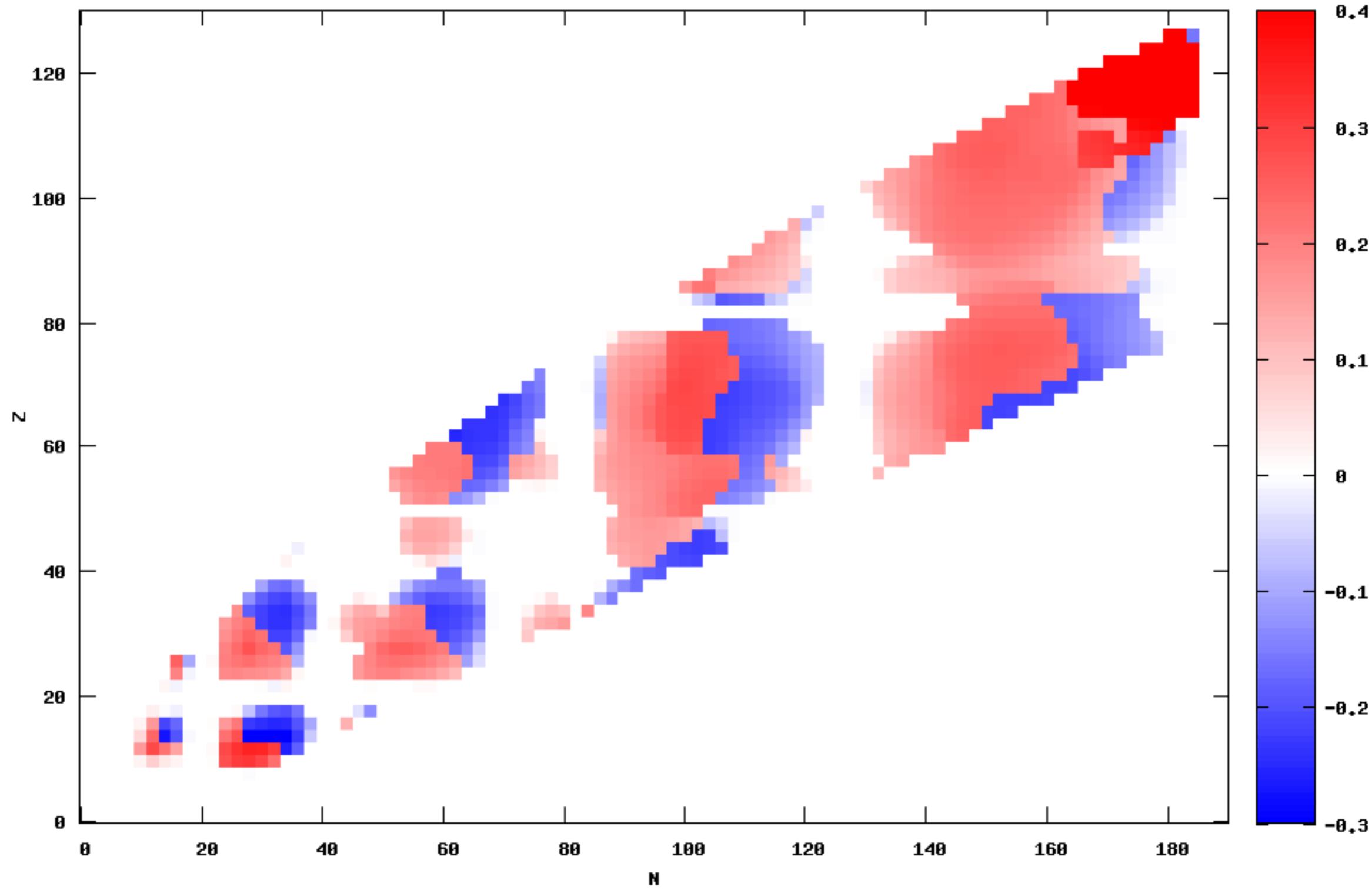
$\lambda = +0.50$



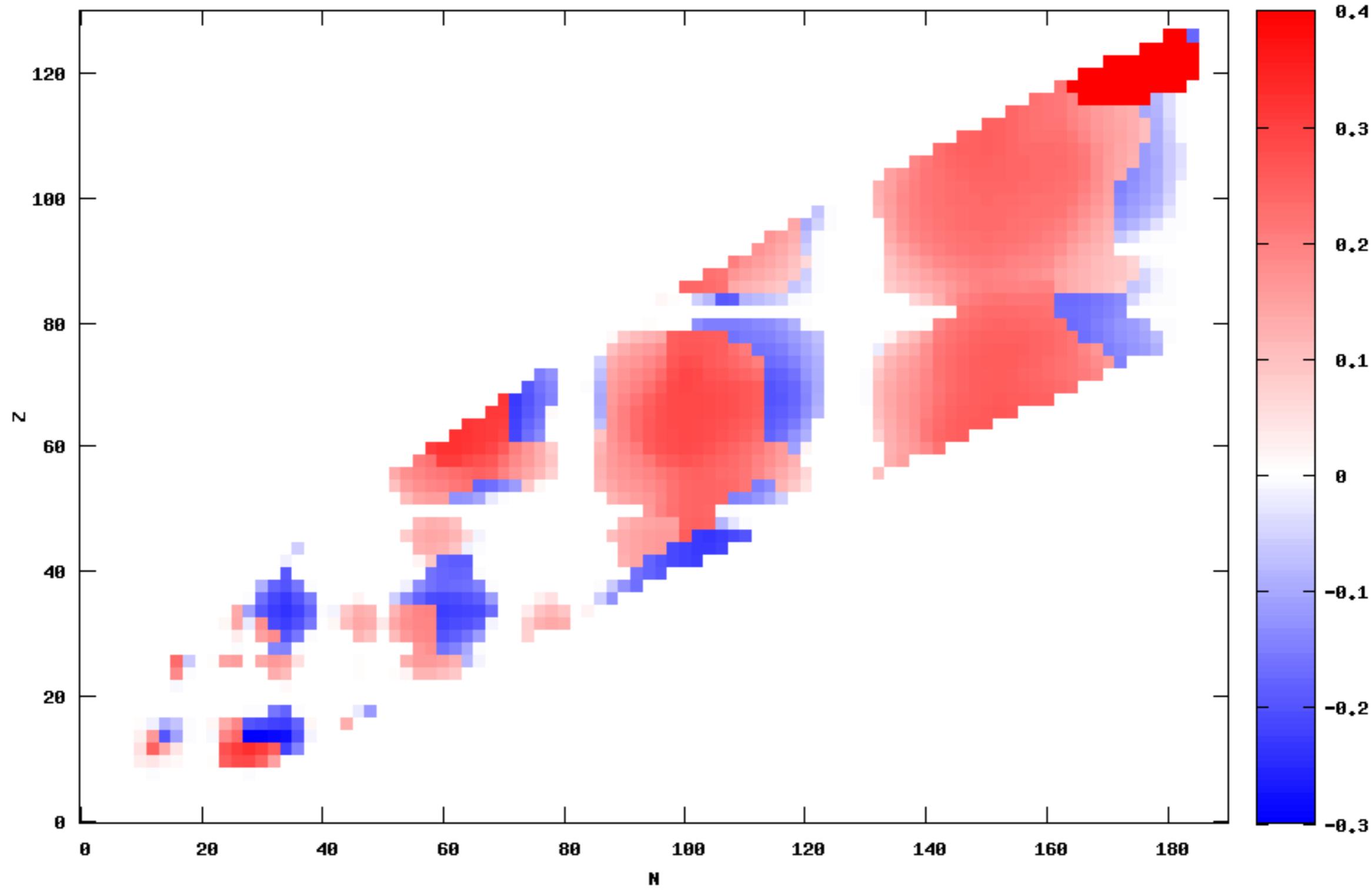
$\lambda = +0.60$



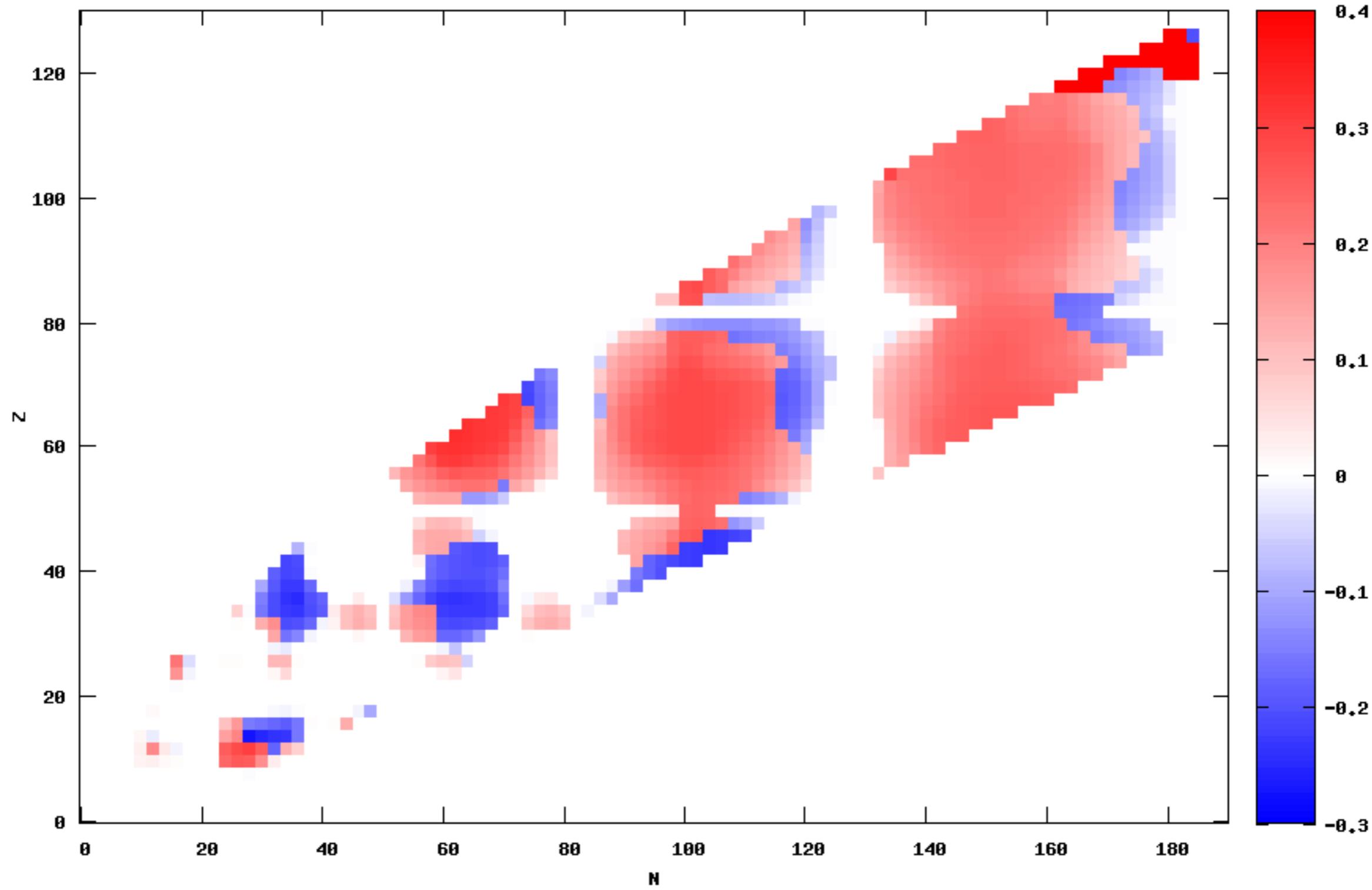
