力 学 Ⅱ　　定 期 試 験 問 題

福井大学工学部物理工学科１年対象、担当教員 田嶋、2016 年 2 月 8 日 4 限実施

A3 判問題用紙１枚（表裏印刷）と B4 判解答用紙１枚を各人に配布する。解答用紙のおもて面の最下部に学籍番号と氏名を記入せよ。解答用紙１枚だけを提出せよ。【2】～【5】については、最終的な答のみでなく説明と計算過程を必ず記せ。

【1】

下記の文の ア ～ ホ に語群から最も適切な語句を選んで埋めよ。

重力定数は SI 単位では約 6.7×10^{-11} という数値をもつが、もし、質量の単位を太陽の質量に、長さの単位を地球の公転軌道の半径に、時間の単位を地球の公転周期（１年）にとれば、重力定数は ア という数値になる。

ア: 有効数字２桁で数値を記せ。正確に計算した数値から ±20% 以内の値なら正答とみなす。

太陽のまわりを楕円軌道を描いてまわる天体の持つ力学的エネルギー（運動エネルギーと重力の位置エネルギーの和。ただし自転は無視する）は、軌道の イ が同じなら同じである。また、力学的エネルギーが同一の場合に角運動量が最大になるのは、軌道の ウ が エ のときである。

イ・ウ: 楕円半径　最大半径　最小半径　長軸半径　短軸半径　扁平率　離心率　楕円率　曲率

エ： 整数か既約分数で答えよ。

作用・反作用の法則を使うと、外部から孤立した質点系の全 オ が保存されることが導ける。

オ: エネルギー　エントロピー　運動量　角運動量　質量　電荷　熱量

宇宙飛行士は宇宙遊泳中にいくら手足を振り回しても意のままに空間中を移動することはできない。これは カ がなければ質点系の キ の速度を変えることができないからである。

カ: 作用　反作用　重力　内力　外力　偶力　抗力　摩擦力　保存力　慣性力

キ: 内心　外心　重心　傍心　中心点　不動点　漸近点　遠日点　春分点　分岐点　焦点　集中点

フィギュアスケートのスピンの最中に、スケーターが腕を体に引き寄せるとスピンの軸のまわりの ク が小さくなる。 ケ は ク と コ の積であるが、 ケ が一定であるために コ が増加することになりスピンが速くなる。

ク: 回転速度　回転エネルギー　回転モーメント　力のモーメント　慣性モーメント　質量モーメント

ケ・コ: 位置　速度　加速度　角度　角速度　角加速度　運動量　角運動量　運動エネルギー

質量 m の物体と質量 $3m$ の物体の相対運動に関する換算質量は サ m である。

サ: 既約分数で答えよ。

長さが 5m の丸太の左端を持ち上げるには 30kgf, 右端を持ち上げるには 40kgf の力が必要である。このとき、この丸太の質量は シ kg であり、重心は左端から ス m の位置にある。

シ・ス: 整数か既約分数で答えよ。

質量の無視できる長さ a の剛体棒の両端に質量 $\frac{1}{2}m$ の質点を 1 個ずつ固定して作った（質量 m の）剛体がある。この剛体の、棒の中心を通り棒に垂直な回転軸についての慣性モーメントは $\boxed{\text{セ}}$ ma^2 である。
セ: 整数か既約分数で答えよ。

地球の自転の角速度を ω とし、地軸の歳差運動の角速度を Ω とすると、Ω は ω の $\boxed{\text{ソ}}$ 乗に比例し、地球の慣性モーメントの $\boxed{\text{タ}}$ 乗に比例する。また、北極星から見て（より適切には黄道北極から見て）、地軸の歳差運動は $\boxed{\text{チ}}$ 巻きである。
ソ・タ: 整数か既約分数で答えよ。
チ: 左　右

