

力学 II

配布資料 (担当教員 田嶋直樹)

講義ノートの補足部分 (板書写しの作業量を適量に抑えるため、一部を印刷して渡します)

D1	極座標での楕円の方程式の導出	p. 1
D2	極座標での楕円の方程式をデカルト座標で表すこと	p. 1
D3	ケプラー運動の角運動量 L を軌道の形状パラメータで表すこと	p. 2
D4	ケプラー運動のエネルギー E を軌道の形状パラメータで表すこと	p. 2
D5	ケプラー運動の周期 T を軌道の形状パラメータで表すこと	p. 3
D6	方程式 $r = (1 + \epsilon \cos \theta)^{-1}$ の表す曲線 (円・楕円・放物線・双曲線)	p. 4
D7	内力の和がゼロになることの証明	p. 5
D8	一定速度でロープを引き上げる問題のエネルギー的考察	p. 5
D9	重心の運動方程式の意味すること	p. 6
D10	ボートの上を歩く問題の解法 I (運動量保存則による高校生的解法を厳密化)	p. 6
D11	2 体運動の重心運動と相対運動への分離の意味すること	p. 6
D12	内力が系の全角運動量を変化させないことの証明	p. 7
D13	(地球 + 月) 系における全角運動量の保存	p. 7
D14	三脚テーブルの荷重分配	p. 8
D15	加速度の接線成分と法線成分	p. 9
D16	一般の (非等速の) 円運動の a_t と a_n	p. 9
D17	定滑車と 2 個の錘の系に対応する並進運動のみを行う系	p. 10
D18	車の前輪・後輪にかかる抗力を求める問題で、重心以外の点を力のモーメントの基準点にとる場合の注意点	p. 10
D19	斜面を滑らずに転がる球の運動に関する追加の問題	p. 11
D20	歳差運動についてのコメント	p. 12
D21	$\frac{dA}{dt} = \omega \times A$ の導出	p. 12
D22	$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{d}{dt} + \omega \times\right) A$ の導出	p. 12
D23	一定角速度で回転する系で見た運動方程式の導出	p. 13
D24	地球の自転によるコリオリ力が水平面内の運動に及ぼす影響	p. 13
D25	コリオリ力と遠心力の相補性	p. 14

発展的テーマ (授業で書き写したノートと併読しなくても意味の通る内容の、長目の説明です)

- Kepler motion (ケプラー運動) p. 15 ~ 18
- 質点系の力学についての補足説明 p. 19 ~ 20
- 体積積分による慣性モーメントの計算の具体例 p. 21 ~ 22

D1 極座標での楕円の方程式の導出:

$$r + r' = 2r_0 \dots\dots ①$$

$$r'^2 = r^2 + (2d)^2 - 2 \cdot r \cdot 2d \cdot \frac{\cos(\pi - \theta)}{1} \dots\dots ② \quad (\because \text{余弦定理})$$

$$\text{①より、} \quad r' = 2r_0 - r$$

$$r'^2 = (2r_0 - r)^2 \dots\dots ③$$

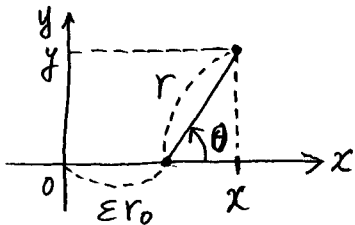
②と③の右辺同士は等しいので

$$r^2 + 4d^2 + 4rd \cos \theta = 4r_0^2 - 4r_0 r + r^2$$

$$r(r_0 + d \cos \theta) = r_0^2 - d^2$$

$$\therefore r = \frac{r_0^2 - d^2}{r_0 + d \cos \theta}, \quad d = \epsilon r_0 \text{ を代入して } r = \frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \theta} r_0$$

D2 極座標での楕円の方程式をデカルト座標で表せ:



$$\begin{cases} x = \epsilon r_0 + r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(x - \epsilon r_0)^2 + y^2} \\ \cos \theta = \frac{x - \epsilon r_0}{r} \end{cases}$$

上記の変数変換により、 r, θ で表された楕円の方程式を x, y で表す。

$$r = \frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \theta} r_0$$

$$r + r \epsilon \cos \theta = (1 - \epsilon^2) r_0$$

$$r = (1 - \epsilon^2) r_0 - \epsilon r \cos \theta$$

$$\sqrt{(x - \epsilon r_0)^2 + y^2} = (1 - \epsilon^2) r_0 - \epsilon (x - \epsilon r_0)$$

$$(x - \epsilon r_0)^2 + y^2 = (1 - \epsilon^2)^2 r_0^2 - 2(1 - \epsilon^2) r_0 \epsilon (x - \epsilon r_0) + \epsilon^2 (x - \epsilon r_0)^2$$

$$(1 - \epsilon^2)(x - \epsilon r_0)^2 + y^2 = (1 - \epsilon^2)^2 r_0^2 - 2(1 - \epsilon^2) r_0 \epsilon (x - \epsilon r_0)$$

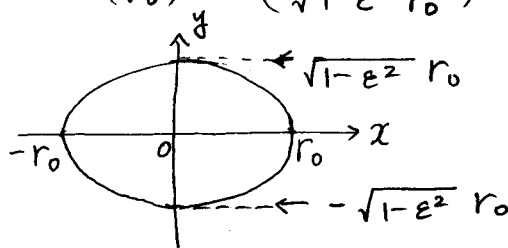
$$(x - \epsilon r_0)^2 + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} = (1 - \epsilon^2) r_0^2 - 2 r_0 \epsilon (x - \epsilon r_0)$$

$$x^2 - 2x \epsilon r_0 + \epsilon^2 r_0^2 + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} = r_0^2 - \epsilon^2 r_0^2 - 2 r_0 \epsilon x + 2 \epsilon^2 r_0^2 \quad (\text{続く})$$

D2 (続き)

$$x^2 + \frac{y^2}{1-\epsilon^2} = r_0^2$$

$$\therefore \left(\frac{x}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{1-\epsilon^2} r_0}\right)^2 = 1$$



D3

角運動量 L を軌道の形状パラメータで表すこと:

$$r = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \theta} r_0$$

(運動方程式の解) (楕円の方程式)

$$\therefore \theta_0 = 0, \quad \frac{L^2}{GMm^2} = (1 - \epsilon^2) r_0$$

$$\therefore L = \sqrt{GMm^2 r_0 (1 - \epsilon^2)}$$

D4

エネルギーを軌道の形状パラメータで表すこと:

太陽からの距離が最小になる点を近日点と呼ぶ。

近日点では $\theta = \theta_0$, $r = r_c \equiv r_0(1 - \epsilon)$ である。近日点での速さ v_c は、 $m r^2 \dot{\theta} = L$ および近日点で $\dot{r} = 0$ より、

$$v_c = r_c \dot{\theta}_c = \frac{L}{m r_c} = \frac{\sqrt{GMm^2 r_0 (1 - \epsilon^2)}}{m r_0 (1 - \epsilon)} = \sqrt{\frac{GM(1 + \epsilon)}{r_0(1 - \epsilon)}}$$

エネルギー E は、

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m v_c^2 - \frac{GMm}{r_c} \\ &= \frac{1}{2} m \frac{GM(1 + \epsilon)}{r_0(1 - \epsilon)} - \frac{GMm}{r_0(1 - \epsilon)} = \frac{GMm}{2r_0} \frac{1 + \epsilon - 2}{1 - \epsilon} \\ &= -\frac{GMm}{2r_0} \end{aligned}$$

(注) エネルギーは保存するので、近日点以外でもこの値をとる。

理解を深めるため 遠日点 ($\theta = \theta_0 + \pi$, $r = r_s = r_0(1 + \epsilon)$) での E を計算して、同じ値になることを確かめてみる。

D5 ケプラー運動の周期

解法その1 : 目標を目指して一直線に進む方法 (不定積分を求めるのが難しい)

$$t = t_0 + \frac{L^3}{G^2 M^2 m^3} \int_0^{\theta - \theta_0} \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \quad (\text{P.16の(24)式})$$