$\lambda = +0.70$



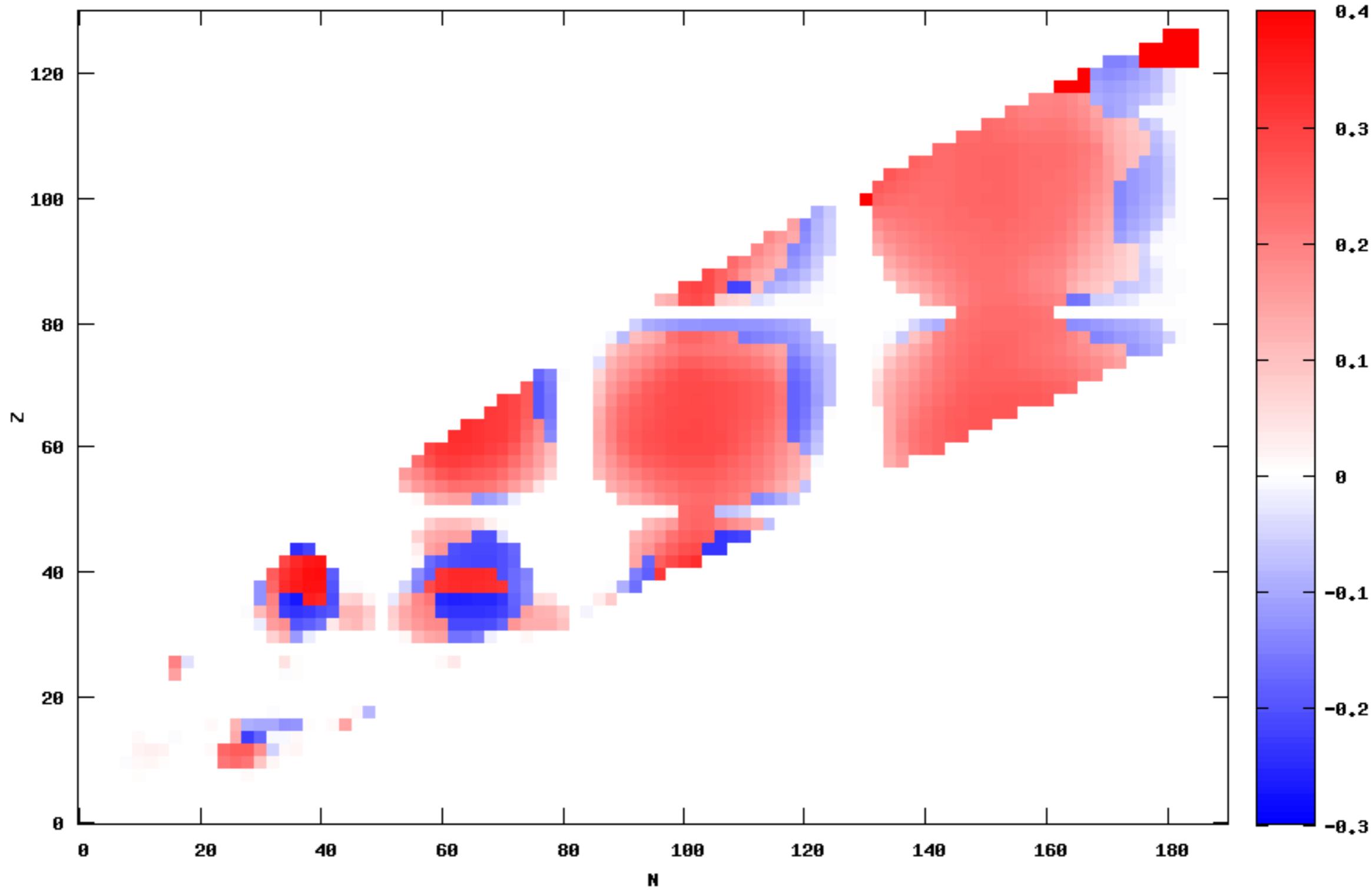
$\lambda = +0.80$



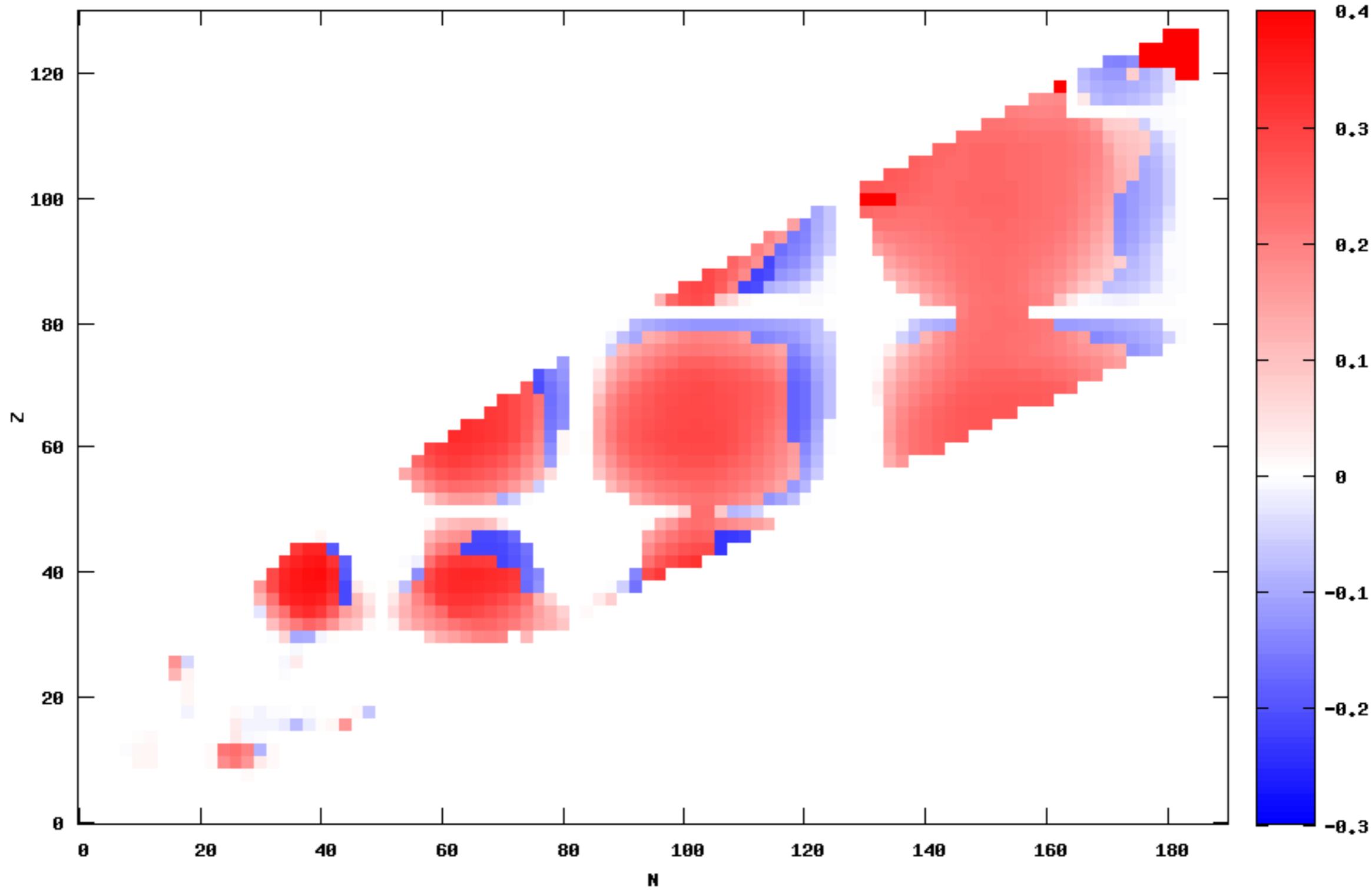
