力 学 Ⅱ　定 期 試 験 問 題

福井大学工学部物理工学科 1 年対象、担当教員 田嶋、2014 年 2 月 3 日 4 限実施

A3 判問題用紙１枚（表裏印刷）と B4 判解答用紙 1 枚を各人に配布する。解答用紙のおもて面の最下部に学籍番号と氏名を明記せよ。解答用紙のうら面は【4】と【5】の答を書くのに用いる。【2】〜【5】については、最終的な答のみでなく説明と計算過程を必ず記せ。

【1】

下記の文の $\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{ホ}}$ に語群から最も適切な語句を選んで埋めよ。

ケプラーの第３法則とは、同じ恒星のまわりを回る全ての惑星の公転周期は楕円軌道の長軸半径の $\boxed{\text{ア}}$ 乗に比例するという法則である。（覚えていなくても、円軌道の場合について考察すれば高校生にも分かる。） このことから、周期が 366 年の池谷・張彗星の軌道の長軸半径は、地球の軌道の長軸半径の約 $\boxed{\text{イ}}$ 倍である。

地球の半径を R、自転の角速度を ω、重力加速度を g とすると、静止衛星の軌道半径は $R^{\boxed{\text{ウ}}}g^{\boxed{\text{エ}}}\omega^{\boxed{\text{オ}}}$ である。

準天頂衛星「みちびき」は静止衛星と同じく一日で地球を一周するが、軌道の形状は円ではなく離心率 0.10 の楕円である。軌道傾斜角（軌道面と地球の赤道面のなす角度) は 41 度で、地球と共に回転する観測者には、日本の上空とオーストラリア上空を行き来するように見える。楕円軌道の $\boxed{\text{カ}}$ が日本の上空に設定してあるため、日本の上空を通過する速度は、オーストラリア上空を通過する速度より約 $\boxed{\text{キ}}$ %だけ遅く、日本の上空に長く存在する。「みちびき」と静止衛星とで（質量は同じとして）運動の諸量を比較すると、$\boxed{\text{ク}}$ と $\boxed{\text{ケ}}$ は両者で等しく、$\boxed{\text{コ}}$ は「みちびき」のほうが小さい。

質点 P の質量を m, 時刻 t における位置ベクトルを $\vec{r}(t)$、速度を $\vec{v}(t)$、運動量を $\vec{p}(t)$、（位置ベクトルの座標原点を基準点として定義された）角運動量を $\vec{L}(t)$、運動エネルギーを $E_{\mathrm{K}}(t)$、質点 P に働く力を $\vec{F}(t)$ とする。このとき、任意の２つの時刻 $t_1 < t_2$ に対して下記の等式が成立する。

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boxed{\text{サ}}\, dt, \qquad \vec{L}(t_2) - \vec{L}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boxed{\text{シ}}\, dt, \qquad E_{\mathrm{K}}(t_2) - E_{\mathrm{K}}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boxed{\text{ス}}\, dt.$$

宇宙飛行士は宇宙遊泳中にいくら手足を振り回しても意のままに空間中を移動することはできない。これは $\boxed{\text{セ}}$ がなければ質点系の $\boxed{\text{ソ}}$ の速度を変えることができないからである。

宇宙船が燃焼ガスを秒速 3km で一方向に噴出して加速度 $0.3g$ ($g = 9.8\mathrm{ms}^{-2}$) を出すには、１秒あたり宇宙船の全質量の約 $\boxed{\text{タ}}$ 分の 1 の質量の燃料をガスとして噴出する必要がある。ただし重力は考えない。

質量が m、 長さが a で、一定の線密度を持つ剛体棒の、棒に垂直な回転軸に対する慣性モーメントは、回転軸が棒の中心を通る場合は $\frac{1}{12}ma^2$ であり、棒を $\frac{1}{5}a : \frac{4}{5}a$ に内分する点を通る場合は $\boxed{\text{チ}}\, ma^2$ である。

太陽の及ぼす重力などが原因で、地軸 (地球の自転軸) の方向は、地球の公転面の法線方向のまわりに約 26000 年周期で回転する。これを $\boxed{\text{ツ}}$ という。