よ、軌道を一周するのに要する時間、即ち周期 T は

$$T = \frac{L^3}{G^2 M^2 m^3} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} \quad (\text{定石通}). t = \tan \frac{\theta}{2} \text{ とおいて置換積分すると}$$

(下記の式になる.)

$$= \frac{L^3}{G^2 M^2 m^3} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left[\frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{\varepsilon \sin \theta}{1 + \varepsilon \cos \theta} \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$= \frac{L^3}{G^2 M^2 m^3} \frac{1}{1 - \varepsilon^2} \left(\frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \pi - 0 \right) \leftarrow$$

$$= \frac{2\pi L^3}{G^2 M^2 m^3 (1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$$


$$L = \sqrt{GMm^2 r_0 (1 - \varepsilon^2)} \text{ を代入すると}$$

$$T = \frac{2\pi r_0^{3/2}}{\sqrt{GM}} \text{ を得る.}$$

$\tan \frac{\theta}{2}$ は $\theta = \pi$ で不連続なので
2区間 $[0, \pi)$, $(\pi, 2\pi]$ にわけて
評価する。
 $\left[\arctan \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \tan \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi} + \left[\arctan \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \tan \frac{\theta}{2} \right]_{\pi}^{2\pi}$
 $= \arctan(+\infty) - \arctan 0 + \arctan(+\infty) - \arctan 0 = \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$

解法その2 : 軌道の囲む面積を、面積速度で割るとで求める利便な方法

軌道の囲む楕円の面積を S とすると、楕円の面積の公式により、

$$S = \pi \cdot (\text{長半径}) \cdot (\text{短半径}) = \pi \cdot r_0 \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2} r_0 = \pi \sqrt{1 - \varepsilon^2} r_0^2.$$


一方、微分積分IIで学ぶ極座標表示曲線 $r = r(\theta)$ の囲む図形の面積の一般式によります。

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta.$$

積分変数を時刻 t に変更すると $S = \frac{1}{2} \int_0^T r^2 \dot{\theta} dt.$

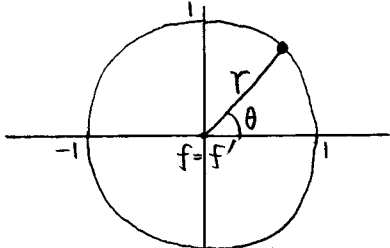
$$L = m r^2 \dot{\theta} \text{ を使えば. } S = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{L}{m} dt = \frac{L}{2m} T \quad (\because L \text{ は定数})$$

$$\therefore \frac{L}{2m} T = \pi \sqrt{1 - \varepsilon^2} r_0^2.$$

$$\therefore T = \frac{2\pi m \sqrt{1 - \varepsilon^2} r_0^2}{L} = \frac{2\pi m \sqrt{1 - \varepsilon^2} r_0^2}{\sqrt{GMm^2 r_0 (1 - \varepsilon^2)}} = \frac{2\pi r_0^{3/2}}{\sqrt{GM}}.$$

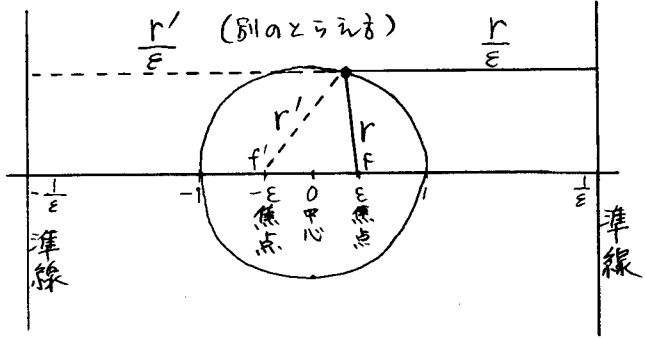
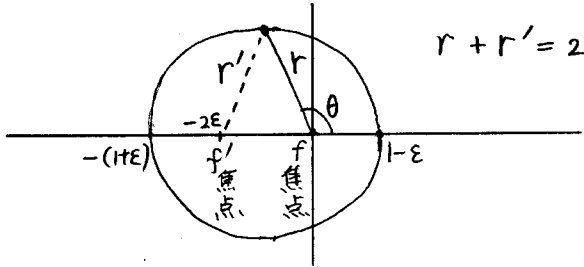
D6 方程式 $r = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \theta}$ の表す曲線

1. $\epsilon = 0$: 円 (circle)



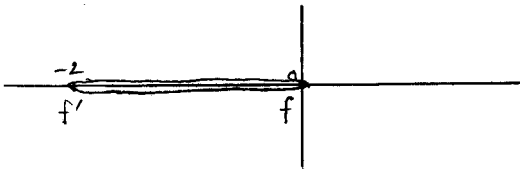
$1 - \epsilon^2 (> 0)$ 倍に拡大して図示すると
 $(r = \frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \theta})$

2. $0 < \epsilon < 1$: 楕円 (ellipse)



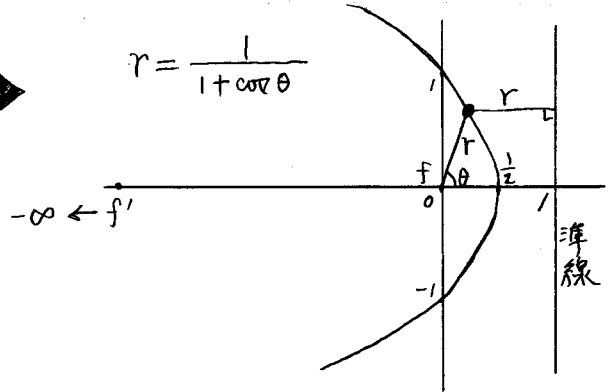
3. $\epsilon = 1$: 放物線 (parabola)

$$r = \frac{1 - \epsilon^2}{1 + \epsilon \cos \theta} = \begin{cases} 0 & (\theta \neq \pi) \\ 1 + \epsilon = 2 & (\theta = \pi) \end{cases}$$



$1 - \epsilon^2$ 倍しないので楕円と:

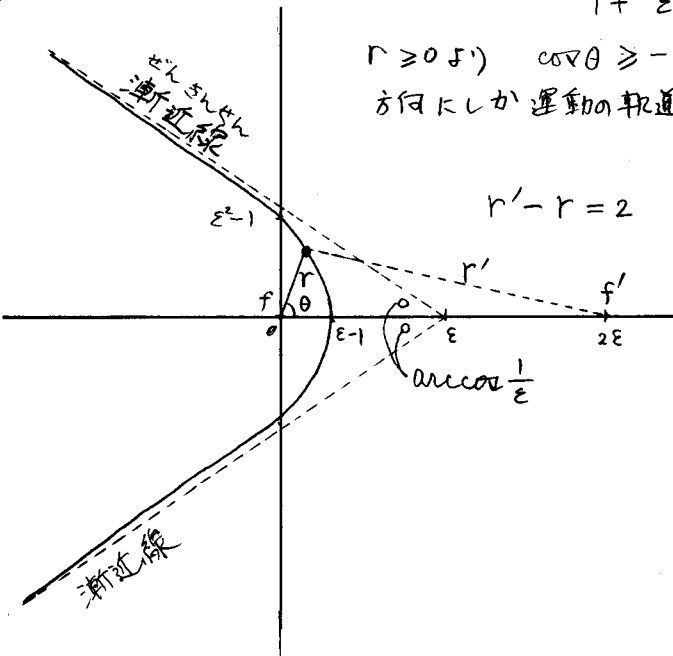
$$r = \frac{1}{1 + \cos \theta}$$



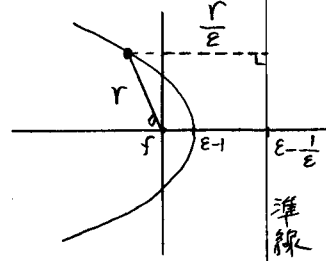
4. $\epsilon > 1$: 双曲線 (hyperbola)

$$\epsilon^2 - 1 (> 0) \text{ 倍して楕円と: } r = \frac{\epsilon^2 - 1}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