$\lambda = +0.90$



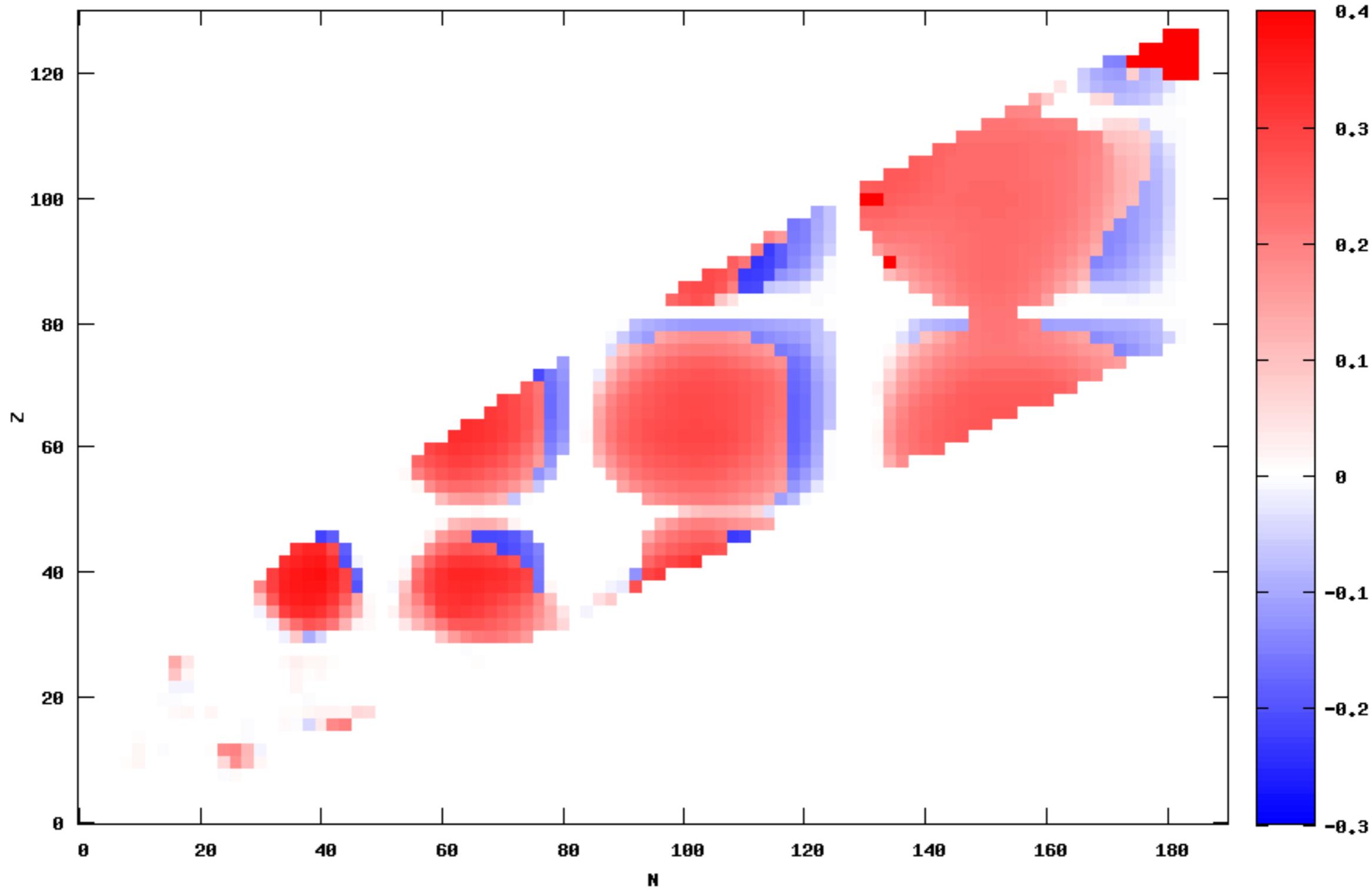
$\lambda = +1.00$



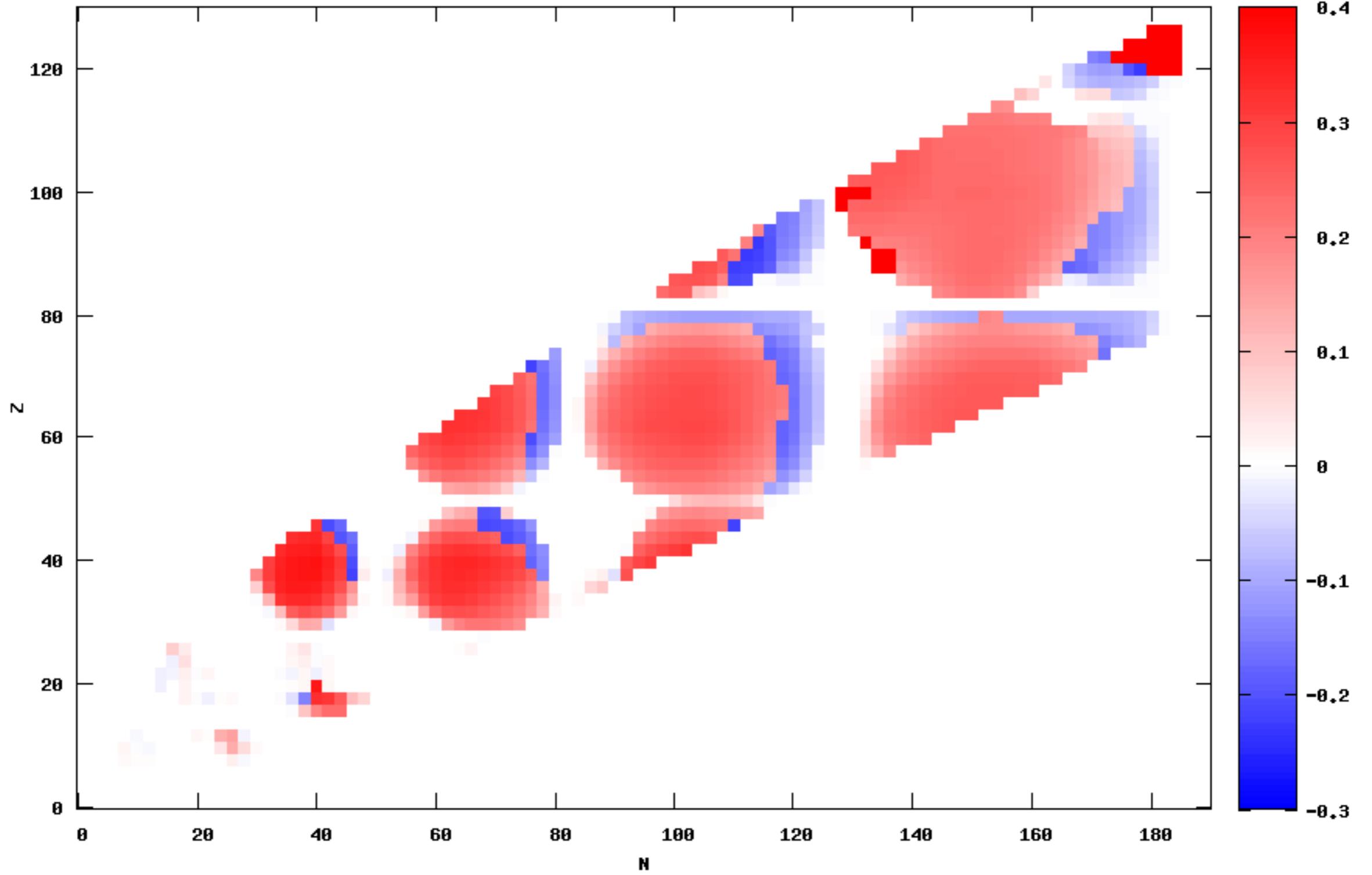
$\lambda = +1.10$