「ガリレオの $\boxed{\text{テ}}$ 性原理」とは「すべての $\boxed{\text{ト}}$ 系は同等であり、どれが真の $\boxed{\text{ナ}}$ 系かを言うことはできない」という主張である。

地球の自転による遠心力の大きさは、赤道上では、重力の約 $\boxed{\text{ニ}}$ 分の１倍である。

赤道上で $\boxed{\text{ヌ}}$ 向きに運動する物体に働く遠心力とコリオリ力は、同一方向を向く。

鉛直上向きの速度を持つ物体にコリオリ力が働かない場所は $\boxed{\text{ネ}}$ である。

遠心力のため、地球の極軸半径（地球という回転楕円体の中心と北極点または南極点との間の距離）は赤道半径より $\boxed{\text{ノ}}$ 。

福井（北緯 36 °）において、北に向かって水平に移動する物体に働く（地球の自転に起因する）コリオリ力の水平面内の成分は $\boxed{\text{ハ}}$ である。また鉛直方向の成分は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。

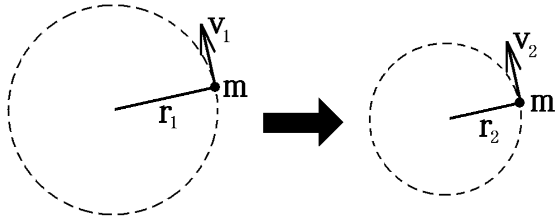
南半球では、低気圧に吹き込む風は (上空から見下ろして) $\boxed{\text{フ}}$ 巻きに回転し、高気圧から吹き出す風はその逆巻きに回転する。従って南半球では或る地域の $\boxed{\text{ヘ}}$ に高気圧、 $\boxed{\text{ホ}}$ に低気圧があるとき、その地域には南極方面からの寒気が流れ込んで寒くなる。

【語群】

ア: 整数か既約分数を書け。
イ: 4　7　20　50　80　110　140　366　1200　2600　7000　130000
ウ・エ・オ: ベキ乗の部分に当てはまる整数か既約分数を書け。
カ: 近地点　遠地点
キ: 10　20　30　40　50　60　70　80　90
ク: 長軸半径　短軸半径　楕円の面積　面積速度
ケ・コ: 運動エネルギー　重力のポテンシャルエネルギー　力学的エネルギー　運動量　角運動量
サ・シ・ス: 数式で答えよ.
セ: 作用　反作用　内力　外力　重力　偶力　抗力　摩擦力　保存力　慣性力
ソ: 内心　外心　重心　傍心　中心点　不動点　漸近点　遠日点　春分点　分岐点　焦点　集中点
タ: 3　10　30　100　300　1000　3000　10000　30000　100000
チ: 既約分数を書け
ツ: 章動　秤動　地軸揺動　地軸周回　コマ運動　日周運動　年周運動　歳差運動　万年運動
テ: 完全　不完全　絶対　相対　確定　不確定　不変　流動　干渉　不干渉　超越　無常　平等
ト・ナ: 保存　可逆　可積分　静止　運動　加速度　慣性　回転　振動　波動　太陽　惑星　銀河
ニ: 3　10　30　100　300　1000　3000　10000
ヌ: 東　西　南　北　鉛直上向き　鉛直下向き
ネ: 北極点　北回帰線　赤道　南回帰線　南極点 (該当するものを全て書け)
ノ: 長い　短い
ハ: 東向き　南向き　西向き　北向き　南東向き　南西向き　北西向き　北東向き　ゼロ
ヒ: 上向き　下向き　ゼロ
フ: 右　左
ヘ・ホ: 東　南　西　北

