力 学 Ⅱ　　定 期 試 験 問 題

福井大学工学部物理工学科 1 年対象、担当教員 田嶋、2015 年 2 月 2 日 4 限実施

A3 判問題用紙１枚（表裏印刷）と B4 判解答用紙 1 枚を各人に配布する。解答用紙のおもて面の最下部に学籍番号と氏名を記入せよ。解答用紙１枚だけを提出せよ。【2】〜【5】については、最終的な答のみでなく説明と計算過程を必ず記せ。

【1】

下記の文の ア 〜 ホ に語群から最も適切な語句を選んで埋めよ。

地球の公転の周期 $3.2\times10^{\boxed{ア}}$ 秒、公転軌道の半径 1.5×10^{11} m、および、 イ 定数 $G=6.7\times10^{-11}$ $\mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}$ を使って求めた太陽の質量は、約 $2.0\times10^{\boxed{ウ}}$ kg である。

ア・ウ: 整数で答えよ。

イ: 地球　太陽　宇宙　自転　公転　質量　重力　磁力　電気　遠心　コリオリ　ニュートン

惑星の軌道の形は エ であり、太陽はその オ にある。惑星の速度は面積速度一定の法則に従って変化するが、これは「 カ 保存則に従って」と言い替えることもできる。

エ: 直線　半直線　円　半円　放物線　双曲線　楕円　三次曲線　惑星曲線　ニュートン曲線

オ: 中心　内心　外心　重心　小点　正点　焦点　集点　不動点　漸近点　太陽点　近日点　春分点

カ: エネルギー　エントロピー　エンタルピー　質量　運動量　角運動量　面運動量　天体運動量

質点系に キ が働かなければ質点系の全 ク は保存されることは、作用・反作用の法則を使って導ける。質点系の ケ の加速度は質点系に働く キ のベクトル和を質点系の全 コ で割ったものに等しい。

キ: 内力　外力　接触力　遠隔力　電磁気力　重力

ク: 運動エネルギー　運動量　角運動量　熱量　エントロピー

ケ: 中心　内心　外心　重心　傍心　中点　焦点　重点

コ: エネルギー　質量　電荷　磁荷　粒子数

質量 m_1 の質点 1 と質量 m_2 の質点 2 が長さ L の糸で結ばれ、糸がピンと張った状態で回転している。このとき、回転の中心点は質点 1 から質点 2 の方向に距離 サ $/(m_1+m_2)$ だけ離れた点である。

また、質点 1 を固定し、質点 2 を質量が μ の質点に取り替えて同じ角速度で回転させたところ、糸の張力も同じになった。このとき $\mu=$ シ $/(m_1+m_2)$ である。この μ の値は ス 質量と呼ばれるものである。

サ・シ: 数式で答えよ。

ス: 等価　交換　換算　逆算　簡易　固定　回転　一体　二体　三体

長さ 9m の質量の無視できる棒の左端を点 A, 左端から距離 3m の点を点 B, 距離 6m の点を点 C, 右端を点 D とする。点 B および点 C にはそれぞれ質量 m_{B}kg および m_{C}kg の錘が吊り下げられている。つりあいの状態において、点 A および点 D には鉛直上向きに、それぞれ 25kgf および 20kgf の力が加えられている。このとき、$m_{\mathrm{B}}=$ セ kg, $m_{\mathrm{C}}=$ ソ kg である。また、二つの錘を左端から タ m の点に集めても、つりあいを維持するために両端に加えるべき力は変わらない。

セ・ソ・タ: 数値で答えよ。

質量の無視できる長さ a の剛体棒の両端に質量 m の質点を1個ずつ固定して作った（質量 $2m$ の）剛体がある。この剛体棒を1:2に内分する点を通り棒に垂直な回転軸についてのこの剛体の慣性モーメントは $\boxed{\text{チ}}\, ma^2$ である。
チ: 既約分数で答えよ。