自動車が一定の速さで左カーブを曲がっている最中に, ダッシュボードの上に置いた物体は右へと動いた。自動車に乗った観測者がこの現象をニュートンの運動方程式にあてはめて解釈するためには, $\boxed{\text{ツ}}$ が $\boxed{\text{テ}}$ 方向に働いていると考えることが必要である。
一般に, 観測者が $\boxed{\text{ト}}$ 運動をしていることで見掛け上生じる力を $\boxed{\text{ナ}}$ と呼ぶ。
自動車のキャビン内にヘリウムガスを詰めた風船が浮いているとする。見掛けの力は風船だけでなく全ての物に働くため, 左カーブに差し掛かると, 風船は $\boxed{\text{ニ}}$ 方向へと動く。
ツ: 求心力　向心力　遠心力　オリコリ力　コリオリ力　摩擦力
テ： 前　後　上　下　左　右
ト： 静止　等速直線　加速度　ブラウン　絶対　相対
ナ： 圧力　万有引力　重力　磁気力　電気力　慣習力　慣性力　慣償力　貫徹力
ニ： 左　右

福井市においては $\boxed{\text{ヌ}}$ 向きに運動する物体に働く遠心力とコリオリ力は、正反対の方向を向く。
ヌ: 東　西　南　北　鉛直上向き　鉛直下向き

半径が地球の 10^{-3} 倍、自転周期が地球の 10^{-5} 倍の中性子星について計算すると、赤道上での自転による遠心力の大きさは、中性子星では地球と較べて $\boxed{\text{ネ}}$ 桁大きい。
ネ: 整数で答えよ。

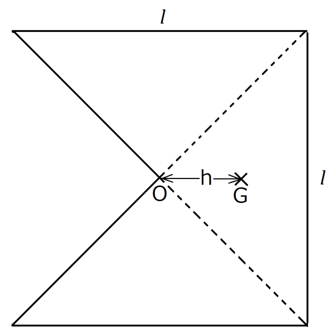
北半球では、低気圧に吹き込む風は (上空から見下ろして) $\boxed{\text{ノ}}$ 巻きに回転し、高気圧から吹き出す風はその逆巻きに回転する。従って北半球では或る地域の $\boxed{\text{ハ}}$ に高気圧、$\boxed{\text{ヒ}}$ に低気圧があるとき、その地域には北極方面からの寒気が流れ込んで寒くなる。
ノ: 右　左
ハ・ヒ: 東　南　西　北

北極点において水平方向に速さ $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ で移動する物体に働くコリオリ力は、速度の $\boxed{\text{フ}}$ 90 度の方向を向き、コリオリ力の大きさは $\boxed{\text{ヘ}} \times 10^{\boxed{\text{ホ}}}\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ に物体の質量を乗じたものである。
フ: 左　右
ヘ: 1.5　3.4　7.3
ホ: 整数で答えよ。

【2】～【5】番は裏に印刷されています。

【2】 一様な材質でできた一辺の長さが l の正方形 (その中心を点 O と名づける) の板の $\frac{1}{4}$ の部分を右図のように切り取ってできた物体の重心を点 G と名づけるとき、点 O と重心 G との距離 $h = \overline{\mathrm{OG}}$ を求めよ。ヒント：一様な板で作った三角形の力学的な重心は、その三角形の幾何学的な重心と一致する。

(教科書 p.159 の演習問題 11 の A の 1 番の問題の文章を変えたものです。)



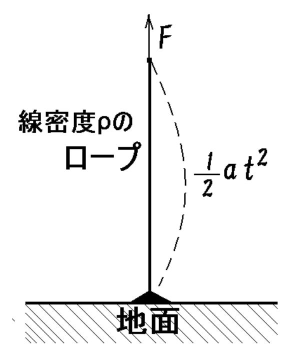
【3】 (1) N 個の質点のなす系の重心の位置ベクトル $\mathbf{R}$ を i 番目の質点の質量 m_i, 位置ベクトル $\mathbf{r}_i$ $(1 \leq i \leq N)$ を使って表せ。（導出過程は不要）

(2) 全角運動量 $\mathbf{L}$ の時間変化率を i 番目の質点に働く外力 $\mathbf{F}_i$ および $\mathbf{r}_i$ を使って表せ。ただし角運動量の基準点は座標原点にとるものとする。また、内力は中心力とする（即ち $\mathbf{F}_{ij} \parallel \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$）。（導出過程は不要）

(3) 剛体を構成する全質点に働く重力の作用点を剛体の重心に付け替えても $\mathbf{L}$ の時間変化率は変わらないことを示せ。ただし重力加速度ベクトルを $\mathbf{g}$ で表せ (即ち、$\mathbf{g}$ の大きさは g=9.8m/s^2, 方向は鉛直下向きで、質量 m の質点に働く重力は $m\mathbf{g}$ であるとせよ)。$\mathbf{g}$ は場所によらない定ベクトルとせよ。また、議論を簡潔にするため、重力以外の外力はゼロとせよ。