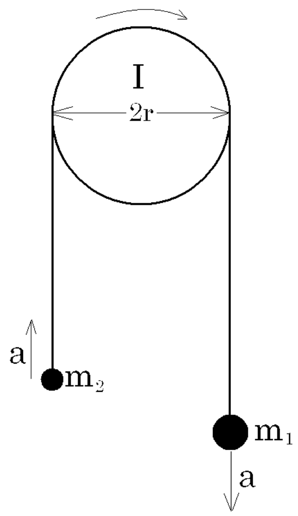
【2】〜【5】番は裏に印刷されています。

【2】 質量の無視できる伸び縮みしない糸の一端を質量 m の質点に接着し、糸の他端を滑らかな水平面に開いた微小な孔に固定して、質点に水平面上で孔を中心とする円運動をさせた。時刻 $t=t_1$ には円運動の半径は r_1、質点の速度は v_1 であった。その後、時刻 t が $t_1<t<t_2$ の間に、外力により糸がゆっくりと孔のなかに引き込まれたため、円運動の半径は減少し、時刻 t_2 には円運動の半径は r_2 となった。時刻 $t_1<t<t_2$ の間に、糸が質点にした仕事 W を m、r_1、r_2、v_1 を使って表せ。（右図に描き込まれた速度 v_2 は答の導出過程でのみ使用せよ。）ただし、糸は十分にゆっくりと引き込まれたため、糸がたるむことはなかったとせよ。また、時刻 t_1 および t_2 には質点は正確に等速円運動を行っていた。

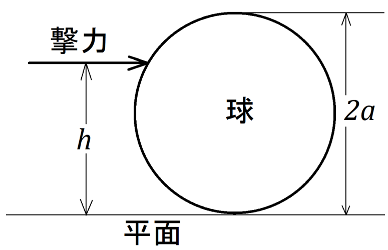


【3】 質量 m_1 および m_2 の錘 2 個が糸で結ばれて、「回転軸が滑らかに回る定滑車」にかけられている。(なお、このような装置を「アトウッドの装置」と呼ぶ。) 定滑車の半径は r, 慣性モーメントは I であり、$m_1>m_2$ とする。また、定滑車と糸との間に滑りは起きないものとする。

このとき、質量 $m_1(m_2)$ の錘の落下 (上昇) する加速度を a、滑車の回転の角加速度を $\dot{\omega}$、質量 m_1 の錘と滑車の間での糸の張力を T_1、質量 m_2 の錘と滑車の間での糸の張力を T_2、重力加速度を g として、各錘の鉛直方向の並進運動の運動方程式および滑車の回転運動の運動方程式を書け。次に、定滑車と糸の間に滑りが起きないことから a と $\dot{\omega}$ の間に成り立つ関係式を書け。最後に、上で求めた 4 本の等式を連立させることで、a を m_1、m_2、I、r、g を用いて表せ。



【4】 平面上に置かれて静止している球がある。ビリヤードをするときのように、この球の表面上の、平面から高さ h にある１点を棒で水平方向に突いたところ、球が平面上を滑ることなく転がり始めた。このとき h を求めよ。ただし、球の質量は m, 半径は a, 重心は球の中心に一致し、重心を通る回転軸のまわりの慣性モーメントは $\frac{2}{5}ma^2$ とする。



考え方： 棒から球に働く力は水平方向の撃力だとせよ。即ち、非常に大きな水平方向の力 (F) が短時間 (Δt) だけ働くとせよ。換言すると、大きさが $F\Delta t$ で方向が水平な（即ち鉛直成分がゼロの）力積が球の表面の高さ h の１点に与えられたとせよ。

次に、重力や平面から働く力は撃力に比べて無視できると仮定して、この撃力だけを考えて突いた直後の運動状態を決定せよ。そして、突いた直後の球の並進の速度と回転の角速度の比が、球が平面上を転がる場合と同じであるという条件から h を定めよ。

最後に、突いた直後の運動が球が平面にめり込むような運動でないことを確認せよ。めり込まない場合は、平面から働く垂直抗力（平面にめり込まないようにする拘束力）と摩擦力（最大値が垂直抗力に比例する力）は撃力にはならないので、それらを無視したことは正当だと言える。

【5】 N 個の質点からなる質点系について考える。質点には $1 \sim N$ 番の番号を付して区別する。「番号が i である質点」を「質点 i」と呼ぶことにする。質点 i の質量を m_i, 位置ベクトルを $\vec{r}_i$, 速度ベクトルを $\vec{v}_i$ とする。また、質点 i が質点 j に及ぼす力を $\vec{F}_{ij}$, N 個の質点以外のものが質点 i に及ぼす力を $\vec{F}_i$ とする。ただし、自分自身には力を及ぼせないので、$\vec{F}_{ii} = \vec{0}$ $(1 \leq i \leq N)$ と定めておく。これらの記号を使って下記の小問に答えよ。