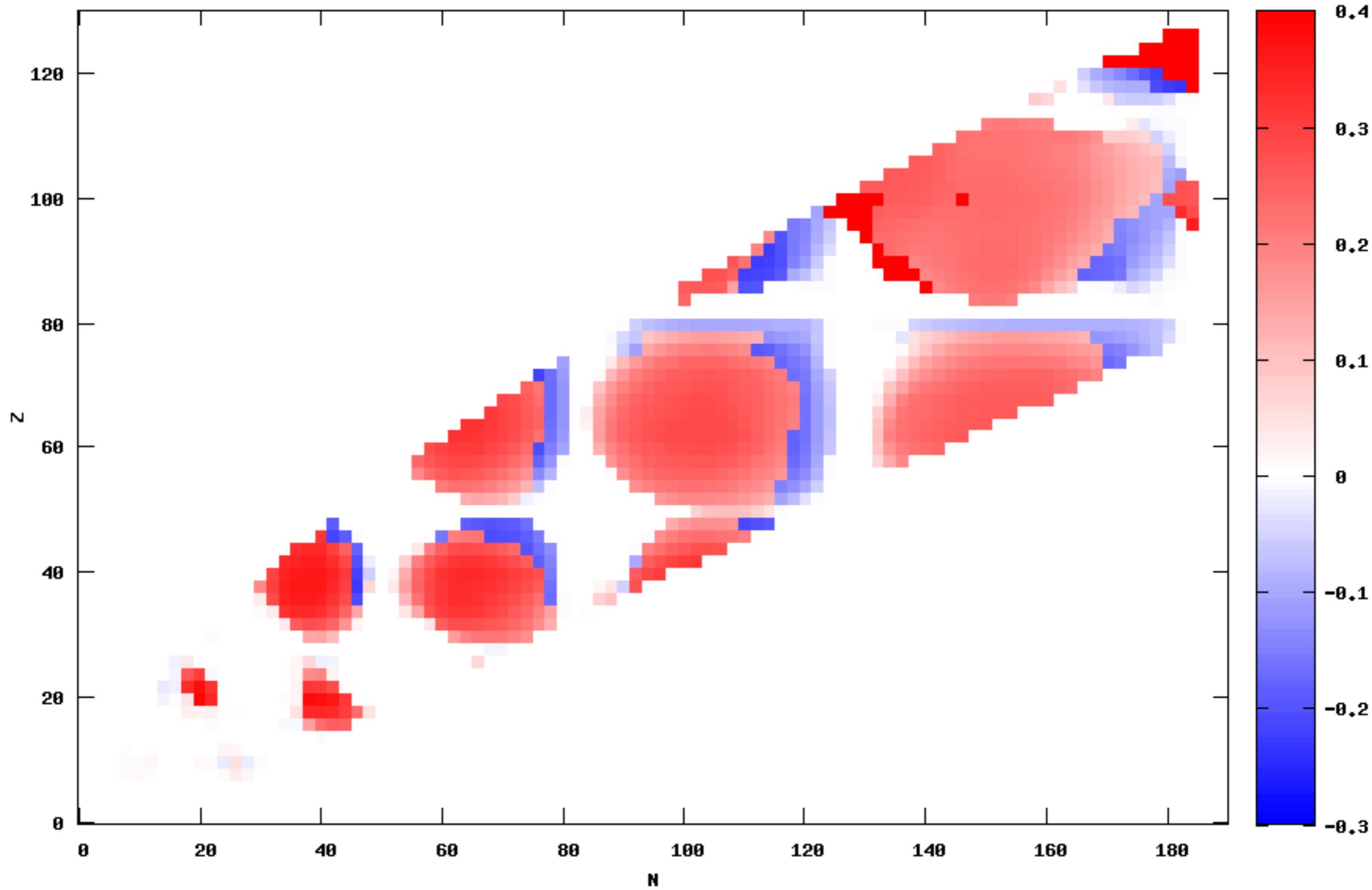
$\lambda = +1.20$



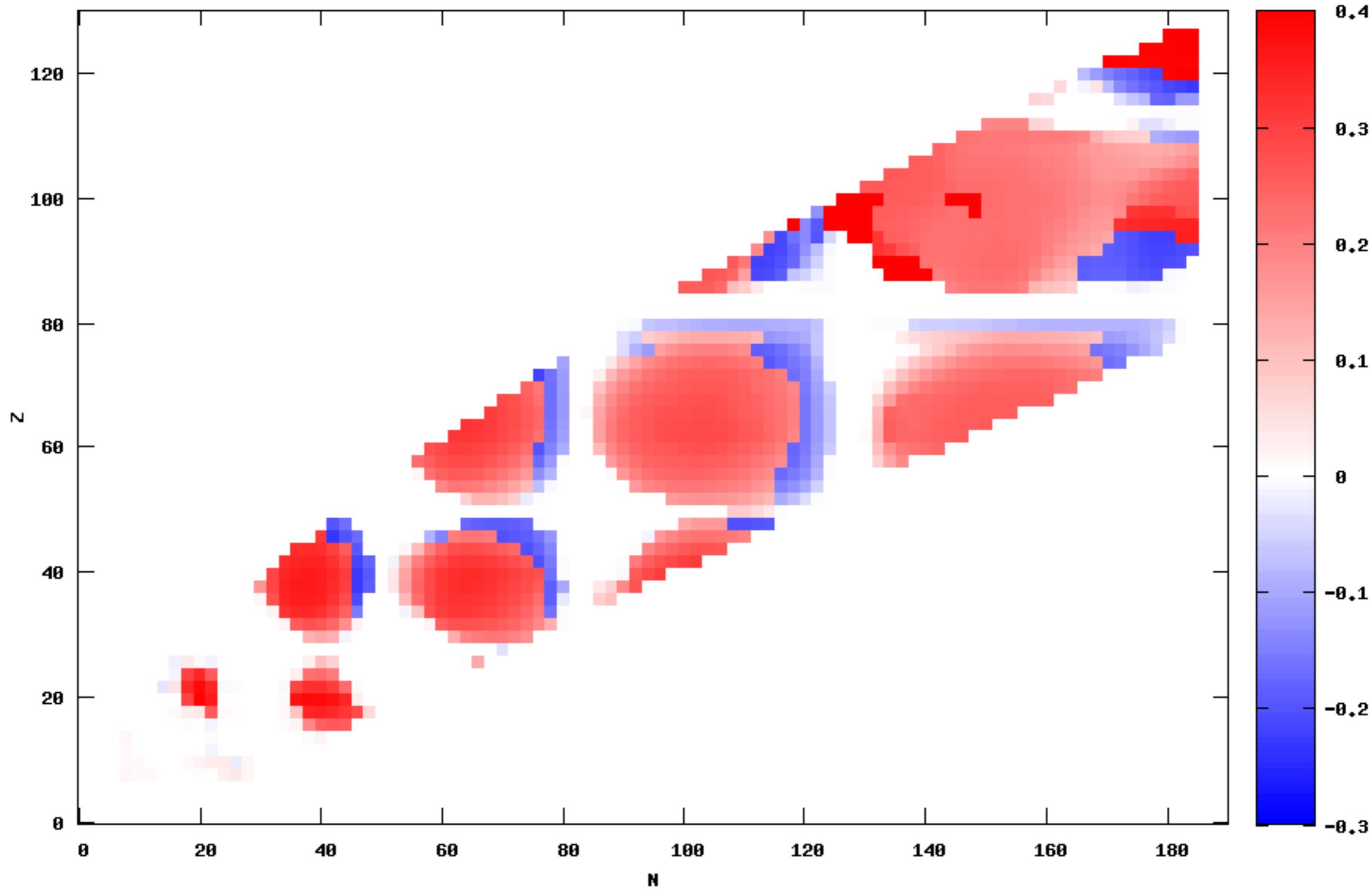
$\lambda = +1.30$



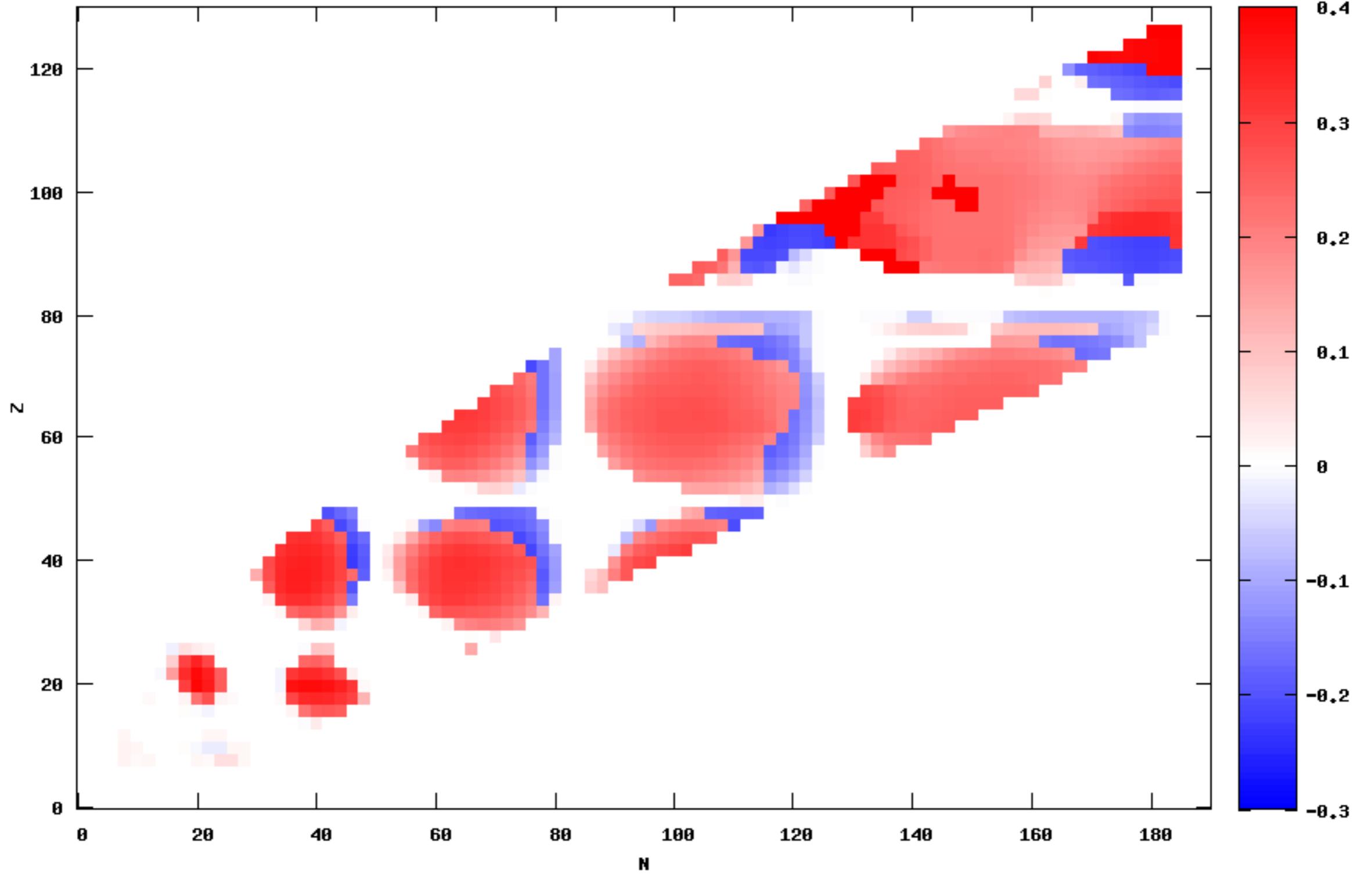