【4】 地面の上に一塊にして置かれたロープの上端に鉛直上方の力 F を加えてロープの上端を一定加速度 a で上昇させたい。時刻 $t = 0$ にはロープの上端の地面からの高さおよび速さはともに 0 であるとして、時刻 t （> 0）における力 F を、t、a、ロープの単位長さあたりの質量 ρ、重力加速度 g を用いて表せ。ただし、ロープの下端が地面を離れて以降の状況は考察しなくてよい。

(2006 年度の定期試験の [6] 番の問題を再出題しました。)



【5】 質量 m_1 と m_2 の 2 個の天体が互いに重力で引かれあうことで、2 天体の重心の回りにそれぞれ半径 r_1 と r_2 の円軌道を描いて公転している。円運動の角速度は 2 天体に共通で ω である。このとき、m_1 と m_2 を、r_1, r_2, ω, 重力定数 G を使って表せ。

力 学 II 定 期 試 験 答 案 用 紙

福井大学 工学部 物理工学科 1 年生対象、 担当教員 田嶋、 2016 年 2 月 8 日 4 限実施

【1】
60 点

ア	イ	ウ	エ	オ
カ	キ	ク	ケ	コ
サ	シ	ス	セ	ソ
タ	チ	ツ	テ	ト
ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ
ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ

【2】【3】【4】【5】は以下のスペースおよび裏面に解答せよ。
10 点 10 点 10 点 10 点

裏面も解答に使ってよい

学科	物理工学	学籍番号		氏名		得点	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	合計

[1]

ア　3.9×10^{1}　（3.1×10^{1} ～ 4.7×10^{1} は正解とみなした）

$$\frac{G m_1 m_2}{r^2} = m_1 r \omega^2$$ が（$m_2 \gg m_1$ のとき）成立するので

$$\therefore\ G = \frac{r^3\omega^2}{m_2}.$$

問題文で仮定された単位系では $r=1$，$m_2=1$，$\omega = \frac{2\pi}{1年} = 2\pi$

なので $G = \frac{1^3(2\pi)^2}{1} = 4\pi^2 \fallingdotseq 3.9\times10^{1}$ となる。

（補足：$\pi \fallingdotseq 3$ と近似しても誤差は5%。$\pi^2 \fallingdotseq 9$ の誤差は10%。
$4\pi^2 \fallingdotseq 36$ の誤差も10%で，要求される20%の精度をみたしている。）

（別解）

$G = 6.7\times10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$ を

$1\ m_\odot = 2.0\times10^{30}\ \mathrm{kg}$（太陽質量）
$1\ y = 3.2\times10^{7}\ \mathrm{s}$（1年）
$1\ A = 1.5\times10^{11}\ \mathrm{m}$（天文単位距離）

を単位とした数値に変換すると

$$G = 6.7\times10^{-11}\left(\frac{1\,\mathrm{m}}{1A}\right)^3\left(\frac{1\,\mathrm{kg}}{1\,m_\odot}\right)^{-1}\left(\frac{1\,\mathrm{s}}{1y}\right)^{-2} A^3 m_\odot^{-1} y^{-2}$$

$$= 6.7\times10^{-11}\times(1.5\times10^{11})^{-3}\times(2.0\times10^{30})^{+1}\times(3.2\times10^{7})^{2}\quad A^3 m_\odot^{-1} y^{-2}$$

$$= \frac{6.7\times2.0\times3.2^2}{1.5^3}\times10^{0} = 40.6 = 4.1\times10^{1}\quad A^3 m_\odot^{-1} y^{-2}$$

イ　長軸半径

ウ　離心率

エ　0

オ　運動量

カ　外力

キ　重心

ク　慣性モーメント

$\boxed{\text{ケ}}$ 角運動量

$\boxed{\text{コ}}$ 角速度

$\boxed{\text{サ}}$ $\frac{3}{4}$ $\quad \because \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{3m}$ より $\mu = \frac{m \cdot 3m}{m+3m} = \frac{3}{4}m$

$\boxed{\text{シ}}$ 70 $\quad \because 30 + 40 = 70$

$\boxed{\text{ス}}$ $\frac{20}{7}$ $\quad \because \boxed{\text{ス}} \times 70 = 5 \times 40$