(1) 質点 i の従う運動方程式を書き記せ。但し $1 \leq i \leq N$ とする。
方程式中に現れる質点 i の加速度は $\dfrac{d\vec{v}_i}{dt}$ (あるいは $\dfrac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$) と記せ。

(2) 「作用・反作用の法則」をこの問題文中で定義した記号を使って数式で書き表せ。

(3) 質点系の全運動量 $\vec{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i$ の時間変化率 $\dfrac{d\vec{P}}{dt}$ を与える方程式を導出せよ。
考え方：$\dfrac{d\vec{v}_i}{dt}$ を (1) の答の運動方程式を使って力で表せ。

(4) 質点系の全角運動量 $\vec{L} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i \times \vec{v}_i$ の時間変化率 $\dfrac{d\vec{L}}{dt}$ を与える方程式を導出せよ。
ただしこの小問においてのみ $\vec{F}_{ij}$ は $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ に平行であると仮定せよ。

(5) 質点系の重心座標 $\vec{R} = \dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{M}$ の従う「重心座標の運動方程式」を導出せよ。
ただし、$M = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i$ は質点系の全質量である。

力 学 II 定 期 試 験 答 案 用 紙

福井大学 工学部 物理工学科 1 年生対象、 担当教員 田嶋、 2014 年 2 月 3 日 4 限実施

【1】
60 点

ア	イ	ウ	エ	オ
カ	キ	ク	ケ	コ
サ	シ	ス	セ	ソ
タ	チ	ツ	テ	ト
ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ
ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ

【2】
10 点

【3】
10 点

【4】・【5】 は裏面に解答せよ.(10 点+10 点)

学科	物理工学	学籍番号									氏名	

得点	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	合計

定期試験答案用紙（全 1 枚、表裏使用)、科目名 力学 II、対象 福井大学工学部物理工学科 1 年生、担当教員 田嶋、実施日時 2014 年 2 月 3 日 4 限、実施場所 総合大 1 講義室

[1] ア　r_0を長軸半径，Tを周期として．$\dfrac{r_0^3}{T^2} = \dfrac{GM}{4\pi^2}$　（Mは恒星の質量）

$$\therefore\ T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}}\, r_0^{3/2} \qquad ア = \frac{3}{2}$$

イ　地球の軌道の長軸半径をr_0，周期をT_0（=1年）とし．

池谷・張彗星の長軸半径をr_1，周期をT_1とすると．

$$\frac{r_0^3}{T_0^2} = \frac{r_1^3}{T_1^2} \left(= \frac{GM}{4\pi^2}\right)$$

$$\therefore\ r_1 = r_0\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{2/3} = r_0 \cdot \left(\frac{366年}{1年}\right)^{2/3} \fallingdotseq r_0 \times 51 \qquad イ = 50$$

ウ・エ・オ

静止軌道の半径をrとすると．そこでの重力加速度g'は

$$g' = \frac{GM}{r^2} \quad （Mは地球の質量）$$

また

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$$\therefore\ g' = \left(\frac{R}{r}\right)^2 g$$

半径r，角速度ωの円運動の向心加速度は$r\omega^2$．これがg'に等しいことより

$$r\omega^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^2 g$$

$$r^3 = R^2 g\, \omega^{-2}$$

$$r = R^{2/3} g^{1/3} \omega^{-2/3} \qquad ウ = \frac{2}{3},\ エ = \frac{1}{3},\ オ = -\frac{2}{3}$$

カ　遠地点（軌道上の点のなかで，地球の中心から最も遠い点）

キ　日本上空の遠地点（apogee）での半径をr_a，速さをv_a

オーストラリア上空の近地点（perigee）での半径をr_p，速さをv_p　とすると．

角運動量は衛星の質量をmとして　それぞれ　$m r_a v_a$，$m r_p v_p$である。

（遠地点と近地点では速度ベクトルと位置ベクトルが直交しているので

$|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}| = rv$となることを利用した．）

角運動量の保存により　$m r_a v_a = m r_p v_p$．

離心率が0.1であるということは．$r_a = 1.1 r_0$，$r_p = 0.9 r_0$（r_0は長軸半径．

$r_0 = \dfrac{r_a + r_p}{2}$）なので．$\dfrac{v_a}{v_p} = \dfrac{r_p}{r_a} = \dfrac{0.9}{1.1} \fallingdotseq 0.82$　　キ = 20（%）