$\lambda = +1.40$



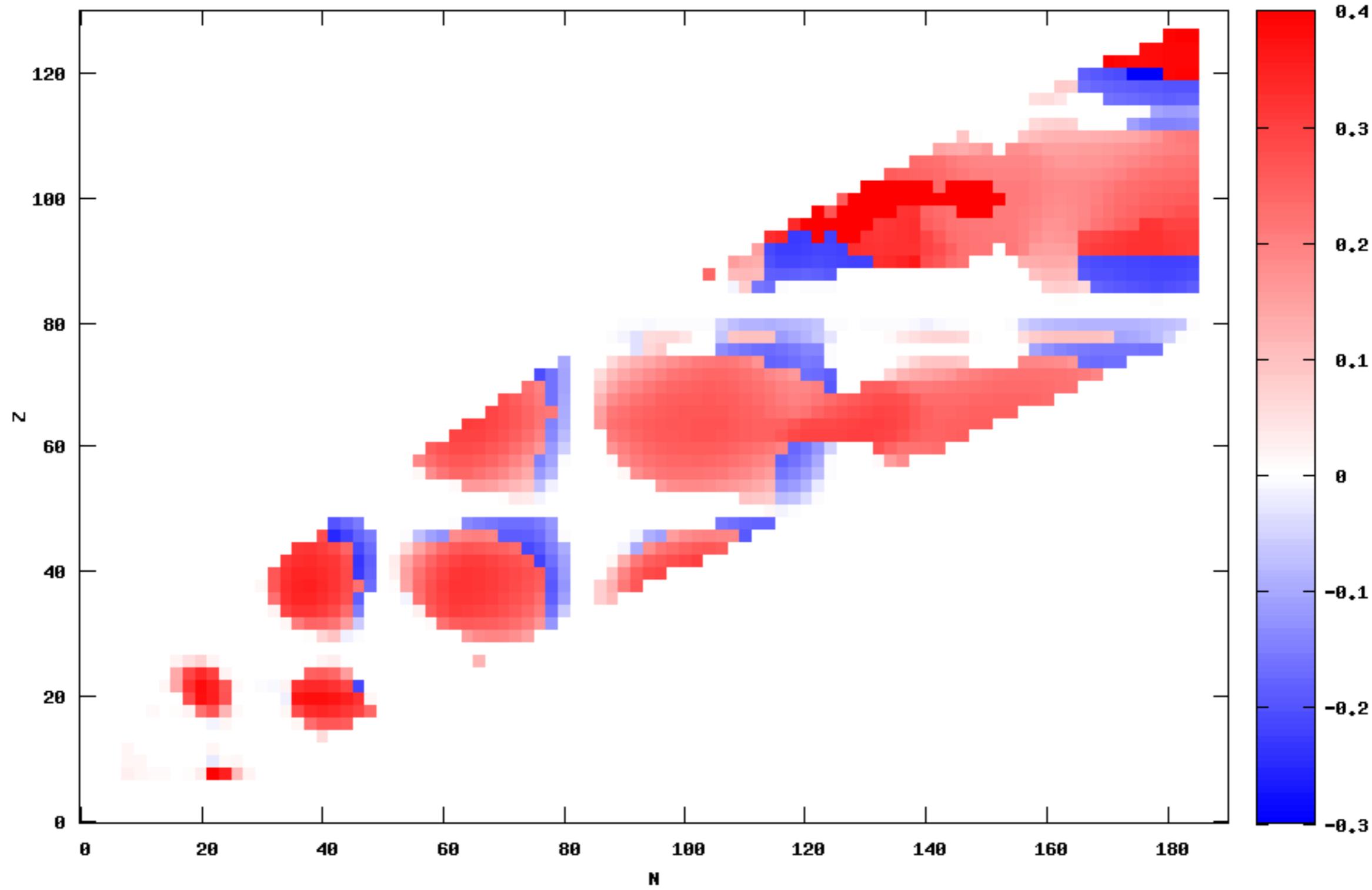
$\lambda = +1.50$



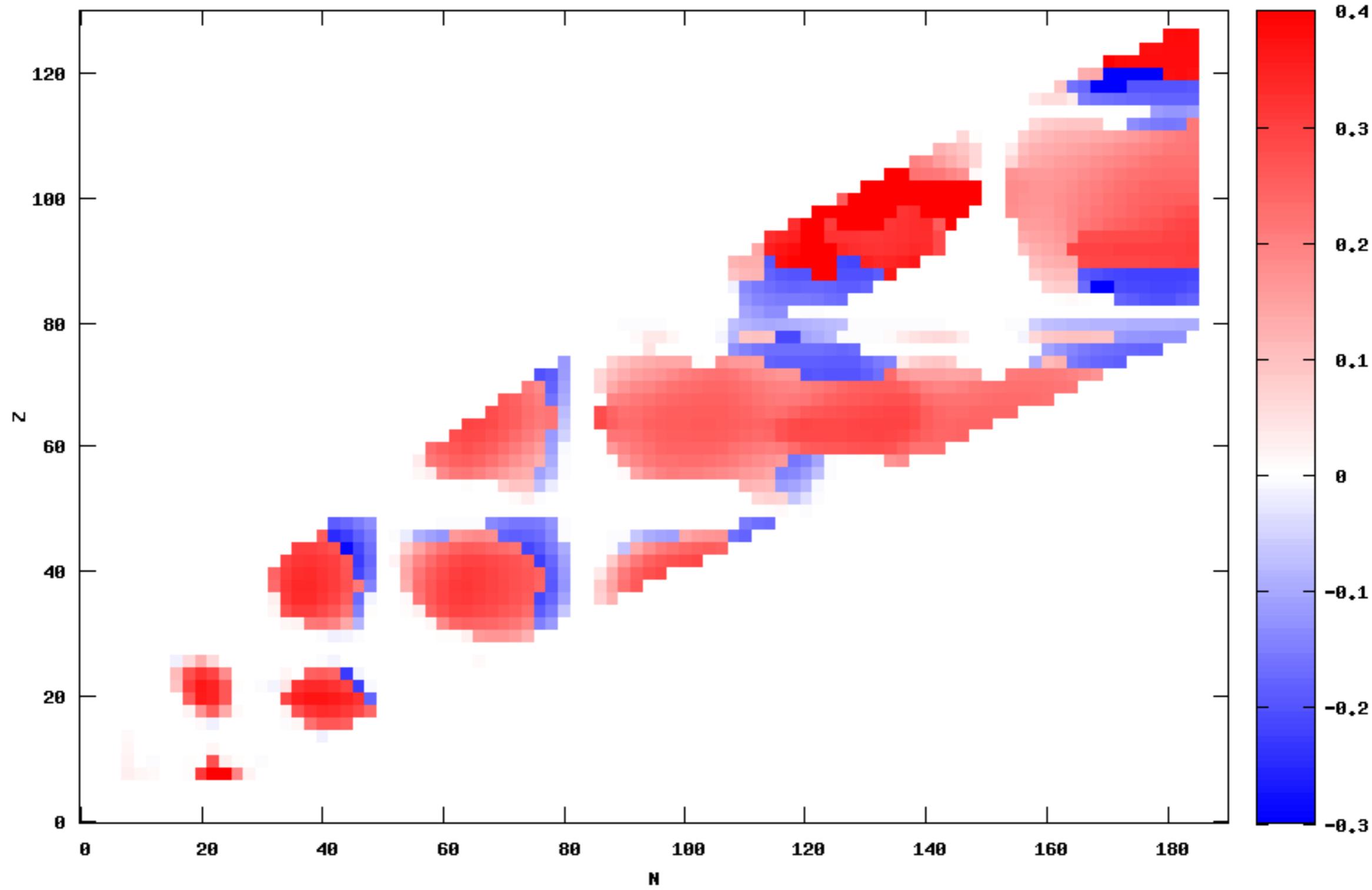
$\lambda = +1.60$