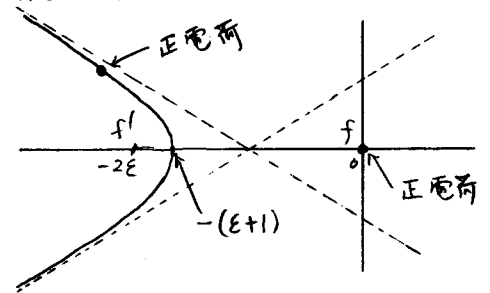
$r \geq 0$ より $\cos \theta \geq -\frac{1}{\epsilon}$ が必要
 方向にしか運動の軌道は存在しない。



(別にとりえ方)



(補足) $r = -\frac{(\epsilon^2 - 1)}{1 + \epsilon \cos \theta}$ は斥力による
 散乱の軌道を表す。



力学II 講義1-1の補足 <5>

07 内力の和がゼロになることの説明:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N F_{ji} \quad (= \sum_{i \neq j} F_{ji} \text{ 等と略記されることが多い}) \text{ は}$$

右の表に現れる F_{ji} を
全て加え合わせたものである。

作用・反作用の法則により

$$F_{ij} + F_{ji} = 0 \quad (i \neq j)$$

が成り立っているので

$$\sum_{i \neq j} F_{ji} = (F_{12} + F_{21}) + (F_{31} + F_{13})$$

$$+ (F_{32} + F_{23}) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0 \quad \text{となる。}$$

$i \backslash j$	1	2	3	...	N
1	X	F_{12}	F_{13}	...	F_{1N}
2	F_{21}	X	F_{23}	...	F_{2N}
3	F_{31}	F_{32}	X	...	F_{3N}
⋮	⋮	⋮	⋮	X	⋮
N	F_{N1}	F_{N2}	F_{N3}	...	X

08 一定速度でロープを引き上げる問題の、エネルギー的考察:

問1: ロープを引き上げる手のなす仕事率 W を求めよ。

(仕事率 = 単位時間あたりの仕事)

問2: ロープの力学的エネルギー E の増加率 $\frac{dE}{dt}$ を求めよ。

問3: 現実の世界ではエネルギーは保存する。実際にロープを引き上げるとき、問1, 問2の答の差はどこへ行くか?

答1. $W = Fv = \rho x g v + \rho v^3$

答2. $E = \rho x \cdot \frac{1}{2} x \cdot g + \frac{1}{2} \rho x \cdot v^2$
 $= \frac{1}{2} \rho g x^2 + \frac{1}{2} \rho v^2 x$

$$\frac{dE}{dt} = \rho g x v + \frac{1}{2} \rho v^3 \quad (\text{注: } \rho, g, v \text{ は一定, } \frac{dx}{dt} = v)$$

答3. $W - \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \rho v^3$ は、ロープの立ち上がる部分でのロープの構成部分間の非弾性衝突で熱エネルギーになると考えられる。

D9 重心の運動方程式の意味すること:

① 重心は、全質量がその点に集まり、全外力がその点に働くとした場合と同じ運動をする。

② 内力は重心運動に影響を与えない。

③ 外力が働かなければ、重心は等速直線運動をする。
ある時刻に静止していれば、外力が働かない限り重心は常に静止したままである。

D10 ボート上を歩く問題の解法Ⅰ:

運動量保存則を利用する。(高校生の解き方を厳密化したもの)

右向きを正の方向として。

$$m v(t) + M V(t) = m \underbrace{v(t_0)}_0 + M \underbrace{V(t_0)}_0 = 0$$

$$\therefore v(t) = -\frac{M}{m} V(t)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\{v(t) - V(t)\}}_{\text{相対速度}} dt = l$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ -\frac{M}{m} V(t) - V(t) \right\} dt = l$$

$$-\left(\frac{M}{m} + 1\right) \int_{t_0}^{t_1} V(t) dt = l$$

$$d = \int_{t_0}^{t_1} V(t) dt = -\frac{1}{1 + \frac{M}{m}} l = -\frac{m}{M+m} l \quad (\text{答})$$

D11 2体運動の重心運動と相対運動への分離について:

力学変数が \mathbb{R}_1 と \mathbb{R}_2 のときは、運動方程式①と②には \mathbb{R}_1 と \mathbb{R}_2 が混在していた。力学変数を \mathbb{R}_G と \mathbb{R} に変換すると、

運動方程式は \mathbb{R}_G だけを含むもの③と \mathbb{R} だけを含むもの④に分離した。③は容易に解が求まる。残るは④を解くだけである。

④は一体の運動方程式と同じ形をしている。①+②の2体問題が、④の一体問題に還元されたのである。

D12

内力が 全角運動量を変化させないこと:

r_i : 質点 i の位置ベクトル.

F_{ji} : 質点 j が質点 i に及ぶ力.

・ 自分自身に力を及ぼすことはできないので $F_{ii} = 0$.

・ 作用・反作用の法則により $F_{ij} = -F_{ji}$.

$Z = \sum_{i=1}^N r_i \times \left(\sum_{j=1}^N F_{ji} \right)$ としたとき $Z = 0$ を示せばよい.

$$Z = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N r_i \times F_{ji} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N r_i \times (-F_{ij})$$

$$= - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N r_j \times F_{ji} \quad (\text{i を j, j を i に置きかえた。})$$

$$Z = \frac{1}{2} (Z + Z) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N r_i \times F_{ji} - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N r_j \times F_{ji} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (r_i - r_j) \times F_{ji}$$

質点間に働く力が中心力であるとするれば。即ち、 $r_i - r_j \parallel F_{ji}$ なら

$$(r_i - r_j) \times F_{ji} = 0$$

$$\therefore Z = 0$$

D13

(地球 + 月) 系における全角運動量の保存.

(全角運動量) = (地球の自転の角運動量) + (月の公転の角運動量) + (月の自転の...)

(相対運動の) ↑
小さい

$$L = I \Omega + m r^2 \omega \dots \textcircled{1}$$

↑ 地球の自転の角速度

↑ 月の公転の角速度

↑ 月の軌道半径

↑ 月の質量 (換算質量)

↑ 比例定数 (慣性モーメントと語り)

公転は円運動として $m r \omega^2 = \frac{k}{r^2} \dots \textcircled{2} \quad (k = G M m)$

↑ 月の質量

↑ 地球の質量

↑ 重力定数

(G) <

力学Ⅱ 講義1-1の補足 <8>

D13 (つぎ)

$$\textcircled{2} \text{式より } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} r^{-3/2} \dots \textcircled{3} \quad \therefore \frac{d\omega}{dr} < 0.$$

$$\textcircled{2} \text{式を}\textcircled{1} \text{式に代入すると, } \Omega = \frac{L}{I} - \frac{\sqrt{km}}{I} r^{1/2} \dots \textcircled{4} \quad \therefore \frac{d\Omega}{dr} < 0.$$

観測によると $\frac{d\Omega}{dt} < 0$ (地球の自転は減速している).

