力 学 Ⅱ　　定 期 試 験 問 題

福井大学工学部物理工学科１年対象、担当教員 田嶋、2013 年 2 月 4 日 4 限実施

A3 判問題用紙１枚と B4 判解答用紙１枚を各人に配布する。解答用紙のおもて面の最下部に学籍番号と氏名を明記せよ。解答用紙のうら面は【4】と【5】の答を書くのに用いる。【2】〜【5】については、最終的な答のみでなく説明と計算過程を必ず記せ。

【1】

下記の文の ア 〜 ホ に語群から最も適切な語句を選んで埋めよ。

２つの質点間に働く重力は、質点間の距離の ア 乗に比例する。また、２つの質点間に働く重力のポテンシャルエネルギーは、質点間の距離の イ 乗に比例する。

もし赤道半径が地球の 2 倍、質量が地球の 7 倍である惑星があったとすると、その惑星の表面での重力加速度は地球の表面での重力加速度の ウ 倍である。

ケプラーの第３法則とは、同じ恒星のまわりを回る全ての惑星の公転周期は楕円軌道の長軸半径の エ 乗に比例するという法則である。（覚えていなくても、円軌道の場合について考察すれば高校生にも分かる。） 従って、周期が 64 年の彗星の軌道の長軸半径は、地球の軌道の長軸半径の オ 倍である。

太陽のまわりを楕円軌道を描いてまわる天体の持つ力学的エネルギー（運動エネルギーと重力の位置エネルギーの和。ただし自転は無視する）は、軌道の カ が同じなら同じである。また、力学的エネルギーが同一の場合に角運動量が最大になるのは、軌道の キ が ク のときである。

質点系に働く外力のベクトル和がゼロであるなら、系の ケ は保存される。

質点系に働く外力のモーメントのベクトル和がゼロであるなら、系の コ は保存される。

質量 $3m$ の物体と質量 $7m$ の物体の相対運動についての換算質量は サ m である。

フィギュアスケートのスピンの最中に、スケーターが腕を体に引き寄せるとスピンの軸のまわりの シ が小さくなる。 ス は シ と セ の積であるが、 ス が一定であるために セ が増加することになりスピンが速くなる。

長さが 10m の丸太の左端を持ち上げるには 40kgf, 右端を持ち上げるには 60kgf の力が必要である。このとき、この丸太の重心は左端から ソ m の位置にある。

半径と質量が同一である 球（中身は一定密度)、球殻（中身は空)、円盤（面密度は一定）のうちで、回転対象軸を回転軸とするときの慣性モーメントが最大のものは タ である。（例えば「球の慣性モーメント I は半径を a、質量を m として $I = \frac{2}{5}ma^2$ である」というようなことを覚えていなくても、定性的に考えれば分かる。）

心棒のまわりに角速度 ω で高速回転しているコマの、心棒の上端が水平面内で角速度 Ω で低速の等速円運動（みそすり運動）をするとき、Ω は ω の チ 乗に比例し、心棒のまわりの慣性モーメントの ツ 乗に比例する。また、コマの心棒のまわりの高速回転が上方から見て右巻きなら、心棒のみそすり運動は テ 巻きである。

自動車が一定の速さで左カーブを曲がっている最中に, ダッシュボードの上に置いた物体は右へと動いた。自動車に乗った観測者がこの現象をニュートンの運動方程式にあてはめて解釈するためには, ト が ナ 方向に働いていると考えることが必要である。
一般に, 観測者が ニ 運動をしていることで見掛け上生じる力を ヌ と呼ぶ。
自動車のキャビン内にヘリウムガスを詰めた風船が浮いているとする。見掛けの力は風船だけでなく全ての物に働くため, 左カーブに差し掛かると, 風船は ネ 方向へと動く。

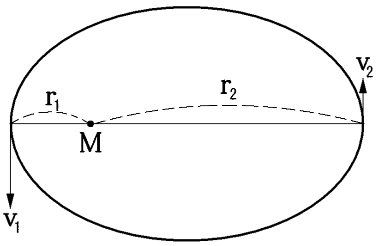
木星の自転周期は 10 時間、赤道半径は地球の赤道半径の 11 倍である。赤道上での自転による遠心力の大きさを比較すると、木星は地球の約 ノ 倍ある。