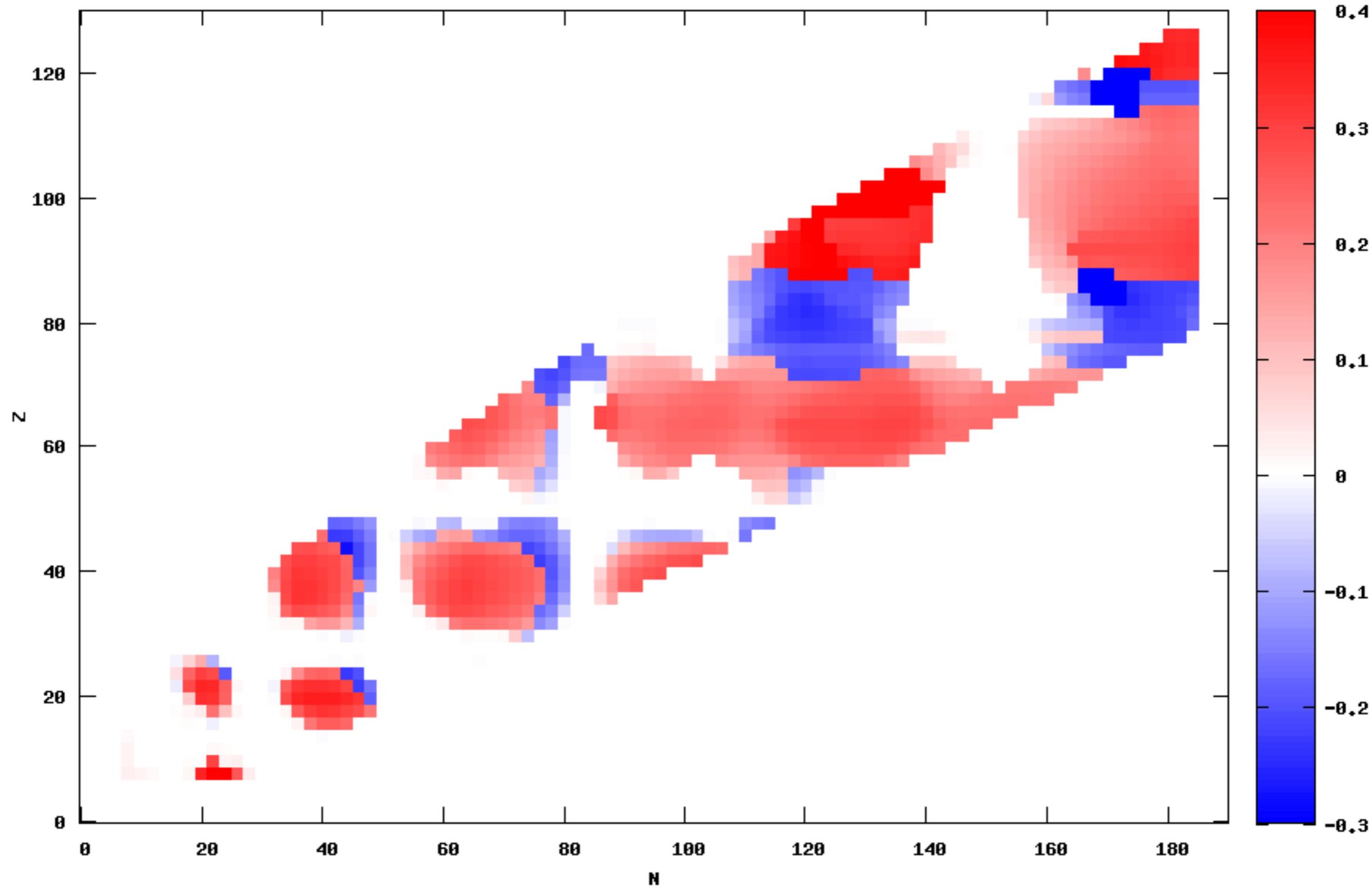
$\lambda = +1.70$



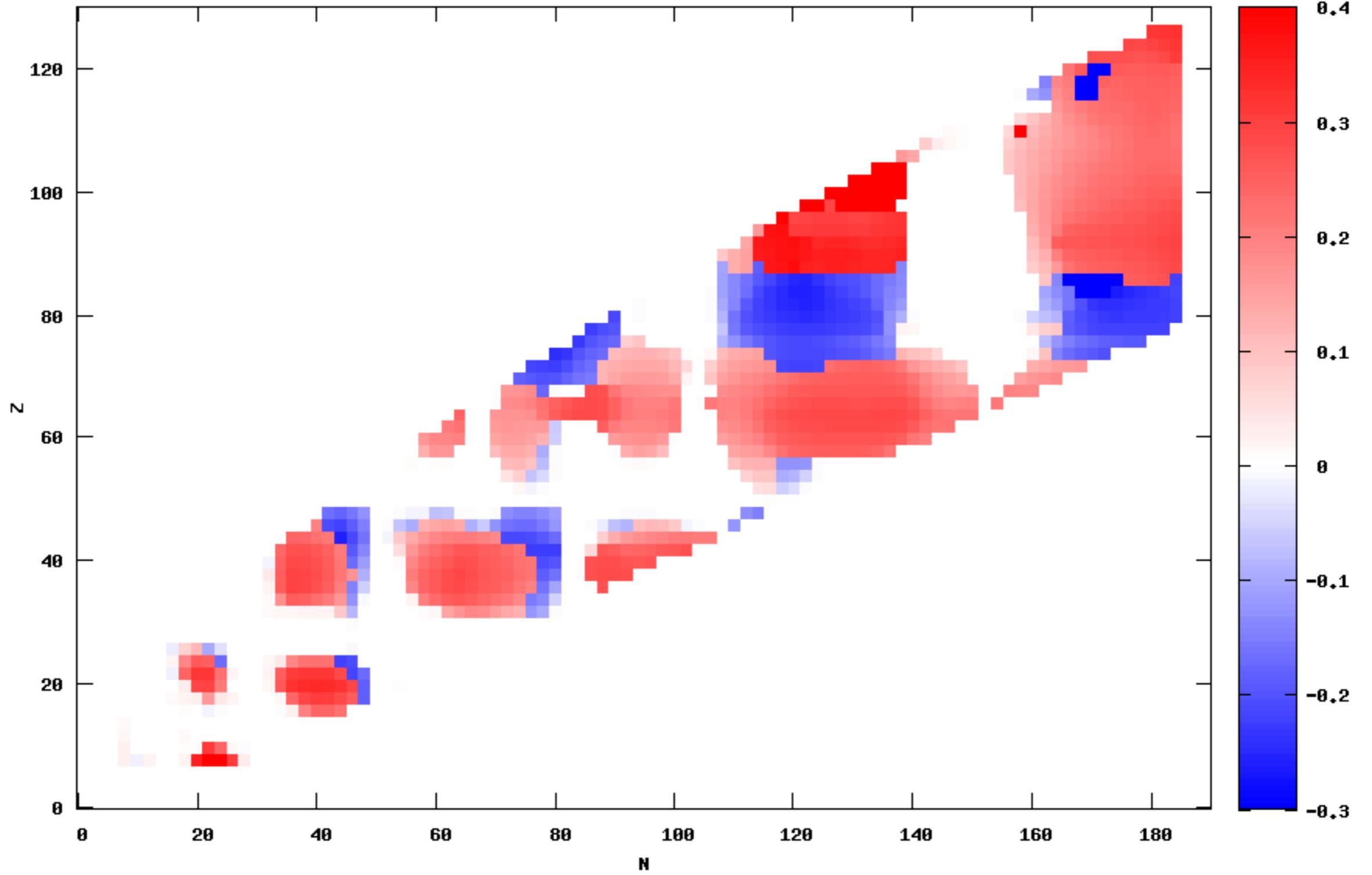
$\lambda = +1.80$