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\Omega} \cdot \frac{d\Omega}{dt} > 0. \quad \text{即ち、月は遠ざかりつつある.}$$

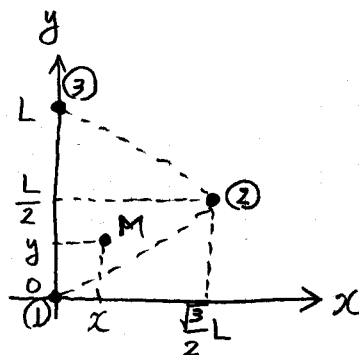
$\frac{dr}{d\Omega}$ $\frac{d\Omega}{dt}$
 負 負

- ・ 時間がたつと、 Ω, ω は減少し、 r は増加する。
- ・ 昔は現在より、 Ω, ω は大きく、 r は小さかった。

D14 三脚テーブルの荷重分配。

問: 1辺の長さが L の正三角形の頂点に柱(脚)のあるテーブル上に質量 M の物体を置くとき、各柱にかかる力を求めよ。天板の重さは無視せよ。

答: 柱①, ②, ③ および物体 M の座標を右図のよりにとる。柱①は $+z$ 方向に F_1 の力を、物体 M は $-z$ 方向に Mg の力をテーブルの天板に加える。



$$\text{力のつりあいより } F_1 + F_2 + F_3 - Mg = 0 \dots \textcircled{1}$$

x 軸方向の力のモーメントのつりあいより

$$0 \cdot F_1 + \frac{L}{2} \cdot F_2 + L \cdot F_3 + y \cdot (-Mg) = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} F_2 + F_3 = \frac{y}{L} Mg \dots \textcircled{2}$$

y 軸方向の力のモーメントのつりあいより

$$0 \cdot F_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} L \cdot F_2 + 0 \cdot F_3 + x \cdot (-Mg) = 0$$

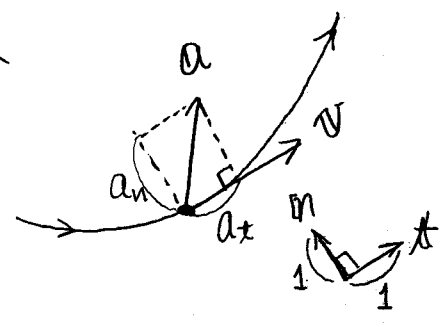
$$\therefore F_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{x}{L} Mg \dots \textcircled{3}$$

(1)~(3)より

$$\begin{cases} F_1 = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{3}L} - \frac{y}{L}\right) Mg \\ F_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{x}{L} Mg \\ F_3 = \left(\frac{y}{L} - \frac{x}{\sqrt{3}L}\right) Mg \end{cases}$$

D15 加速度の接線成分と法線成分

位置 $r = r(t)$ (t :時刻)
 速度 $v = \frac{dr}{dt}$
 加速度 $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$

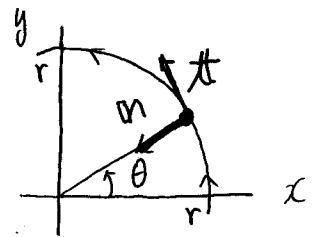


a_t : a の v に平行な成分。加速度の接線成分という。
 a_n : a の v に垂直な成分。加速度の法線成分という。

$\hat{t} = \frac{v}{|v|}$ (接線単位ベクトル) を使って、 $a_t = a \cdot \hat{t}$ として計算できる。また、 $a_n = a - a_t \hat{t}$, $a_n = |a_n|$ として a_n は計算できる。 $\hat{n} = \frac{n}{a_n}$ は主法線単位ベクトルと呼ばれる。
 $a = a_t \hat{t} + a_n \hat{n}$ と書き表せる。

D16 一般の(非等速の)円運動の a_t と a_n

$r = r(\cos\theta, \sin\theta)$, $r > 0, \dot{r} = 0, \dot{\theta} = \omega > 0, \ddot{\omega} \neq 0$

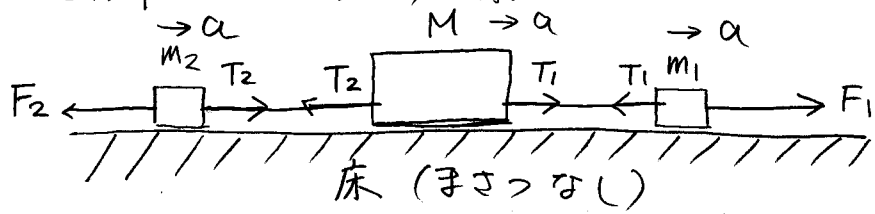


$\hat{t} = (-\sin\theta, \cos\theta)$
 $\hat{n} = (-\cos\theta, -\sin\theta)$

$v = \dot{r} = r(-\sin\theta, \cos\theta)\dot{\theta} = r\omega \hat{t}$
 $a = \dot{v} = r\ddot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta) + r\dot{\theta}^2(-\cos\theta, -\sin\theta)$
 $= r\dot{\omega} \hat{t} + r\omega^2 \hat{n}$

$\therefore \begin{cases} a_t = r\dot{\omega} & \text{① } \dot{\omega} = 0 \text{ (}\omega \text{が一定) のとき } a_t = 0 \\ a_n = r\omega^2 & \text{② } \dot{\omega} \text{に依存しないので、}\omega \text{が一定のときと同じ表式。} \end{cases}$
 ↑ 教科書では a_r と書いている。

D17 定滑車と2つのおもりの糸に対応する並進運動のみを行う系



運動方程式

$$\begin{cases} m_1 a = -T_1 + F_1 \\ M a = T_1 - T_2 \\ m_2 a = T_2 - F_2 \end{cases}$$

$$M a = (F_1 - m_1 a) - (m_2 a + F_2)$$

$$\therefore a = \frac{F_1 - F_2}{m_1 + m_2 + M}$$

$F_1 \rightarrow m_1 g, F_2 \rightarrow m_2 g, M \rightarrow \frac{I}{R^2}$ と置きかえると滑車の系の答になる。

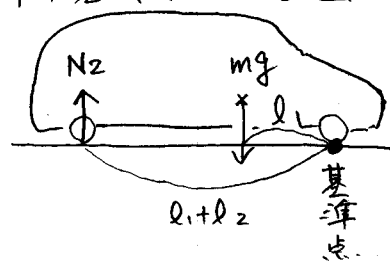
D18 車の前輪-後輪にかかる抗力を求めるとき、重心以外の点、力のモーメントの基準点にとるときの注意点。

例えば、前輪の接地点を力のモーメントの基準点にとると

力のモーメントのつりあい条件は、

$$m g l_1 = N_2 (l_1 + l_2) \text{ (誤り)}$$

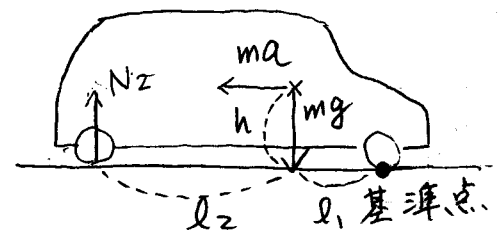
$$\therefore N_2 = \frac{l_1}{l_1 + l_2} m g \text{ (誤り)}$$



正しい答を得るには、慣性力 $-ma$ が車の重心に働くとせよ。

$$m g l_1 + m a h = N_2 (l_1 + l_2) \text{ (正しい)}$$

$$\therefore N_2 = \frac{m g l_1 + m a h}{l_1 + l_2} \text{ (正答)}$$



019 斜面を滑らずに転がる球の運動に関する追加の問題

★問. 初期条件「 $t=0$ で $x=\dot{x}=0$ 」を満たす運動方程式の解 $x(t)$ を書き下せ.

答.
$$\ddot{x} = \frac{M}{M + \frac{I}{a^2}} g \sin \theta \quad (\text{運動方程式}).$$

右辺が定数なので解は自由落下の解と同じ形である.

$$x = \frac{1}{2} \frac{M}{M + \frac{I}{a^2}} g (\sin \theta) t^2 \quad (\text{答})$$

計算を詳しく書けば:

$$\ddot{x} = \alpha \quad (\text{定数}) \text{ なら}$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0) + \int_0^t \underbrace{\ddot{x}(t')}_{\alpha} dt' = \dot{x}(0) + \alpha t$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(t) dt = x(0) + \int_0^t (\dot{x}(0) + \alpha t') dt'$$

$$= x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0 \text{ より } x(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2.$$

★問. 最大静止摩擦係数を μ とするとき、球が滑らずに転がるための θ の条件を求めよ.