一様回転する座標系ではコリオリ力と遠心力の２種類の見掛けの力が働くように見える。

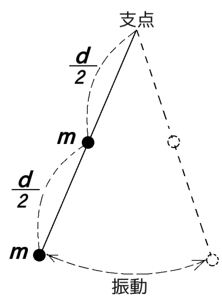
地球の自転の角速度を ω とすると、地球上の観測者にとっては、コリオリ力の大きさは ω の $\boxed{\text{ハ}}$ 乗に比例し、遠心力の大きさは ω の $\boxed{\text{ヒ}}$ 乗に比例する。
地球上の観測者の立場で言えば、静止衛星が静止しているのは、静止衛星に働く重力と $\boxed{\text{フ}}$ がつりあっているからである。また、静止衛星に $\boxed{\text{ヘ}}$ が働かないのは、静止衛星の $\boxed{\text{ホ}}$ がゼロであるからである。

【語群】
$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$・$\boxed{\text{ク}}$・$\boxed{\text{サ}}$・$\boxed{\text{ソ}}$・$\boxed{\text{チ}}$・$\boxed{\text{ツ}}$・$\boxed{\text{ノ}}$・$\boxed{\text{ハ}}$・$\boxed{\text{ヒ}}$：（整数または分数を記入せよ）
$\boxed{\text{カ}}$・$\boxed{\text{キ}}$： 楕円半径　長軸半径　短軸半径　最大半径　最小半径　扁平率　離心率　楕円率　曲率
$\boxed{\text{ケ}}$・$\boxed{\text{コ}}$：全エネルギー　全エントロピー　全運動量　全角運動量　全熱量　温度　重心の位置
$\boxed{\text{シ}}$・$\boxed{\text{ス}}$・$\boxed{\text{セ}}$：慣性モーメント　回転モーメント　速度　加速度　運動量　角速度　角加速度　角運動量
$\boxed{\text{タ}}$： 球　球殻　円盤
$\boxed{\text{テ}}$・$\boxed{\text{ナ}}$・$\boxed{\text{ネ}}$：右　左
$\boxed{\text{ト}}$：求心力　向心力　遠心力　コリオリ力　摩擦力
$\boxed{\text{ニ}}$：静止　等速直線　加速度　ブラウン　絶対　相対
$\boxed{\text{ヌ}}$：万有引力　重力　磁気力　慣性力　貫徹力
$\boxed{\text{フ}}$・$\boxed{\text{ヘ}}$： コリオリ力　遠心力
$\boxed{\text{ホ}}$：質量　慣性モーメント　電荷　体積　エネルギー　位置ベクトル　速度　加速度　向心力　浮力

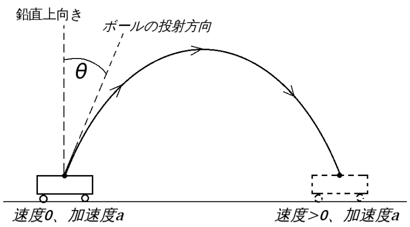
【2】 惑星のまわりを小さな衛星が楕円軌道を描いて公転している。衛星が惑星に最も近付いた地点では、両者の距離は r_1、衛星の速さは v_1 である。また、衛星が惑星から最も遠ざかった地点では、両者の距離は r_2 である。このとき、惑星の質量 M を r_1、r_2、v_1 および重力定数 G を用いて表せ。（右図に記した v_2 は、計算過程でのみ使用せよ。）



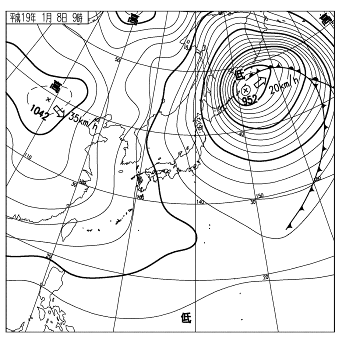
【3】 右図に示したように、質量 m の小球２個を、長さが d で質量の無視できる剛体棒の片端に１個、中央に１個を固定して作った物体がある。この棒の小球の付いていないほうの端を支点として、その点のまわりにこの棒が自由に回転できるようになっている。この棒を振り子として、安定位置のまわりに微小振動を起こさせたときの周期 T を求めよ。ただし重力加速度を g とする。



【4】 水平な直線上を一定の加速度 $a\ (>0)$ で加速中の台車の上に静止している人が、ボールを投げ上げた後、台車上を移動することなく静止したままでそのボールを捕球できるには、（台車とともに動く座標系で見て）鉛直方向上向きから前方（台車の進行方向）へどれだけの角度 θ だけ傾けた方向へボールを投げ上げればよいか？ただし重力加速度を g とし、空気抵抗は無視せよ。右図は、ボール投射時の台車と同じ速度で動く慣性系で見たボールの軌跡である。