ク　長軸半径

ケプラー運動の周期 T と長軸半径 r_0 の間には $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r_0{}^3$ という一対一の関係がある。但し G は重力定数，M は恒星の質量である。

ケ　力学的エネルギー

ケプラー運動では，力学的エネルギー E（運動エネルギーと重力のポテンシャルエネルギーの和，但し運動エネルギーには惑星の重心運動のエネルギーだけを含める）と長軸半径 r_0 の間にも $E = -\frac{GMm}{2r_0}$ という一対一の関係がある。但し m は惑星の質量である。

コ　角運動量

角運動量 L は $L = \sqrt{GMm^2 r_0 (1-\varepsilon^2)}$ のように離心率 ε に依存するので，$\varepsilon = 0$ のときが最大である。

運動エネルギー，重力のポテンシャルエネルギー，運動量（の大きさ）については，離心率がゼロの場合（円軌道）では時間的に一定だが，離心率がゼロでない場合には一定ではなく変動し，遠地点または近地点で最大値または最小値をとる。

円軌道での値は，楕円軌道での最大値と最小値の間にある。したがって「常に等しい」「常に大きい」「常に小さい」という言明はまちがいである。

サ　$\vec{F}(t)$

運動方程式 $m\dot{\vec{v}}(t) = \vec{F}(t)$ の両辺を t で t_1 から t_2 まで定積分すると

$$m\vec{v}(t_2) - m\vec{v}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt$$

を得る。$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t)$ を使うと

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt$$

を得る。

$\boxed{シ}$ $\vec{r}(t) \times \vec{F}(t)$ （注意：「$\times$」は外積）

$$m\dot{\vec{v}}(t) = \vec{F}(t)$$

$$m\vec{r}(t) \times \dot{\vec{v}}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{F}(t)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{r}(t) \times \vec{F}(t)\,dt = m\int_{t_1}^{t_2} \vec{r}(t) \times \dot{\vec{v}}(t)\,dt$$

$$= m\left[\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)\right]_{t_1}^{t_2} - m\int \underbrace{\dot{\vec{r}}(t) \times \vec{v}(t)}_{\vec{v}(t)\times\vec{v}(t) = \vec{0}}\,dt$$

$$= m\vec{r}(t_2) \times \vec{v}(t_2) - m\vec{r}(t_1) \times \vec{v}(t_2)$$

$$= \vec{L}(t_2) - \vec{L}(t_1) \quad (\because\ \vec{L}(t) = m\vec{r}(t) \times \vec{v}(t))$$

$\boxed{ス}$ $\vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$ （注意：「$\cdot$」は内積）

$$m\dot{\vec{v}}(t) = \vec{F}(t)$$

$$\vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) = m\dot{\vec{v}}(t) \cdot \vec{v}(t)$$

$I = m\int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{v}}(t) \cdot \vec{v}(t)\,dt$ とおくと

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)\,dt.$$

また $I = m\left[\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)\right]_{t_1}^{t_2} - m\int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) \cdot \dot{\vec{v}}(t)\,dt$

$$= m\left[\vec{v}(t)^2\right]_{t_1}^{t_2} - I$$

$$\therefore\ I = \frac{1}{2}m\vec{v}(t_2)^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}(t_1)^2 = E_K(t_2) - E_K(t_1)$$

$$\therefore\ E_K(t_2) - E_K(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)\,dt$$

$\boxed{セ}$ 外力

$\boxed{ソ}$ 重心

$\boxed{タ}$ 1000

Δt の間にロケットの得る運動量は $m \cdot 0.3g \cdot \Delta t$ （m はロケットの質量）

〃 噴出したガスの運動量は $\Delta m \cdot 3\,\mathrm{km/sec}$ （Δm はガスの質量）

運動量保存則により $m \cdot 0.3g \cdot \Delta t = \Delta m \cdot 3\,\mathrm{km/sec}$

$$\therefore\ \frac{1}{m}\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{0.3g}{3\,\mathrm{km/sec}} \fallingdotseq \frac{3\,\mathrm{m/sec^2}}{3000\,\mathrm{m/sec}} = \frac{1}{1000}\ \mathrm{sec^{-1}}$$