質量が M、長さが L で、一定の線密度を持つ剛体棒の、棒に垂直な回転軸についての慣性モーメントは、回転軸が棒の中心を通る場合は $\frac{1}{12}ML^2$ であり、回転軸が棒の片方の端を通る場合は $\boxed{\text{ツ}}\, ML^2$ である。この剛体棒の中心に回転軸を取り付け、剛体棒と回転軸のなす角度 θ を変えることができるようにしておく。（確認のため述べると、$\theta = 90°$ で、棒と回転軸は直交し、慣性モーメントは $\frac{1}{12}ML^2$ である。）角度を θ に固定した場合の慣性モーメントは $\boxed{\text{テ}}\, ML^2$ である。角運動量が保存されるなら、回転軸のまわりに回転している状態で、回転軸の方向は変えずに、角度 θ を $90°$ から $30°$ に小さくすると、回転の角速度は $\boxed{\text{ト}}$ 倍になる。
　次に、質量の無視できる板の面上に、x,y 軸をとり、板に垂直に z 軸をとる。回転軸をとりはずした剛体棒を、両端を (x, y)=$(L, 0)$ および (L, L) に合わせて板に接着し、z 軸を回転軸として回転させる。この場合の慣性モーメントは $\boxed{\text{ナ}}\, ML^2$ である。
ツ・ト・ナ: 整数か既約分数で答えよ。
テ: 数式で答えよ。

ニュートンの運動方程式が成り立つ座標系は $\boxed{\text{ニ}}$ 系と呼ばれる。
ニ: 保存　可逆　可積分　静止　運動　加速度　慣性　回転　振動　波動　太陽　惑星　銀河

電車が加速しているとき、床に置かれた空き缶は $\boxed{\text{ヌ}}$ へころがり、ヘリウムが詰まって浮いている風船は $\boxed{\text{ネ}}$ へただよっていく。これらの現象を電車のシートに座った観測者が解釈すると、全ての物体に $\boxed{\text{ノ}}$ 向きの $\boxed{\text{ハ}}$ が働いているためだということになる。
ヌ・ネ・ノ： 前方　後方
ハ： 偶力　抗力　動摩擦力　静止摩擦力　保存力　慣性力　内力　外力　作用　反作用

北極点を除く北半球では、鉛直上向きに投射された物体に働くコリオリ力の働く方向は、上昇中は $\boxed{\text{ヒ}}$ であり、最高点を通過後の落下中は $\boxed{\text{フ}}$ である。
ヒ・フ: 東向き　南向き　西向き　北向き　鉛直上向き　鉛直下向き　ゼロ

福井市（北緯36度、東経136度）においては、水平面内を西に向かって移動する物体に働く（地球の自転に起因する）コリオリ力の水平面内の成分は $\boxed{\text{ヘ}}$、またコリオリ力と鉛直上向き方向とのなす角度は $\boxed{\text{ホ}}$ 度である。
ヘ: 東向き　南向き　西向き　北向き　南東向き　南西向き　北西向き　北東向き　ゼロ
ホ: 整数で答えよ。

【2】～【5】番は裏に印刷されています。

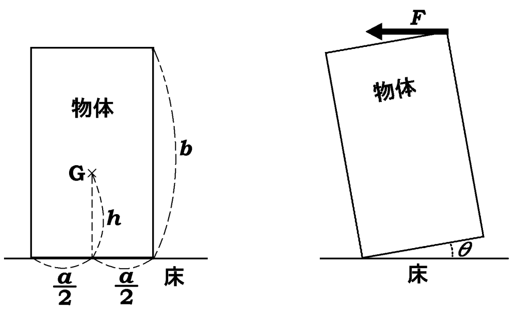
【2】 宇宙飛行士と宇宙船が 40m 離れて静止している。宇宙飛行士が両者をつなぐロープを手繰り寄せて宇宙船に戻ったとき、宇宙船は、元の位置から何 m だけ移動しているか？但し、（宇宙服を着た）宇宙飛行士の質量は 100kg, 宇宙船の質量は 1900kg であり、ロープの質量は無視できる。