答. $F_{\perp} = Mg \cos \theta,$

$$F = \frac{I^2}{a} \ddot{x} = \frac{I}{I + Ma^2} Mg \sin \theta$$

滑らないための条件は $F \leq \mu F_{\perp}$

$$\therefore \frac{I}{I + Ma^2} Mg \sin \theta \leq \mu Mg \cos \theta \quad \therefore \tan \theta \leq \mu \cdot \left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right) \quad (\text{答})$$

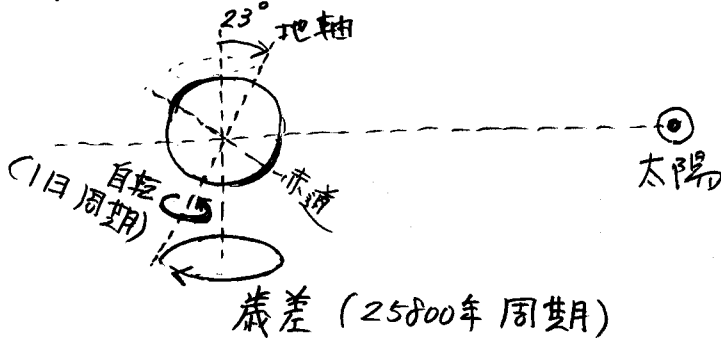
★問. 運動エネルギー E_K および重力の位置エネルギー E_G を時刻 t の関数として表せ。 E_G は $t=0$ の位置でゼロと定義せよ。
また、力学的エネルギー $E = E_K + E_G$ が t に依存しないことを確かめよ。(滑りが無い \rightarrow 摩擦力は仕事をしない $\rightarrow E$ は保存される).

答.
$$E_K = \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{(Mga \sin \theta t)^2}{2(Ma^2 + I)}$$

$$E_G = Mg(-x \sin \theta) = -(E_K \text{ と同じ式}), \quad E = E_K + E_G = 0.$$

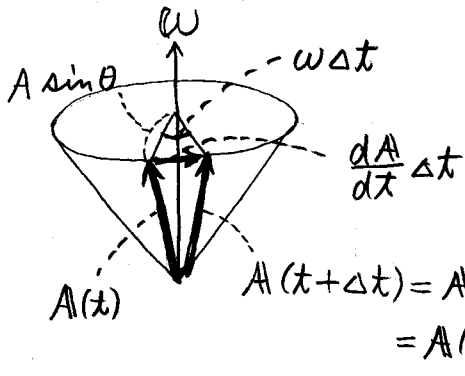
D20 歳差運動についてのコメント

1. コマが速く回るほど (ω が大きいほど), 歳差運動はゆくりになる (Ω が小).
2. コマの場合のように, 外力が回転軸を倒れようとするときは, 歳差運動とコマの回転の回る向きは同じである.
3. 地軸 (地球の自転軸) の歳差運動は, 太陽による潮汐力が地軸を立てようとする (公転面に垂直にしようとする) ためにおきる. このように, 外力が回転軸を立てる方に働く場合は ($N > 0$ のときは) 歳差運動は自転とは逆の向きに回る.



D21 $\frac{dA}{dt} = \omega \times A$ の導出.

角速度 ω で回転する座標系で見ると時間変化しないベクトル A の, 静止座標系で見るとの時間変化率 $\frac{dA}{dt}$ を求めたい.



左図より

$$\left| \frac{dA}{dt} \right| \Delta t = A \sin \theta \omega \Delta t = |\omega \times A| \Delta t$$

方向も考えて

$$\frac{dA}{dt} = \omega \times A \quad \text{となる.}$$

D22 $\frac{dA}{dt} = \left(\frac{d}{dt} + \omega \times \right) A$ の導出.

角速度 ω で回転する座標系の座標軸を x, y, z 軸とし, それらの軸方向の単位ベクトルを e_x, e_y, e_z とする.

$$A = A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z \quad \text{と表したとき, 微分公式により,}$$

$$\dot{A} = \dot{A}_x e_x + \dot{A}_y e_y + \dot{A}_z e_z + A_x \dot{e}_x + A_y \dot{e}_y + A_z \dot{e}_z$$

(つづく)

②22 (つづき) 右辺の最初から3項は、 ω で回転する系で見たときの A の時間変化率である。仮に、これを $\frac{d^*}{dt} A$ と書き表すことにする。

右辺第4~6項は、座標系が回転していることによる変化である。

$$\dot{e}_3 \text{ は } \omega \text{ で回転しているのだから } \dot{e}_3 = \omega \times e_3 \text{ である。}$$

$$\text{同様に、 } \dot{e}_\eta = \omega \times e_\eta, \quad \dot{e}_\xi = \omega \times e_\xi \text{ である。}$$

$$\begin{aligned} \therefore \dot{A} &= \frac{d^*}{dt} A + A_\xi \omega \times e_\xi + A_\eta \omega \times e_\eta + A_\zeta \omega \times e_\zeta \\ &= \frac{d^*}{dt} A + \omega \times (A_\xi e_\xi + A_\eta e_\eta + A_\zeta e_\zeta) \\ &= \left(\frac{d^*}{dt} + \omega \times \right) A \end{aligned}$$

②23 一定角速度で回転する系で見た運動方程式の導出。

$$\dot{r} = \frac{d^*}{dt} r + \omega \times r$$

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d^*}{dt} \left(\frac{d^*}{dt} r + \omega \times r \right) + \omega \times \left(\frac{d^*}{dt} r + \omega \times r \right) \\ &= \frac{d^{2*}}{dt^2} r + 2\omega \times \frac{d^*}{dt} r + \omega \times (\omega \times r) \end{aligned}$$

↓ $\frac{d^*}{dt} \omega = 0$ とする。
(一定角速度の場合)

∴ $a = \frac{d^{2*}}{dt^2} r$ と $v = \frac{d^*}{dt} r$ は ω で回転する系で見た物体の加速度と速度である。

∴ したがって運動方程式 $m \ddot{r} = F$ は

$$m a + 2m \omega \times v + m \omega \times (\omega \times r) = F$$

と書き直される。

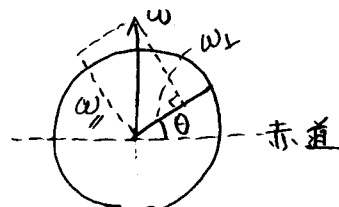
$$\therefore m a = F + \underbrace{2m v \times \omega}_{-2m \omega \times v} - m \omega \times (\omega \times r)$$

②24 地球の自転によるコリオリ力が水平面内の運動に及ぼす影響。

ω を 緯度 θ での水平面内の成分 ω_{\parallel} と 鉛直方向の成分 ω_{\perp} とに分解する。

$$\omega = \omega_{\parallel} + \omega_{\perp}$$

$$\begin{cases} \omega_{\parallel} = \omega \cos \theta \\ \omega_{\perp} = \omega \sin \theta \end{cases}$$



$$F_{\text{Cor}} = 2m v \times \omega = 2m v \times \omega_{\parallel} + 2m v \times \omega_{\perp} \quad (\text{つづき})$$

物体の速度 v は水平面内 (即ち $v \cdot \omega_{\perp} = 0$) とすると

力学IIの講義1-1の補足<14>

D24

(向き) $F_{cor}^{\perp} = 2m \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_{\parallel}$: 鉛直方向
 $F_{cor}^{\parallel} = 2m \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}_{\perp}$: 水平面内 (北(南)半球では \mathbf{v} の右(左)90°方向)

∴ 水平面内の運動に働くコリオリ力の水平方向の成分は

$$F_{cor}^{\parallel} = 2m v \omega_{\perp} = m \cdot 2\omega v \sin \theta$$

↑ 緯度

D25 コリオリ力と遠心力の相補性

向心力 $T = mr\omega^2$ を受けて半径 r , 角速度 ω の等速円運動をしている質量 m の物体を、角速度 ω_0 で回転している座標系で見ると、

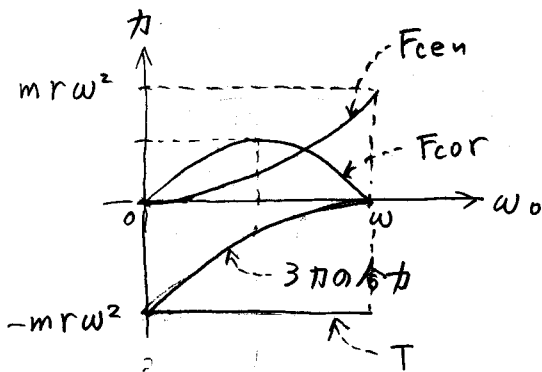
物体は角速度 $\omega - \omega_0$ 、速さ $v = r(\omega - \omega_0)$ で円運動をしている