$\boxed{\text{セ}}$ $\frac{1}{4}$ $\quad \because I = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{4}ma^2$

$\boxed{\text{ソ}}$ -1

$\boxed{\text{タ}}$ -1

$\boxed{\text{チ}}$ 右

$\boxed{\text{ツ}}$ 遠心力

$\boxed{\text{テ}}$ 右

$\boxed{\text{ト}}$ 加速度

$\boxed{\text{ナ}}$ 慣性力

$\boxed{\text{ニ}}$ 左

$\boxed{\text{ヌ}}$ 西

$\boxed{\text{ネ}}$ 7

質量mの物に働く (地球) → (中性子星)

$\because$ 遠心力 $= mr\omega^2 \rightarrow (m \times 1) \times (r \times 10^{-3}) \times (\omega \times 10^5)^2$

$= mr\omega^2 \times 10^{-3+10} = mr\omega^2 \times 10^7$

$\boxed{\text{ノ}}$ 左

$\boxed{\text{ハ}}$ 西

$\boxed{\text{ヒ}}$ 東

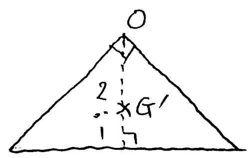
$\boxed{\text{フ}}$ 右

$\boxed{\text{ヘ}}$ 1.5

$\boxed{\text{ホ}}$ -3

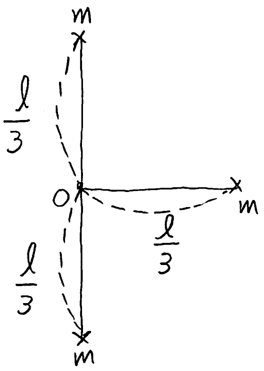
[2]　この物体を斜辺lの直角三角形3個に分割して考える

1個の三角形の重心は点Oから斜辺に下した垂線上でOから$\frac{2}{3}\times\frac{l}{2}=\frac{l}{3}$の位置にある。



各三角形を構成する質点を三角形の重心に集めても全体の重心は動かないので三角形の質量をmとして、

この物体の重心は右図の3質点の重心と同じ位置にある

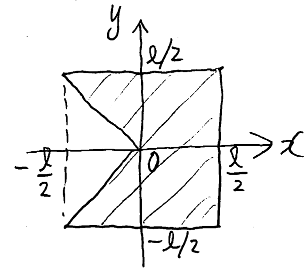


したがって $h=\dfrac{m\cdot 0+m\cdot 0+m\cdot\frac{l}{3}}{m+m+m}$

$=\dfrac{l}{9}$ (答)

(別解)　x, y座標を右図のようにとり二重積分を実行して求めると、

面密度をρとして、



$$h=\frac{\rho\int_{-l/2}^{0}dx\left\{\int_{-l/2}^{x}x\,dy+\int_{x}^{l/2}x\,dy\right\}+\rho\int_{0}^{l/2}dx\int_{-l/2}^{l/2}x\,dy}{\rho\int_{-l/2}^{0}dx\left\{\int_{-l/2}^{x}dy+\int_{x}^{l/2}dy\right\}+\rho\int_{0}^{l/2}dx\int_{-l/2}^{l/2}dy}$$

$$=\frac{\int_{-l/2}^{0}x(l-2x)\,dx+\int_{0}^{l/2}xl\,dx}{\int_{-l/2}^{0}(l-2x)\,dx+\int_{0}^{l/2}l\,dx}$$

$$=\frac{\left[\frac{l}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_{-l/2}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{l/2}}{\left[lx-x^2\right]_{-l/2}^{0}+l\left[x\right]_{0}^{l/2}}$$

$$=\frac{-\frac{l^3}{8}+\frac{l^3}{12}+\frac{l^3}{8}}{\frac{l^2}{2}-\frac{l^2}{4}+\frac{l^2}{2}}=\frac{\frac{1}{12}l^3}{\frac{3}{4}l^2}=\frac{l}{9}\ \text{(答)}$$

[3]

(1) $$\mathbb{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbb{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \quad (答)$$

(2) $$\frac{d\mathbb{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{r}_i \times \mathbb{F}_i \quad (答)$$