(教科書 p.159 の演習問題 11 の A の 5 番の問題の数字だけを変更したものです。)

【3】 下図の左側に示したような物体が、水平な床の上に置かれている。この物体は、全体が一個の剛体であり、質量は m であり、直方体の形状をしており、高さは b、厚さ（前面・後面間の距離）は a である。物体の重心 G は、物体の前面・後面から等距離にあり、高さは h である。

下図の右側に示したように、この物体を角度 θ だけ傾けた状態で静止させるためには、物体の後面の最上部を水平方向に大きさ F の力で押す必要があった。このときの F を求めよ。ただし、重力加速度は g とせよ。

(2008 年度の定期試験の [2] 番の問題を簡略化して再出題しました。)



【4】 コマの歳差運動の角速度 Ω を、コマの自転の角速度 ω、コマの質量 M、「コマの心棒の先端（接地点）」から「コマの重心」までの距離 d、コマの慣性モーメント（心棒を回転軸とする場合） I、コマの心棒と鉛直方向のなす角度 θ、重力加速度 g、のうち必要なものを用いて表せ。(出典は講義ノートです。)

【5】 斜面を滑らずに転がる円筒の斜面を下る方向の並進運動の加速度 a を、円筒の質量 M, 円筒の半径 R, 円筒の慣性モーメント (対称軸を回転軸とする場合) I, 斜面の傾斜角度 θ, 重力加速度 g、のうち必要なものを用いて表せ。

ただし、円筒の重心は円筒の対称軸上にある。また、傾斜角度は $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲にある。(確認のため述べると、$\theta = 0$ は斜面が傾いておらず水平面に一致する場合を表す。) なお、I を例えば $I = \frac{1}{2}MR^2$ などの形で M と R で表そうとしてはならない。（I は M と R だけでは決定されず、円筒内部の質量分布に依存して変化するからである）(出典は講義ノートです。)

力 学 II 定 期 試 験 答 案 用 紙

福井大学 工学部 物理工学科 1 年生対象、 担当教員 田嶋、 2015 年 2 月 2 日 4 限実施

【1】
60 点

ア	イ	ウ	エ	オ
カ	キ	ク	ケ	コ
サ	シ	ス	セ	ソ
タ	チ	ツ	テ	ト
ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ
ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ

【2】【3】【4】【5】は以下のスペースおよび裏面に解答せよ。
10 点 10 点 10 点 10 点

裏面も解答に使ってよい

学科	物理工学	学籍番号								氏名		得点	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	合計

1

ア 地球の公転周期は 1年 ≒ 365日 = $365 \times \underbrace{86400}_{= 24\times 60\times 60}$ 秒 ≈ 3×10^7 秒 ∴ ア = 7

イ 重力定数と呼ばれるので イ = 重力

ウ 地球の公転運動の向心加速度 = $r\omega^2$ 　r: 地球の公転半径, ω: 公転の角速度

太陽が地球に及ぼす重力 = $\dfrac{GMm}{r^2}$ 　M: 太陽の質量, m: 地球の質量

運動方程式 $ma = F$ より

$$mr\omega^2 = \frac{GMm}{r^2}$$

$$\therefore\ M = \frac{r^3\omega^2}{G} = \frac{(1.5\times 10^{11})^3 \times \left(\dfrac{2\times 3.14}{3.2\times 10^7}\right)^2}{6.7\times 10^{-11}}$$

$$= \frac{1.5^3\times 2^2\times 3.14^2}{6.7\times 3.2^2}\times 10^{33-14+11}$$

$$= 1.9 \times 10^{30}\ (\mathrm{m})$$ ∴ ウ = 30

エ 楕円

オ 焦点 （しょうてん, focus）

カ 角運動量

キ 外力

ク 運動量

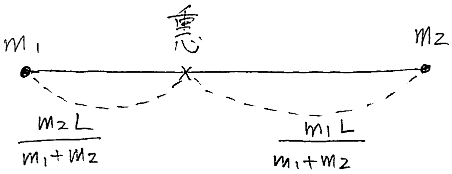
ケ 重心

コ 外力

サ 質量

$$M\ddot{\mathbb{R}} = \mathbb{F},\quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i,\quad \mathbb{F} = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{F}_i,\quad \mathbb{R} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbb{r}_i}{M}$$