物体に働く力は $T (= mr\omega^2)$ に加えて、

コリオリ力: $F_{cor} = 2m\omega_0 v = 2m\omega_0(\omega - \omega_0)r$

遠心力: $F_{cen} = mr\omega_0^2$

である。方向は ($\omega > \omega_0$ とし) 共に中心から遠ざかる方向である。



F_{cor} と F_{cen} は観測者によって (ω_0 によって) 変化する。両方の項を足しあわせてこそ、運動を正しく記述できるのである。

例えば 3力の和をゼロなくとてはじめて、

$$\begin{aligned} -T + F_{cor} + F_{cen} &= -mr\omega^2 + 2mr\omega_0(\omega - \omega_0) + mr\omega_0^2 \\ &= -mr(\omega - \omega_0)^2 \end{aligned}$$

となり、角速度 $\omega - \omega_0$ の円運動に必要な向心力の大きさに正しく一致するのである。

Kepler motion

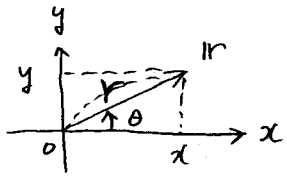
下記の運動方程式の解を求めたい (r を時刻 t の関数として表したい)。

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{--- (1)} \quad (\text{但し } r = |\mathbf{r}|)$$

以下では位置を $\mathbf{r} = (x, y)$, 速度を $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y})$, 加速度を $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y})$ と書く。

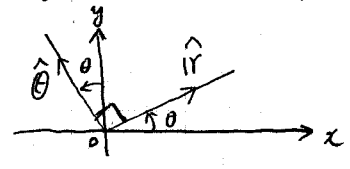
2次元極座標 r, θ を導入する。

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & \text{--- (2)} \\ y = r \sin \theta & \text{--- (3)} \end{cases}$$



x 軸, y 軸をそれぞれ角度 θ だけ回転させた方向の単位ベクトルを $\hat{r}, \hat{\theta}$ とすると

$$\begin{cases} \hat{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} = (\cos \theta, \sin \theta) & \text{--- (4)} \\ \hat{\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta) & \text{--- (5)} \end{cases}$$



である。 \mathbf{v} を 2 方向 $\hat{r}, \hat{\theta}$ の成分に分解する、即ち

$$\mathbf{v} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}, \quad v_r = \mathbf{v} \cdot \hat{r}, \quad v_\theta = \mathbf{v} \cdot \hat{\theta} \quad \text{--- (6)}$$

の形に表せば、後述の **#1** に示した計算により下の表式が得られる。

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r \dot{\theta} \quad \text{--- (7)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{⑦式は、さしあたりは使わ} \\ \text{ない。後で解析力学に} \\ \text{対するときに使う} \end{array} \right)$$

同様に \mathbf{a} を分解する、即ち

$$\mathbf{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta}, \quad a_r = \mathbf{a} \cdot \hat{r}, \quad a_\theta = \mathbf{a} \cdot \hat{\theta} \quad \text{--- (8)}$$

の形に表せば、後述の **#2** に示した計算により下の表式が得られる。

$$a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \quad \text{--- (9)}, \quad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \quad \text{--- (10)}$$

\mathbf{F} は \hat{r} 方向の成分しか持たないのぞ。

$$\mathbf{F} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta}, \quad F_r = \mathbf{F} \cdot \hat{r}, \quad F_\theta = \mathbf{F} \cdot \hat{\theta} \quad \text{--- (11)}$$

とかくと、下の表式を直ちに得る。

$$F_r = -\frac{GMm}{r^2} \quad \text{--- (12)}, \quad F_\theta = 0 \quad \text{--- (13)}$$

運動方程式 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ (①式と同式) の両辺を \hat{r} および $\hat{\theta}$ との内積をとると

[\hat{r} との内積]
 $m \mathbf{a} \cdot \hat{r} = \mathbf{F} \cdot \hat{r}$

[$\hat{\theta}$ との内積]
 $m \mathbf{a} \cdot \hat{\theta} = \mathbf{F} \cdot \hat{\theta}$

$$\therefore m a_r = F_r \quad \text{--- (14)}$$

$$\therefore m a_\theta = F_\theta \quad \text{--- (15)}$$

④に⑨, ⑫を代入すると。

⑮に⑩, ⑬を代入すると。

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad \text{--- (16)}$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \quad \text{--- (17)}$$

が得られる。⑩, ⑰式が①を r, θ で表した結果である。

P.16 ⑩の右辺を変形して、下式を得る。

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \quad \text{--- (16)}$$

したがって ⑩式は下式に等しい。

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad \text{--- (17)}$$

したがって $r^2\dot{\theta}$ は定数 (時間変化しない量) である。これは ^{これに} 定数 m を掛けたものを L と書くことにする。これは角運動量を表す。

$$m r^2 \dot{\theta} = L \quad \text{--- (20)} \quad (\text{但し、} L \text{ は定数 (角運動量)})$$

②⑩より、 $\dot{\theta} = \frac{L}{m r^2}$ 、これを ⑩の右辺の $\dot{\theta}$ に代入して下式を得る

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad \text{--- (21)}$$

後述の 【例3】 の計算で導くように、②①の解は下式の形に表すことができる

$$r = \frac{\lambda}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)} \quad \text{--- (22)}$$

②②式で λ と θ_0 は定数であり、 λ は角運動量を用いて下記のように表せる。

$$\lambda = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \text{--- (23)}$$

②②式は r と θ の関係式であるので、運動の軌跡を表している。(楕円等である)。

微分方程式を解くとは r と θ を t の関数として表すことができるが、それは ②②式

の解として容易に求まる。($t = t_0$ のとき $\theta = \theta_0$ とする)

$$t = t_0 + \frac{L^3}{G^2 M^2 m^3} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \quad \text{--- (24)}$$

②④式右辺の積分は「微分積分Ⅱ」で学ぶやり方で求まる。

(http://serv.apphy.u-fukui.ac.jp/~tajima/cs/cs_calc_infdef.pdf に計算を詳しく記す)

$$t = t_0 + \frac{L^3}{G^2 M^2 m^3} \cdot \frac{1}{1 - \epsilon^2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}} \tan \frac{\theta - \theta_0}{2} \right) - \epsilon \frac{\sin(\theta - \theta_0)}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)} \right\} \quad \text{--- (25)}$$

を得る。②⑤式の逆関数が $\theta = \theta(t)$ を与える。

②②式に $\theta = \theta(t)$ を代入したものが、 $r = r(t)$ である。

【補足】 2年生で学ぶ解析力学では以下のようにして ②⑥、②⑦を導く。

$$\text{②⑥、②⑦式より } v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \therefore \text{ラグランジアンは } L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r}$$

$$\text{オイラー-ラグランジュ方程式は } \begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 & \Rightarrow \text{②⑥式が導かれる。} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 & \Rightarrow \text{②⑦式が導かれる。} \end{cases}$$

#1

$x(t) = r(t) \cos \theta(t)$ の両辺を t で微分する。

・積の微分公式 $\frac{d}{dt} \{f(t)g(t)\} = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$

・合成関数の微分公式 $\frac{d}{dt} \cos \theta(t) = \left(\frac{d}{d\theta} \cos \theta\right) \cdot \left(\frac{d}{dt} \theta(t)\right) = -\frac{d\theta}{dt} \sin \theta$

を用い、 $\frac{d}{dt} f(t) = \dot{f}$ と書く。

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta$$

同様に $y = r \sin \theta$ の両辺を t で微分すると。

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\underline{v_r} = \underline{v} \cdot \hat{r} = (\dot{x}, \dot{y}) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) = \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta$$

$$= \dot{r} \cos^2 \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta + \dot{r} \sin^2 \theta + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta$$

$$= \dot{r} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \dot{r}$$

$$\underline{v_\theta} = \underline{v} \cdot \hat{\theta} = (\dot{x}, \dot{y}) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) = -\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta$$

$$= -\dot{r} \cos \theta \sin \theta + r \dot{\theta} \sin^2 \theta + \dot{r} \sin \theta \cos \theta + r \dot{\theta} \cos^2 \theta$$

$$= r \dot{\theta} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r \dot{\theta}$$