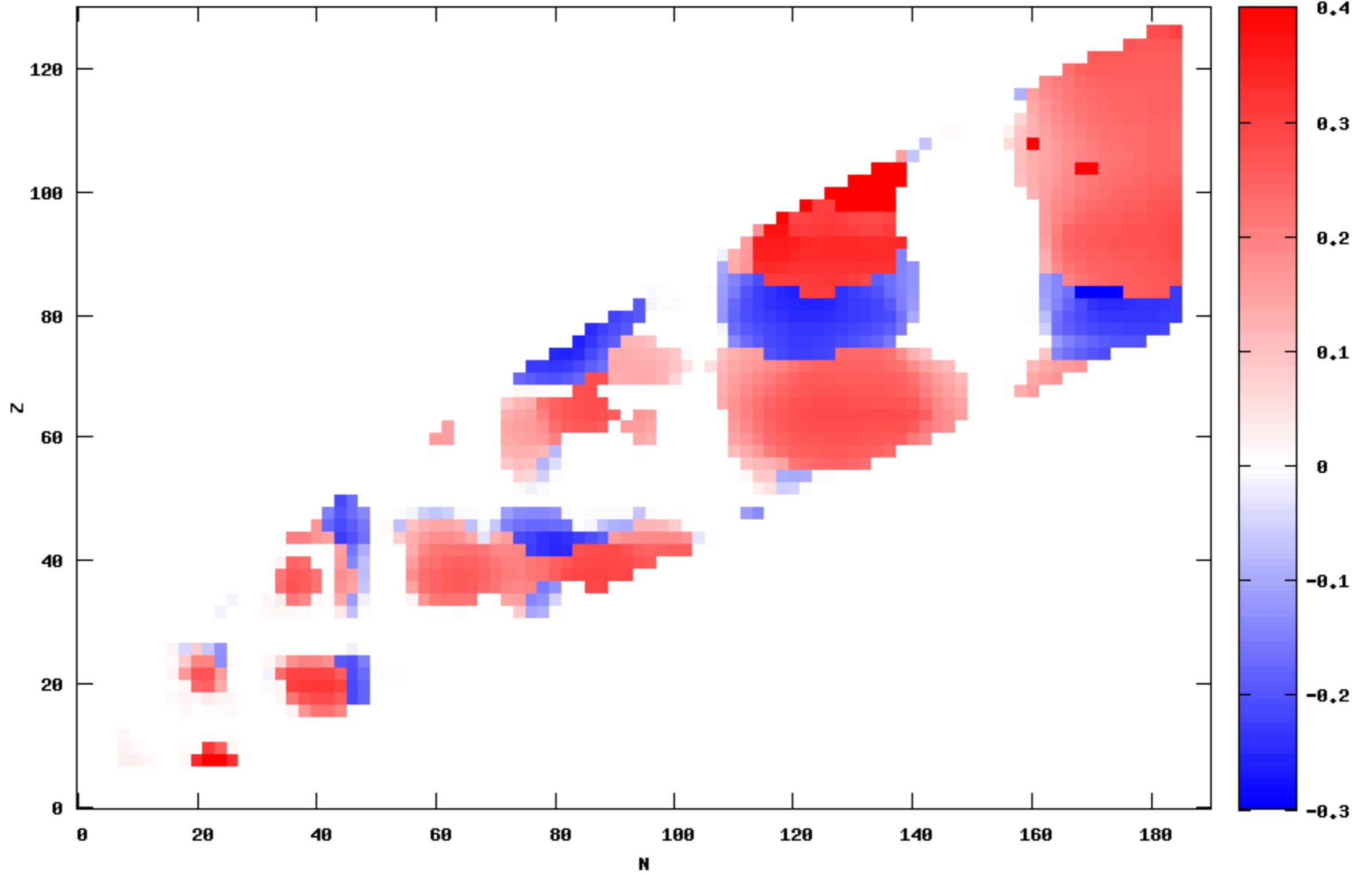
$\lambda = +1.90$



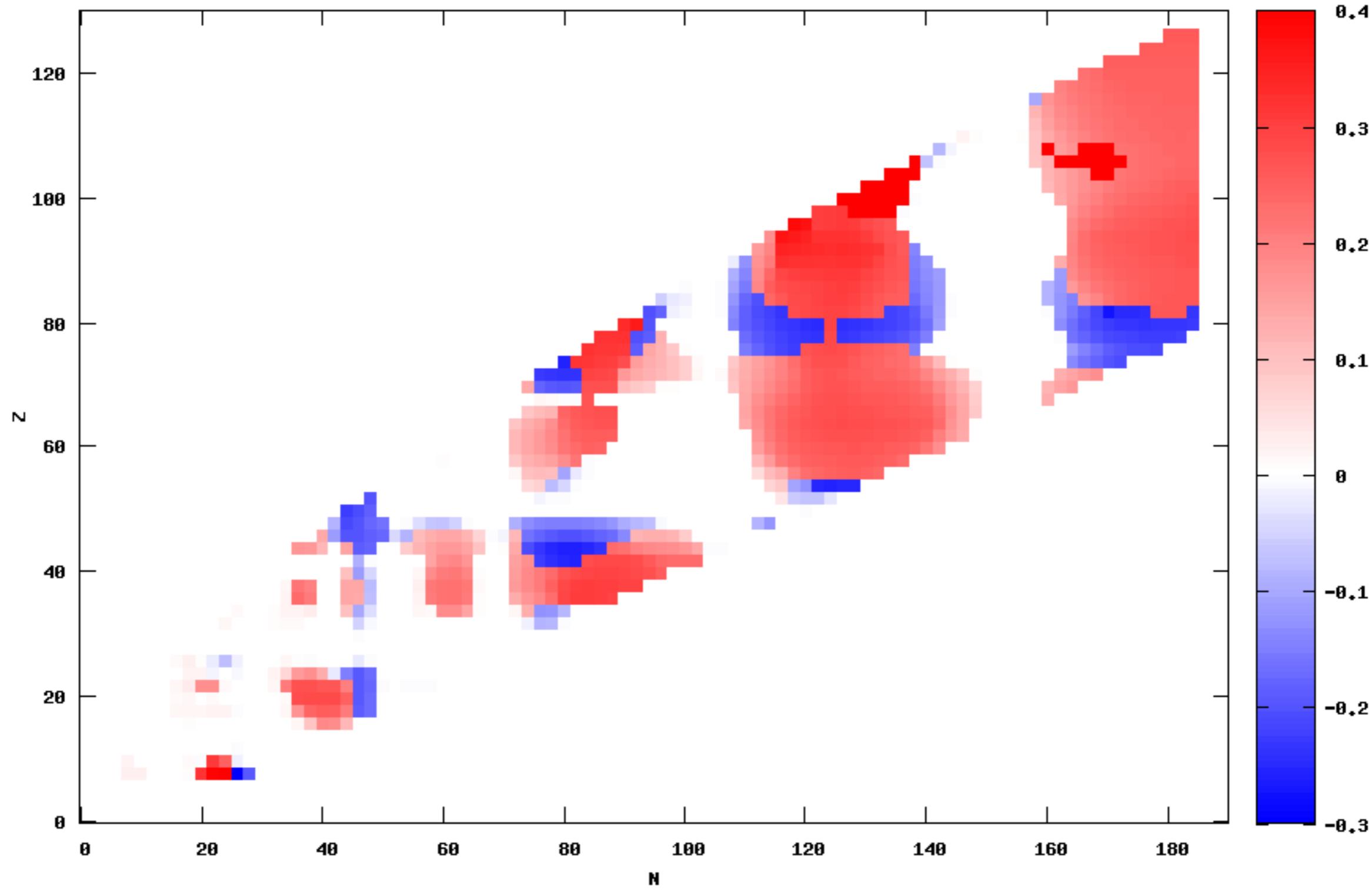
$\lambda = +2.00$



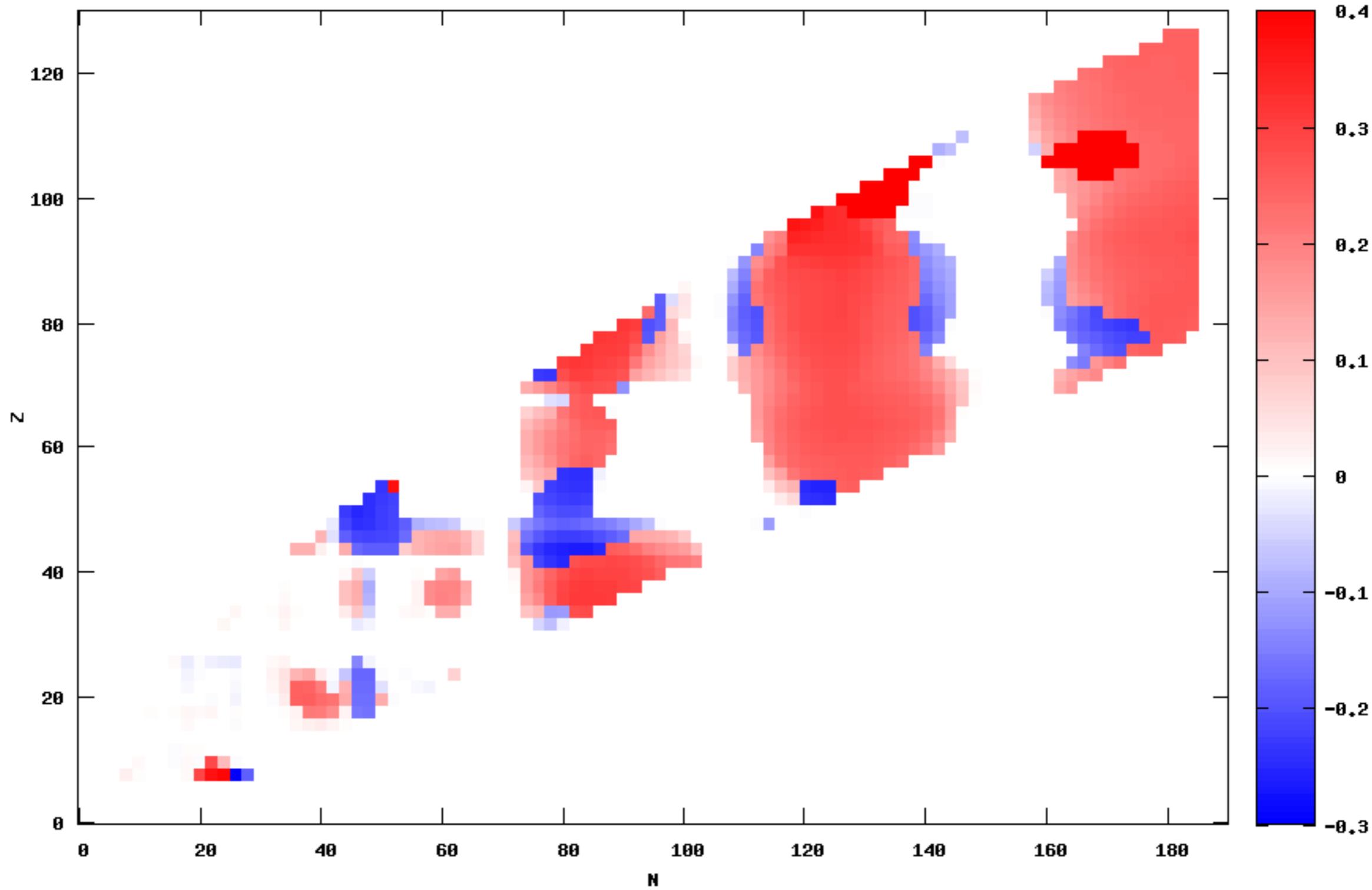