チ $\dfrac{13}{75}$

平行軸の定理より

$$I = \frac{1}{12}ma^2 + m\cdot\left(\frac{3}{10}a\right)^2 = \frac{13}{75}ma^2$$

ツ 歳差運動

テ 相対

ト 慣性

ナ 静止

ニ 300

地球の自転の角速度 $\omega \fallingdotseq \dfrac{2\pi}{1日} \fallingdotseq \dfrac{6.28}{86400\,\mathrm{sec}} \fallingdotseq 7.3\times10^{-5}\ \mathrm{sec^{-1}}$

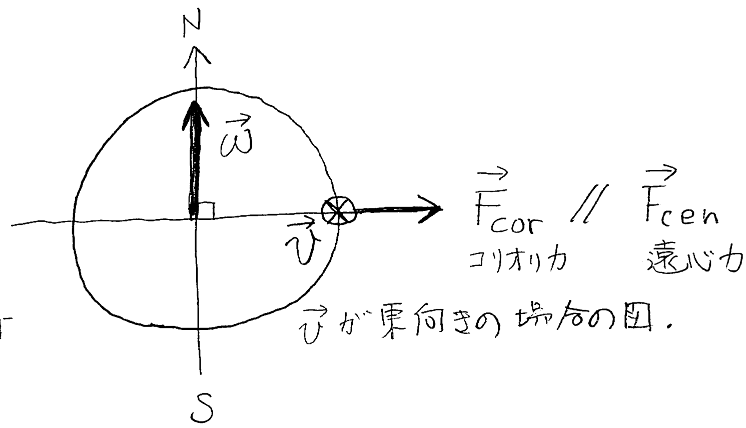
地球の半径を R とすると 質量 m の物体に働く

遠心力の大きさは $mR\omega^2 = m\ 6.4\times10^6\,\mathrm{m}\times(7.3\times10^{-5}\,\mathrm{sec^{-1}})^2$

$\fallingdotseq 0.034\ m = \dfrac{9.8\,m}{287} \fallingdotseq \dfrac{mg}{300}$

ヌ 東

東北や東南でも
$\vec{F}_{cor}$ は鉛直上向きになる
が選択肢に含まれていな
いので 東が正解



$\vec{v}$ が東向きの場合の図.

ネ 北極点・南極点

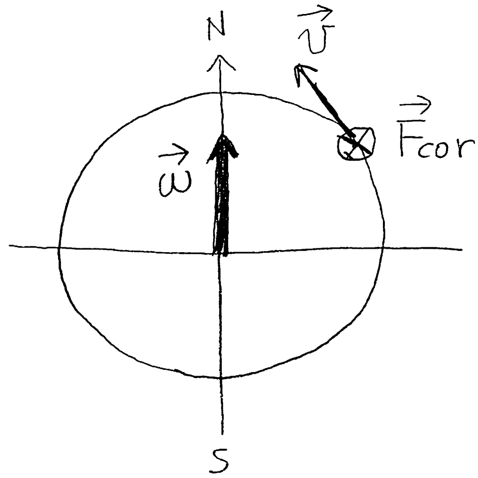
地球の中心を基準点とする位置ベクトルを $\vec{r}$ とかくと、
$\vec{v}$ は鉛直上向きなので $\vec{v} \parallel \vec{r}$ である。

$\therefore\ \underset{コリオリカ}{\vec{F}_{cor}} = 2m\vec{v}\times\vec{\omega} \propto \vec{r}\times\vec{\omega} = \vec{0}$ $\therefore$ $\vec{r}$ と $\vec{\omega}$ は平行ないし反平行. これは $\vec{r}$ が南極か北極の場合である。