#2

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt} \dot{x} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta)$$

$$= \left(\frac{d}{dt} \dot{r}\right) \cos \theta + \dot{r} \left(\frac{d}{dt} \cos \theta\right) - \left(\frac{d}{dt} r\right) \dot{\theta} \sin \theta - r \left(\frac{d}{dt} \dot{\theta}\right) \sin \theta - r \dot{\theta} \left(\frac{d}{dt} \sin \theta\right)$$

$$= \ddot{r} \cos \theta - \dot{r} \dot{\theta} \sin \theta - \dot{r} \dot{\theta} \sin \theta - r \ddot{\theta} \sin \theta - r \dot{\theta}^2 \cos \theta$$

$\underbrace{-\dot{r} \dot{\theta} \sin \theta - \dot{r} \dot{\theta} \sin \theta}_{= -2\dot{r} \dot{\theta} \sin \theta}$

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt} \dot{y} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta)$$

$$= \ddot{r} \sin \theta + \dot{r} \dot{\theta} \cos \theta + \dot{r} \dot{\theta} \cos \theta + r \ddot{\theta} \cos \theta - r \dot{\theta}^2 \sin \theta$$

$\underbrace{\dot{r} \dot{\theta} \cos \theta + \dot{r} \dot{\theta} \cos \theta}_{= 2\dot{r} \dot{\theta} \cos \theta}$

$$\underline{a_r} = \underline{a} \cdot \hat{r} = (\ddot{x}, \ddot{y}) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) = \ddot{x} \cos \theta + \ddot{y} \sin \theta$$

$$= \ddot{r} \cos^2 \theta - 2\dot{r} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta - r \ddot{\theta} \sin \theta \cos \theta - r \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta$$

$$+ \ddot{r} \sin^2 \theta + 2\dot{r} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta$$

$$+ r \ddot{\theta} \cos \theta \sin \theta - r \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta$$

$$= \ddot{r} - r \dot{\theta}^2$$

P.18

$$\begin{aligned}
 a_\theta &= a \cdot \hat{\theta} = (\ddot{x}, \ddot{y}) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) = -\ddot{x} \sin\theta + \ddot{y} \cos\theta \\
 &= -\ddot{r} \cos\theta \sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \sin^2\theta + r\ddot{\theta} \sin^2\theta + r\dot{\theta}^2 \cos\theta \sin\theta \\
 &\quad + \ddot{r} \sin\theta \cos\theta + 2\dot{r}\dot{\theta} \cos^2\theta + r\ddot{\theta} \cos^2\theta - r\dot{\theta}^2 \sin\theta \cos\theta \\
 &= \underline{\underline{2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}}}
 \end{aligned}$$

#3

$r = \frac{1}{u}$ とおくと (2) 式は次の通り。

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{m} u^2 \quad \therefore \frac{\ddot{\theta}}{u^2} = \frac{L}{m} \quad \dots (i)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{u} = \left(\frac{d}{du} \frac{1}{u} \right) \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \dot{u} \\
 &= -\frac{1}{u^2} \dot{\theta} \frac{\dot{u}}{\dot{\theta}} = -\frac{\dot{\theta}}{u^2} \frac{\dot{u}}{\dot{\theta}} \stackrel{(i)}{=} -\frac{L}{m} \frac{\dot{u}}{\dot{\theta}} = -\frac{L}{m} \frac{\frac{du}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \quad \dots (ii)
 \end{aligned}$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt} \dot{r} \stackrel{(ii)}{=} \frac{d}{dt} \left(-\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \right) = \left\{ \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \right) \right\} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{L}{m} \frac{d^2u}{d\theta^2} \dot{\theta} \stackrel{(i)}{=} -\frac{L^2}{m^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} \quad \dots (iii)$$

(i), (ii), (iii) を (2) 式に入れ替えると

$$-\frac{L^2}{m^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{L^2}{m^2} u^3 + GM u^2 = 0$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{GMm^2}{L^2} = 0 \quad \dots (iv)$$

(iv) の解は A, θ_0 を任意の定数として

$$u = A \cos(\theta - \theta_0) + \frac{GMm^2}{L^2} \quad \dots (v)$$

である。 A の代わりに $\varepsilon = \frac{AL^2}{GMm^2}$ を定数として用いると (v) は

$$r = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)} \quad \dots (vi)$$

となる。

また (2) 式は、以下の形にして求まる

$$\dot{\theta} \stackrel{(2)}{=} \frac{L}{m} r^{-2} \stackrel{(vi)}{=} \frac{L}{m} \frac{\{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)\}^2}{\frac{L^4}{G^2 M^2 m^4}} = \frac{G^2 M^2 m^3}{L^3} \{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)\}^2$$

$$\frac{L^3}{G^2 M^2 m^3} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)\}^2} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0$$

但し $t = t_0$ のとき $\theta = \theta_0$ とする。

I. 運動エネルギー、重心運動と重心のまわりの運動への分解

N 個の質点の系を考える。 i 番目の質点の質量を m_i , 位置を r_i とする。

全質量は $M = \sum_{i=1}^N m_i$, 重心は $r_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i r_i}{M}$ である。

重心を基準点にとるとき i 番目の質点の位置ベクトルを

$$r_i' = r_i - r_G$$

と書くと、

$$\sum_{i=1}^N m_i r_i' = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i' = 0 \quad \text{--- ②} \quad \left(\dot{r}_i' = \frac{d}{dt} r_i' \right)$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} \because \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i' &= \sum_{i=1}^N m_i (\dot{r}_i - \dot{r}_G) = \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i - \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \dot{r}_G \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i - M \frac{\sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i}{M} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i - \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i = 0 \end{aligned}$$

よって①が証明された。次に①の左辺を時間で微分すると

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i' = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \dot{r}_i') = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i'$$

よすが、右辺の微分は0なので②を得る。

質点系の全運動エネルギー (kinetic energy) は

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i'^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{r}_G + \dot{r}_i')^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i 2 \dot{r}_G \cdot \dot{r}_i' + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i'^2 \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \right)}_M \dot{r}_G^2 + \dot{r}_G \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i' \right)}_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i'^2 \end{aligned}$$

(交差項とよび)

(∵ ②式)

$$\therefore E_K = \frac{1}{2} M \dot{r}_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i'^2$$

右辺第1項: 重心の運動エネルギー, \dot{r}_G にのみ依存する。
 右辺第2項: 重心に相対的な運動のエネルギー, \dot{r}_i' の影響を受けず。

\dot{r}_G と \dot{r}_i' の両方に依存する項 (交差項 とう) の $\sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_G \cdot \dot{r}_i'$ が、
クロスターム
 重心のもつ特殊性 (②式が成立すること) のおかげで消えてくれたので
 重心の寄与と、それ以外の自由度の寄与にきれいに2分できたの
 である。第2項の表すものは、例えば回転、例えば分子の熱運動のエネルギーである。

[問題] 2質点系(N=2)の場合、運動エネルギー $E_K = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2$ は、

$$E_K = E_{K_G} + E_K', \quad E_{K_G} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{r}_G^2, \quad E_K' = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2'^2$$

と分解される。このとき、相対座標 $r = r_2 - r_1$ 、換算質量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ を用いて E_K' を表せ。

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \text{答} \\ \text{答} \end{array} \right) \quad r_1' &= r_1 - r_G = r_1 - \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (r_1 - r_2) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} r \\ r_2' &= r_2 - r_G = r_2 - \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (r_2 - r_1) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \\ \therefore E_K' &= \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{r} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{r} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{r}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{r}^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \\ &\quad (\text{よって } E_K = \frac{1}{2} M \dot{r}_G^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \text{ と表される。}) \end{aligned}$$