【5】 北半球では台風などの低気圧は左巻き（上空から見下ろして反時計まわり）に風が吹く。その理由を詳しく述べよ。次に、北半球では高気圧から吹き出す風は左・右どちら向きに巻くかを理由と共に答えよ。さらに、冬に日本の西に高気圧、東に低気圧のある「西高東低の気圧配置」のときには、寒さが厳しくなる理由を述べよ。



力 学 II 定 期 試 験 答 案 用 紙

福井大学 工学部 物理工学科 1 年生対象、 担当教員 田嶋、 2013 年 2 月 4 日 4 限実施

【1】
60 点

ア	イ	ウ	エ	オ
カ	キ	ク	ケ	コ
サ	シ	ス	セ	ソ
タ	チ	ツ	テ	ト
ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ
ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ

【2】
10 点

【3】
10 点

【4】・【5】 は裏面に解答せよ.(10 点+10 点)

学科 物理工学	学籍番号	氏名	得点	[1] [2] [3] [4] [5]	合計

定期試験答案用紙（全1枚、表裏使用)、科目名 力学 II、対象 福井大学工学部物理工学科 1 年生、担当教員 田嶋、実施日時 2013 年 2 月 4 日 4 限、実施場所 K420 講義室

〔1〕

ア　-2

イ　-1

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{GMm}{r^2} \propto r^{-2}$$
$$V = -\frac{GMm}{r} \propto r^{-1}$$
$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

ウ　$\frac{7}{4}$

表面上の質量mの物体に働く力は $F = \frac{GMm}{R^2}$，重力加速度は

$$g' = \frac{F}{m} = \frac{GM}{R^2}$$ 但し Mは惑星の質量，Rは赤道半径。

$$g_\oplus = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}$$ (⊕は地球の記号) との比は

$$\frac{g'}{g_\oplus} = \left(\frac{R}{R_\oplus}\right)^{-2}\left(\frac{M}{M_\oplus}\right)^{1} = 2^{-2}\cdot 7^{1} = \frac{7}{4}$$ 倍となる。

エ　$\frac{3}{2}$

記憶に自信がないときは、円軌道という特殊なケースで求めるとよい。

(円運動に必要な向心力) = (重力)　より

$$mr\omega^2 = \frac{GMm}{r^2}$$

$$r^3\omega^2 = GM$$

$$\omega = \sqrt{GM}\, r^{-3/2}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\, r^{3/2}$$ 故に $\frac{3}{2}$ 乗。

オ　16

長軸半径をR，周期をTと記し、地球をE，彗星をCと添え字付ければ

$$\left(\frac{r_C}{r_E}\right)^{3/2} = \frac{T_C}{T_E} = \frac{64}{1}.\quad \frac{r_C}{r_E} = 64^{2/3} = 2^{6\cdot\frac{2}{3}} = 2^4 = 16$$ 倍。

カ　長軸半径

キ　離心率

ク　0

ケ　全運動量

コ　全角運動量

サ　$\frac{21}{10}$

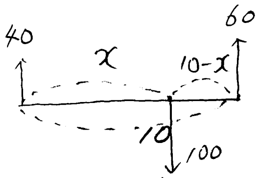
$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{3m} + \frac{1}{7m}, \quad \mu = \frac{3m\cdot 7m}{3m+7m} = \frac{21}{10}m$$

シ　慣性モーメント

ス　角運動量

セ　角速度

ソ　6



$$100x = 60\times 10 \quad \therefore x = 6$$

または　$$100\cdot(10-x) = 40\times 10 \quad \therefore x = 6$$

タ　球殻

物体を薄い円柱状に切りわけて、半径の大きい円柱により大きい質量が配分される物体が大きい慣性モーメントを持つ。

チ　-1

ツ　-1

「$\Omega = \frac{Mgd}{I\omega}$」の導出を読み直して下さい。

テ　右

重力の力のモーメントの向きを思い描いてみよ。

ト　遠心力

チ　右

ニ　加速度

ヌ　慣性力

ネ　左

ノ　63　　60でも可.　$F = mr\omega^2 \propto r'\omega^2 \propto r' T^{-2} \propto 11 \cdot \left(\frac{24}{10}\right)^2 = 63.36$

ハ　1　　$\vec{F}_{cor} = 2m\vec{v} \times \vec{\omega} = 2m\omega\ \vec{v} \times \hat{\omega}$

ヒ　2　　$\vec{F}_{cen} = -m\ \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -m\omega^2\ \hat{\omega} \times (\hat{\omega} \times \vec{r})$

フ　遠心力

ヘ　コリオリ力

ホ　速度

2.