$\boxed{\text{ノ}}$ 短い

$\boxed{\text{ハ}}$ 東向き

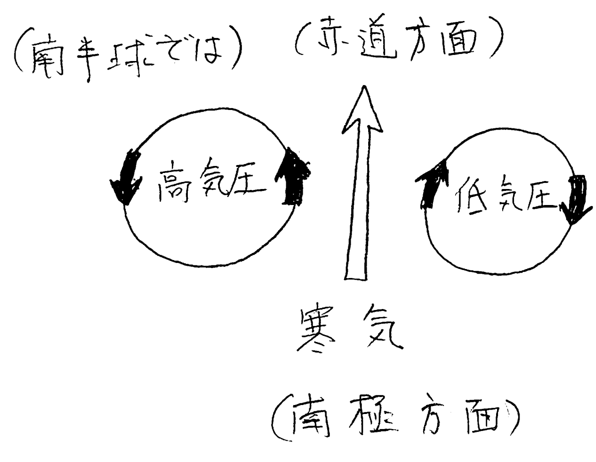
$\boxed{\text{ヒ}}$ ゼロ



$\boxed{\text{フ}}$ 右

$\boxed{\text{ヘ}}$ 西

$\boxed{\text{ホ}}$ 東



[2] この質点に働く水平面内の外力は糸の張力だけであり
糸の張力は水平面の孔の方向を向いた中心力であるから
この質点の持つ角運動量（鉛直方向の成分，基準点を孔にとる）は
保存される。

$$\therefore \quad m r_1 v_1 = m r_2 v_2$$

$$\therefore \quad v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1$$

$$W = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

（∵ 運動エネルギーの変化はなされた仕事に等しいから）

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{r_1}{r_2} v_1\right)^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1\right) v_1^2 \quad （答）$$

[3]

$$\begin{cases} m_1 a = -T_1 + m_1 g & （T_1 \text{は} m_1 \text{に働く糸の張力}） \\ m_2 a = T_2 - m_2 g & （T_2 \text{は} m_2 \quad 〃 \quad） \\ I \dot{\omega} = (T_1 - T_2) r \\ r \dot{\omega} = a \end{cases}$$

より

$$I \frac{a}{r} = (m_1 g - m_1 a - m_2 g - m_2 a) r$$

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}\right) a = (m_1 - m_2) g$$

$$\therefore \quad a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}} g \quad （答）$$

[4] 突かれた直後の速さを v, 重心のまわりの回転の角速度を ω とすると

$$\begin{cases} mv = F\Delta t & \Leftarrow \ \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \text{ を時間で積分} \\ I\omega = F\cdot(h-a)\Delta t & (I = \frac{2}{5}ma^2) \ \Leftarrow \ \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F} \text{ を時間で積分} \end{cases}$$

滑らず転がることより

$$v = a\omega$$

$$\therefore \frac{F\Delta t}{m} = a\frac{F(h-a)\Delta t}{I}$$

$$h = a + \frac{I}{ma} = a + \frac{2}{5}a = \frac{7}{5}a \text{ (答)}$$

なお、球なので中心(=重心)のまわりに回転しつつ水平方向に並進運動しても球は平面にめり込まない。もし球でなく直方体なら、回転により底面が平面にめり込もうとするので垂直抗力が撃力になり直方体は上向きにも並進運動するようになる.

[5] (1) $$m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}$$

(2) $$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad (1 \leqq i \leqq N,\ 1 \leqq j \leqq N)$$

(3) $$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}\right)$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i \text{ (答)} \quad \left(\because \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ij} \text{ より} \right.$$
$$\left. \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\vec{F}_{ji}+\vec{F}_{ij}}{2} = \vec{0} \right)$$

(4) $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\left(m_i\vec{v}_i\times\vec{v}_i + m_i\vec{r}_i\times\frac{d\vec{v}_i}{dt}\right)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times\left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji}\right)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_i \text{ (答)} \quad \left(\because \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji} = \sum_{j=1}^{N}\vec{r}_j\times\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{ij} \text{ より} \right.$$
$$\left. \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_{ji} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i-\vec{r}_j)\times\vec{F}_{ji} = \vec{0} \right)$$

(5) $$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}\right)}{M} = \frac{\frac{d\vec{P}}{dt}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i}{M}$$

$$\therefore M\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i$$