(3) 重力を重心につけかえると

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbb{r}_i \times \mathbb{F}_i \longrightarrow \mathbb{N} = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{R} \times \mathbb{F}_i \quad となる$$

$$\mathbb{N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbb{r}_j}{\sum_{j=1}^{N} m_j} \times m_i \mathbb{g}$$

$$= \frac{\left(\sum_{j=1}^{N} m_j \mathbb{r}_j\right) \cancel{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)}}{\cancel{\sum_{j=1}^{N} m_j}} \times \mathbb{g}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \mathbb{r}_j \times m_j \mathbb{g}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \mathbb{r}_j \times \mathbb{F}_j$$ これは $\sum_{i=1}^{N} \mathbb{r}_i \times \mathbb{F}_i$ に等しい.

∴ $\frac{d\mathbb{L}}{dt}$ は変わらない

KOKUYO

[4] ロープの吊り下げられた部分の

- (質量) = (線密度) × (長さ) $= \rho \cdot \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\rho a t^2$
- (速度) $= at$

ロープ全体の運動量は

$$P = (\text{吊り下げられた部分の質量}) \times (\text{吊り下げられた部分の速度}) \quad (※1)$$

$$= \frac{1}{2}\rho a t^2 \cdot at = \frac{1}{2}\rho a^2 t^3$$

$$\therefore \frac{dP}{dt} = \frac{3}{2}\rho a^2 t^2$$

ロープに働く外力の和は

$$F_{tot} = F - (\text{吊り下げられた部分の質量}) \times g \quad (※2)$$

$$= F - \frac{1}{2}ag\rho t^2$$

これらを $\dfrac{dP}{dt} = F_{tot}$ に代入すると.

$$\frac{3}{2}\rho a^2 t^2 = F - \frac{1}{2}\rho g a t^2$$

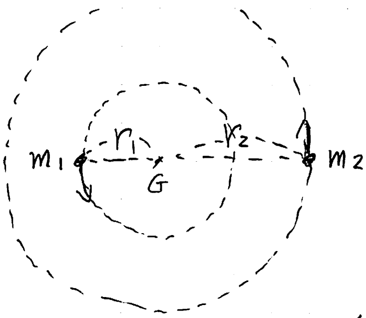
$$F = \frac{1}{2}\rho a t^2 \cdot (3a + g) \quad (\text{答})$$

(※1) 地面上に置かれた部分は速度がゼロなので運動量もゼロである.

(※2) 地面上に置かれた部分に働く重力は地面からの垂直抗力とちょうど相殺するので F_{tot} に寄与しない。

KOKUYO

[5]



2個の天体間に働く重力 F は $F = \dfrac{G m_1 m_2}{(r_1+r_2)^2}$

F は m_1 の円運動の向心力になっているので $F = m_1 r_1 \omega^2$

〃 m_2 〃 $F = m_2 r_2$

$\therefore \cancel{m_1} r_1 \omega^2 = \dfrac{G \cancel{m_1} m_2}{(r_1+r_2)^2}$ $\therefore m_2 = \dfrac{r_1 (r_1+r_2)^2 \omega^2}{G}$ (答)

$\cancel{m_2} r_2 \omega^2 = \dfrac{G m_1 \cancel{m_2}}{(r_1+r_2)^2}$ $\therefore m_1 = \dfrac{r_2 (r_1+r_2)^2 \omega^2}{G}$ (答)

(別解) 換算質量を使って求めると、

$\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ の質点が $F = \dfrac{G m_1 m_2}{r^2}$ $(r = r_1 + r_2)$

を向心力として角速度 ω で円運動していると考えられるので、

$$r \mu \omega^2 = F$$

$$\frac{r \omega^2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

$$\therefore m_1 + m_2 = \frac{r^3 \omega^2}{G}$$

重心についての知識をつかえば $m_1 : m_2 = r_2 : r_1$ だから

$m_1 = \dfrac{r_2}{r}(m_1 + m_2) = \dfrac{r_2 r^2 \omega^2}{G} = \dfrac{r_2 (r_1+r_2)^2 \omega^2}{G}$ (答)

$m_2 = \dfrac{r_1}{r}(m_1 + m_2) = \dfrac{r_1 r^2 \omega^2}{G} = \dfrac{r_1 (r_1+r_2)^2 \omega^2}{G}$ (答)