$\boxed{\text{サ}}$　重心のまわりに回転がおきるので

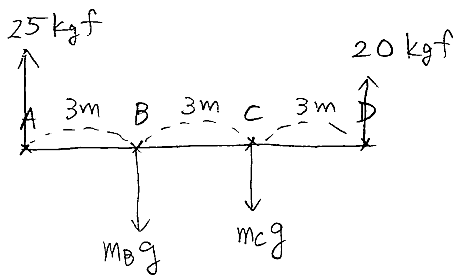


なので　$\boxed{\text{サ}} = m_2 L$

$\boxed{\text{シ}}$　$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$　より　$\mu = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2}$　$\therefore$ $\boxed{\text{シ}} = m_1 m_2$

$\boxed{\text{ス}}$　換算

$\boxed{\text{セ}}$, $\boxed{\text{ソ}}$



(注) 1 kgf（force）は 質量が 1 kg の物体に働く重力であり、g ニュートンに等しい

$\therefore$ $25\,\mathrm{kgf} = 25\,\mathrm{kg} \cdot g$ ニュートン である

C点のまわりの力のモーメントのつりあいにより　$-6 \times 25 + 3 m_B g + 3 \times 20 = 0$

$\therefore$ $m_B g = 30\ \mathrm{kgf}$

$\therefore$ $m_B = 30\,\mathrm{kg}$, $\boxed{\text{セ}} = 30$

B点のまわりの力のモーメントのつりあいにより　$-3 \times 25 - 3 m_C g + 6 \times 20 = 0$

$m_C g = 15\ \mathrm{kgf}$

$\therefore$ $m_C = 15\,\mathrm{kg}$, $\boxed{\text{ソ}} = 15$

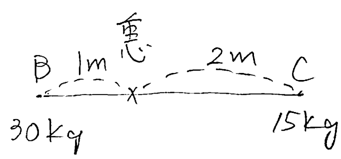
あるいは、鉛直方向の力のつりあいより　$25 - m_B g - m_C g + 20 = 0$

$\therefore$ $m_B + m_C = 45\,\mathrm{kg}$

$m_C = 45 - m_B = 15$

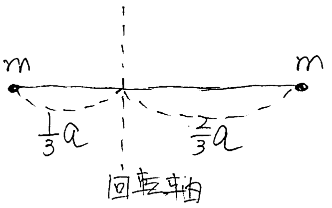
$\boxed{\text{タ}}$　剛体に働く重力をその重心に集めても剛体の運動は変化しないから

BとCをその重心に集めればよい。



$\therefore$ $\boxed{\text{タ}} = 4$

［チ］



$$I=\left(\frac{1}{3}a\right)^2 m+\left(\frac{2}{3}a\right)^2 m=\frac{5}{9}ma^2 \qquad \therefore \boxed{チ}=\frac{5}{9}$$

［ツ］ 慣性モーメントに関する平行軸の定理により．

$$I=\frac{1}{12}ML^2+\left(\frac{1}{2}L\right)^2M=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\right)ML^2=\frac{1}{3}ML^2 \qquad \therefore \boxed{ツ}=\frac{1}{3}$$

［テ］ 剛体棒の各点と回転軸との距離は $\theta=90°$ のときの $\sin\theta$ 倍になる。
慣性モーメントは質量に回転軸との距離の二乗をかけたものの和だから．
$\sin^2\theta$ 倍になる。 $\therefore$ 慣性モーメント $=\sin^2\theta\times\frac{1}{12}ML^2$ $\quad\therefore \boxed{テ}=\frac{\sin^2\theta}{12}$