力学的エネルギーの保存により，衛星の質量を m として

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2} \quad \cdots\cdots ①$$

角運動量の保存により（∵ 衛星に働く力は惑星を中心とする中心力なので惑星を基準点として定義された衛星の角運動量は保存する）

$$mr_1v_1 = mr_2v_2 \quad \cdots\cdots ②$$

①より $$M = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2G\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{r_1r_2(v_1^2 - v_2^2)}{2G(r_2 - r_1)} \quad \cdots\cdots ③$$

②より $$v_2 = \frac{r_1v_1}{r_2} \quad \cdots\cdots ④$$

④を③に代入して

$$M = \frac{r_1r_2\left(v_1^2 - \frac{r_1^2}{r_2^2}v_1^2\right)}{2G(r_2 - r_1)} = \frac{r_1(r_1+r_2)v_1^2}{2Gr_2} \quad (答)$$

3.

振り子の重心は，支点から $l = \dfrac{\frac{d}{2}\cdot m + d\cdot m}{m+m} = \dfrac{3}{4}d$ の距離にある。

振り子の支点についての慣性モーメントは，$I = m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + md^2 = \frac{5}{4}md^2$.

振り子の鉛直線からのずれの角度を θ とすると，振り子の回転の運動方程式は

$$I\ddot{\theta} = (\text{重力の力のモーメント}) = -(2m)g\cdot l\sin\theta \fallingdotseq -2mgl\theta$$

$$\left(\overset{\text{または}}{=} -mgd\sin\theta - mg\frac{d}{2}\sin\theta = -\frac{3}{2}mgd\sin\theta\right)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2mgl}{I}\theta$$

この解は $\theta = A\sin(\omega t + \delta)$，

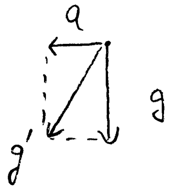
$$\omega^2 = \frac{2mgl}{I} = \frac{2mg\frac{3}{4}d}{\frac{5}{4}md^2} = \frac{6g}{5d}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{5d}{6g}} \quad (答)$$

4

台車に固定された加速度運動する座標系では　慣性力と重力の合力として

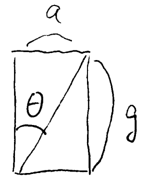
みかけの重力 g' が



の方向に働いている。 θ を、このみかけの

重力の方向にとれば ボールは「真上に上がり、真下におちる」ので 自分のところに

戻る。 従って



であるから　$\tan\theta = \dfrac{a}{g}$.

$\therefore\ \theta = \arctan\dfrac{a}{g}$ (答)

[別解]

問題の図に即して考えると　ボールの投射時の初速度を 水平方向 $v_{/\!/}$,

鉛直方向 $v_\perp$ とすれば　ボールが台車に落ちるまでの時間は

$t = 2\cdot\dfrac{v_\perp}{g}$ である。 この時間でボールの水平方向に進んだ距離と

台車の進んだ距離が等しいので、下式が成立する

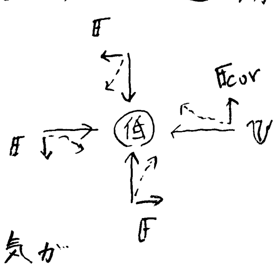
$$v_{/\!/}\,t = \frac{1}{2}at^2$$

$$v_{/\!/} = \frac{1}{2}a\cdot 2\frac{v_\perp}{g} = \frac{a}{g}v_\perp$$

$$\therefore\quad \frac{v_{/\!/}}{v_\perp} = \frac{a}{g} \qquad \theta = \arctan\frac{v_{/\!/}}{v_\perp} = \arctan\frac{a}{g}\ (答)$$

5

- 低気圧の中心に向かって吸い寄せられる空気には 進行方向の右向きのコリオリ力が働くので 低気圧は左巻きになる。

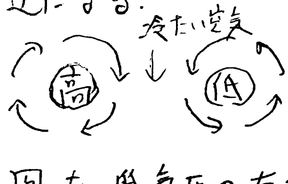


$F_{cor} = 2m\,v\times\omega$

・ω は地球の自転の角速度ベクトル

・ω の鉛直成分は北半球では上向き

- 高気圧からは 中心から外に向かって空気が吹き出すので、低気圧の場合と比較して v の符号が逆になり、コリオリ力 $F_{cor} = 2m\,v\times\omega$ の向きも逆になる。したがって 高気圧は右巻きに吹き出す。



- 西高東低の気圧配置では　高気圧の右巻きの風も 低気圧の左巻きの風も共に北の冷たい空気を日本に送りこむので 寒さが厳しくなる。