II. 角運動量の、重心運動と重心のまわりの運動への分解

i番目の質点の角運動量は $L_i = r_i \times p_i$ (但し $p_i = m_i \dot{r}_i$ は運動量)、

N個の質点系の全運動量は $L = \sum_{i=1}^N L_i$ である。I.と同様に、

r_G と r_i' を用いて L を表すと、

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^N (r_G + r_i') \times m_i (\dot{r}_G + \dot{r}_i') \\ &= \sum_{i=1}^N r_G \times m_i \dot{r}_G + \sum_{i=1}^N r_G \times m_i \dot{r}_i' + \sum_{i=1}^N r_i' \times m_i \dot{r}_G + \sum_{i=1}^N r_i' \times m_i \dot{r}_i' \\ &= r_G \times \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \dot{r}_G}_{P \text{ (全運動量)}} + r_G \times \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i' \right)}_0 + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i r_i' \right)}_0 \times \dot{r}_G + \sum_{i=1}^N \underbrace{r_i' \times m_i \dot{r}_i'}_{L_i'} \end{aligned}$$

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} L = L_G + L' \\ L_G = r_G \times P \quad \left(r_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i r_i}{\sum_{i=1}^N m_i}, P = M \dot{r}_G, M = \sum_{i=1}^N m_i \right) \\ L' = \sum_{i=1}^N L_i' \quad \left(L_i' = r_i' \times p_i', r_i' = r_i - r_G, p_i' = m_i \dot{r}_i' \right) \end{array} \right.$$

L_G : 重心運動の角運動量, r_G と \dot{r}_G へのみ依存する。

L' : 重心のまわりの運動による角運動量, r_G と \dot{r}_G に影響されない。

- 例えば、惑星の持つ全角運動量 (L , 太陽を基準点とする) は、公転の角運動量 (L_G) と自転の角運動量 (L') の和である。
- 角運動量を定義するための基準点を変えると L_G は変わるが、 L' は変わらない。
これは r_i や \dot{r}_i が基準点に依存しないからである。

体積積分による慣性モーメントの計算の具体例

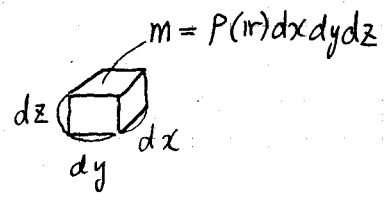
N個の質点で構成された剛体をz軸のまわりに回転させる場合の慣性モーメント I は、i番目 (1 < i < N) の質点の質量を m_i, 位置を r_i = (x_i, y_i, z_i) として、

$$I = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

で与えられる。剛体が連続体であるとき (質量が空間的に連続して分布するとき) は、密度分布を ρ(x, y, z) として、下の式で与えられる

$$I = \iiint (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 $\sum_{i=1}^N$ $(x_i^2 + y_i^2)$ m_i



以下では、体積積分を

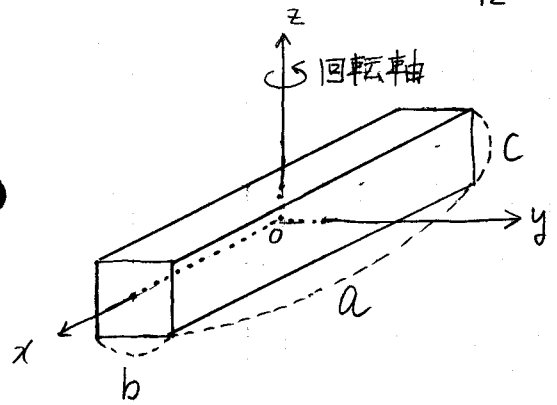
- (i) デカルト座標 (Cartesian座標) ----- (x, y, z)
- (ii) 円柱座標 (円筒座標) ----- (r, φ, z)
- (iii) 球座標 (三次元極座標) ----- (r, θ, φ)

の三通りで行う例を説明する。体積積分 (三重積分) の復習にも好適な内容なので補足として印刷して配布する。

(i) 直方体

$$I = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$

$$\begin{cases} \text{質量 } M \\ \text{体積 } V = abc \\ \text{密度 } \rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{abc} \text{ (一定とする)} \end{cases}$$



$$I = \int_{-a/2}^{a/2} \left(\int_{-b/2}^{b/2} \left(\int_{-c/2}^{c/2} (x^2 + y^2) \cdot \rho dz \right) dy \right) dx$$

上のよりの書き方では積分区間と変数の対応が読み取りにくいので以下のように書き表すことが多い。

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz (x^2 + y^2) \cdot \rho \\ &= \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy (x^2 + y^2) \left[z \right]_{z=-c/2}^{z=c/2} \\ &= \rho c \int_{-a/2}^{a/2} dx \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=-b/2}^{y=b/2} \\ &= \rho c \int_{-a/2}^{a/2} dx \left(b x^2 + \frac{b^3}{12} \right) \\ &= \rho c \left[\frac{1}{3} b x^3 + \frac{b^3}{12} x \right]_{x=-a/2}^{x=a/2} \\ &= \rho c \frac{1}{12} ab (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

デカルト座標 (x, y, z)

変数の範囲

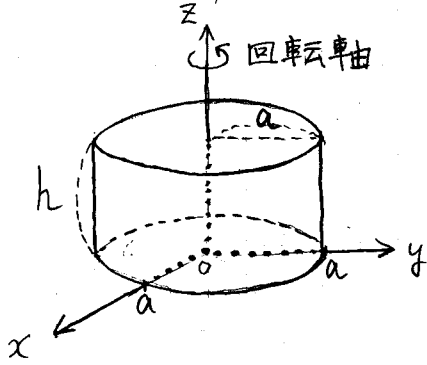
$$\begin{cases} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

体積要素

$$dx dy dz$$

P.22

(ii) 円柱, 円盤



$$I = \frac{1}{2} M a^2$$

$$\begin{cases} \text{質量 } M \\ \text{体積 } V = \pi a^2 h \\ \text{密度 } \rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi a^2 h} \quad (\text{一定とする}) \end{cases}$$

$$I = \int (x^2 + y^2) \cdot \rho(r) dx dy dz$$

$$= \rho \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz \cdot r^2 \quad (\because x^2 + y^2 = r^2)$$

$$= \rho \left\{ \int_0^a r^3 dr \right\} \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi \right\} \left\{ \int_0^h dz \right\}$$

$$= \rho \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^{r=a} \cdot [\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \cdot [z]_{z=0}^{z=h}$$

$$= \frac{M}{\pi a^2 h} \cdot \frac{1}{4} a^4 \cdot 2\pi \cdot h$$

$$= \frac{1}{2} M a^2$$

(注) 厚さ h に依存しないので円盤 ($h \rightarrow 0$) としても同じである。

円柱座標 (r, φ, z)

変数の範囲

$$\begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

デカルト座標との関係

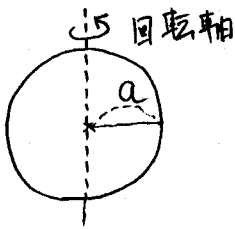
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

体積要素

$$dx dy dz = \boxed{r} dr d\varphi dz$$

↑ Jacobian

(iii) 球



$$I = \frac{2}{5} M a^2$$

$$\begin{cases} \text{質量 } M \\ \text{体積 } V = \frac{4}{3} \pi a^3 \\ \text{密度 } \rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi a^3} \quad (\text{一定とする}) \end{cases}$$

$$I = \int (x^2 + y^2) \rho(r) dx dy dz$$

$$= \rho \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin^2 \theta$$

$$= \rho \left\{ \int_0^a r^4 dr \right\} \left\{ \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \right\} \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi \right\}$$

$$= \frac{3M}{4\pi a^3} \cdot \frac{1}{5} a^5 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi$$

$$= \frac{2}{5} M a^2$$

三次元極座標 (r, θ, φ)
(球座標)

変数の範囲

$$\begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

デカルト座標との関係

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

体積要素

$$dx dy dz = \boxed{r^2 \sin \theta} dr d\theta d\varphi$$

↑ Jacobian