$\lambda = +2.10$



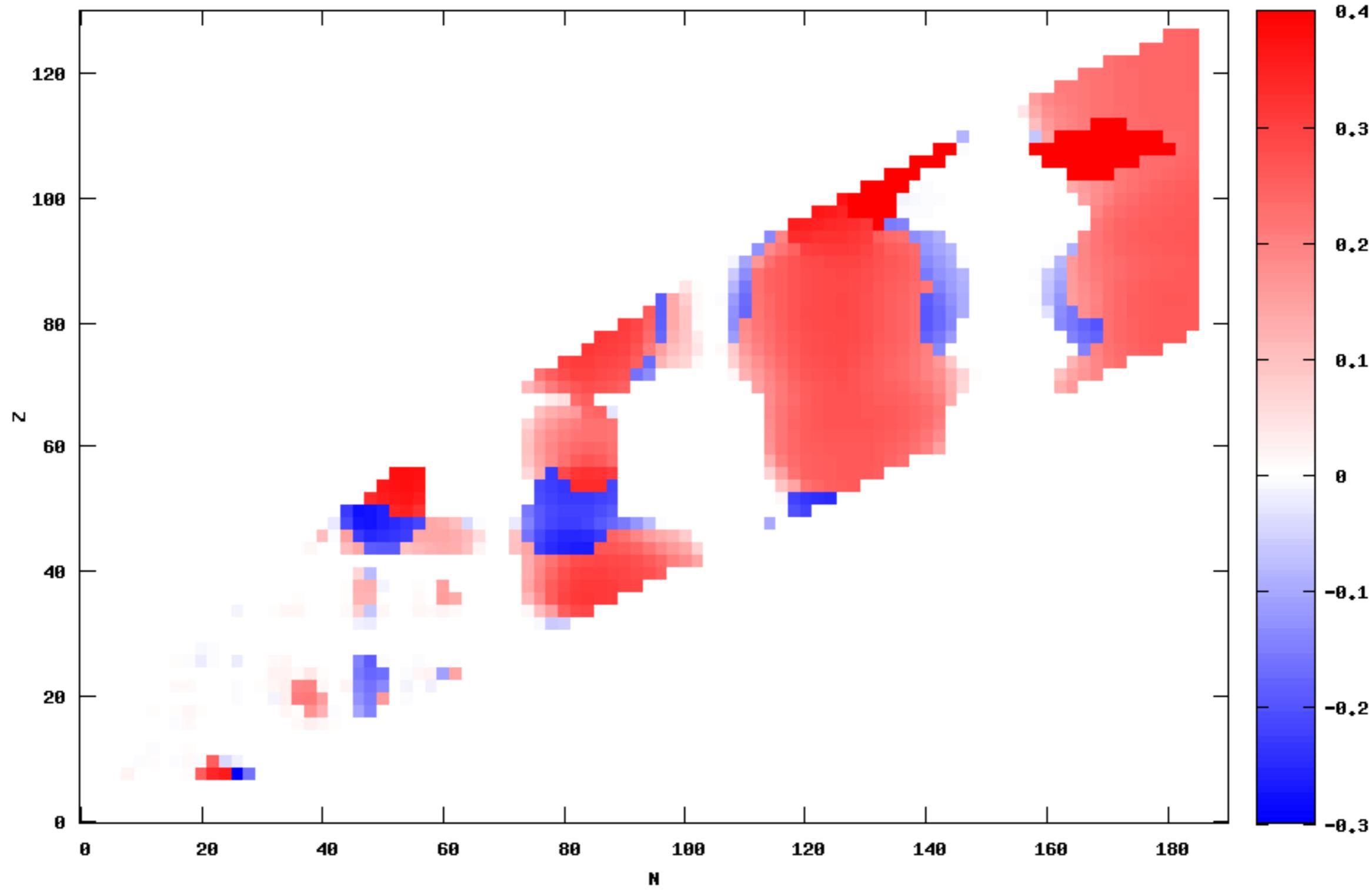
$\lambda = +2.20$



$\lambda = +2.30$



$\lambda = +2.40$



$\lambda = +2.50$