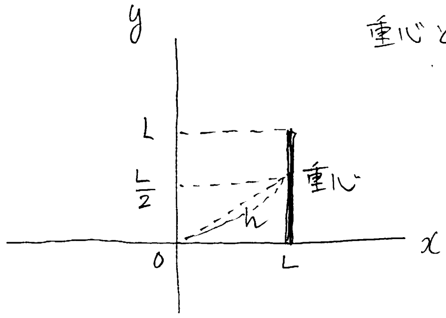
［ト］ 角運動量は慣性モーメントと角速度の積であるから

$$I\omega=I'\omega'$$

ここで $I=\frac{1}{12}ML^2$， $I'=\sin^2\theta\times\frac{1}{12}ML^2$ ，$\theta=30°$

$$\therefore \frac{\omega'}{\omega}=\frac{I}{I'}=\frac{1}{\sin^2 30°}=4 \qquad \therefore \boxed{ト}=4$$

［ナ］



重心と回転軸との距離 $h=\sqrt{L^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}L$

平行軸の定理により

$$I=I_G+Mh^2=\frac{1}{12}ML^2+\frac{5}{4}ML^2=\frac{16}{12}ML^2=\frac{4}{3}ML^2$$

$$\therefore \boxed{ナ}=\frac{4}{3}$$

[別解] 棒の $(L, y)-(L, y+dy)$ 間の部分の質量は $\frac{M}{L}dy$ なので

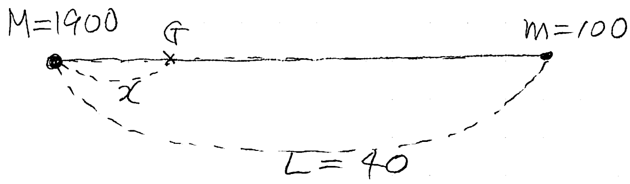
$$I=\int_0^L (L^2+y^2)\frac{M}{L}dy=\frac{M}{L}\left[L^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=L}=\frac{4}{3}ML^2$$

［ニ］ 慣性

［ヌ］ 後方　　［ネ］ 前方　　［ノ］ 後方　　［ハ］ 慣性力

［ヒ］ 西向き　　［フ］ 東向き　　［ヘ］ 北向き　　［ホ］ 144

[2]



両者は、その重心に集まる。

$$x = \frac{M \cdot 0 + m \cdot L}{M+m} = \frac{mL}{M+m} = \frac{100 \times 40}{2000} = 2 \quad \text{答 } 2\,m$$

(注) 40m先にあるのは宇宙船の入り口で、宇宙船の重心はもっと向こうにある場合でも宇宙船の移動距離は同じになる。

[3]

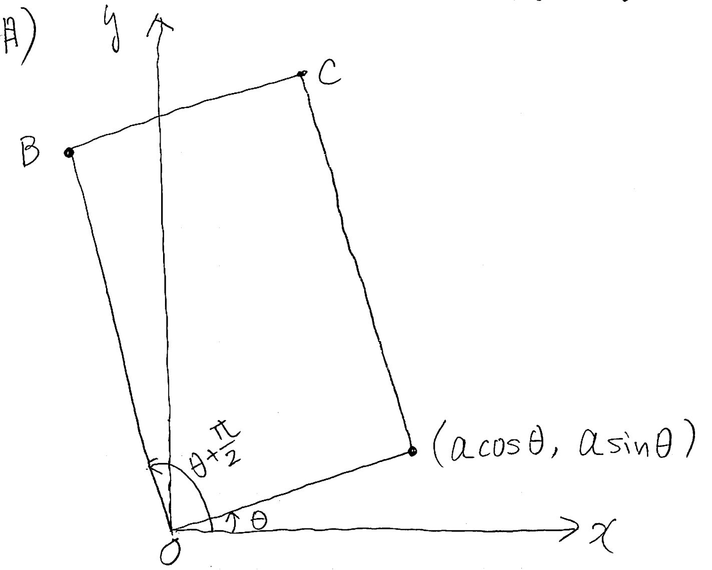
物体の前面の最下端の点のまわりの力のモーメントをNとすると（床からの抗力は寄与しないので）

$$N = F(a\sin\theta + b\cos\theta) - mg\left(\frac{a}{2}\cos\theta - h\sin\theta\right)$$

つりあい条件より $N=0$

$$\therefore \quad F = \frac{\frac{a}{2}\cos\theta - h\sin\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta} mg \quad \text{(答)}$$

（説明）



点Bの座標は

$$\left(b\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right),\ b\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right) = (-b\sin\theta,\ b\cos\theta)$$

点Cの座標は

$$(a\cos\theta,\ a\sin\theta) + (-b\sin\theta,\ b\cos\theta) = (a\cos\theta - b\sin\theta,\ \underbrace{a\sin\theta + b\cos\theta})$$

Fは水平なので、これがFのうでの長さになる。

同様に考えて、点Gの座標は　点Cの座標で $a \to \frac{a}{2}$, $b \to h$ とおきかえたものだから、

$$\left(\underbrace{\frac{a}{2}\cos\theta - h\sin\theta},\ \frac{a}{2}\sin\theta + h\cos\theta\right)$$

重力は鉛直なので これ が重力のうでの長さになる

[4]

$\dfrac{d\mathbb{L}}{dt} = \mathbb{N}$ より $\Delta\mathbb{L} = \mathbb{N}\,\Delta t$

・コマが勢いよく回っているときは

$L = |\mathbb{L}| = I\omega$ ，$\mathbb{L}$は心棒の方向を向くとしてよい.

心棒の方向は鉛直軸のまわりにΩで回転するので

$$\Delta L = L \sin\theta\, \Omega \Delta t = I\omega \sin\theta\, \Omega\Delta t$$

が成り立つ。この式と

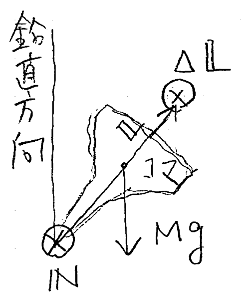
$$N = Mg\,d\sin\theta$$

を $\Delta L = N\,\Delta t$ に代入すると.

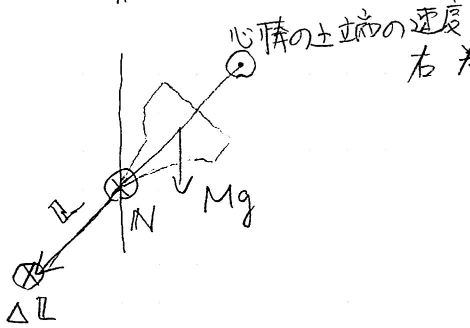
$$I\omega \sin\theta\,\Omega\,\Delta t = Mg\,d\sin\theta\,\Delta t$$

$$\therefore\ \Omega = \frac{Mgd}{I\omega} \quad (\text{答})$$

なお $\Delta\mathbb{L}$ と $\mathbb{N}$ が同じ方向を向いていることは下図のとおり成立している



上から見てコマも歳差運動も左巻きとした場合が左図である



右巻きの場合は右図である

[5]

円筒と斜面の間の摩擦力をFとする。

円筒の自転の角加速度は$\frac{a}{R}$である。

運動方程式は

$$\begin{cases} Ma = Mg\sin\theta - F \\ I\frac{a}{R} = FR \end{cases}$$

$$\therefore \quad Ma = Mg\sin\theta - \frac{I}{R^2}a$$

$$\left(M + \frac{I}{R^2}\right)a = Mg\sin\theta$$

$$\therefore \quad a = \frac{M}{M + \frac{I}{R^2}} g\sin\theta \qquad \text{(答)}$$