力 学 Ⅱ　　定 期 試 験 問 題

福井大学工学部物理工学科１年対象、担当教員 田嶋、2012 年 2 月 6 日 4 限実施

A3 判問題用紙１枚と B4 判解答用紙１枚を各人に配布する。解答用紙のおもて面の最下部に学籍番号と氏名を明記せよ。解答用紙のうら面は【4】の答を書くのに用いる。【2】〜【4】については、最終的な答のみでなく説明と計算過程を必ず記せ。

【1】 下記の文の $\boxed{ア}$〜$\boxed{ト}$ に語群から最も適切な語句を選んで埋めよ。

地球と比較すると、火星は質量が 0.11 倍、赤道半径が 0.53 倍である。このことより火星の表面での重力加速度は地球の表面での重力加速度の約 $\boxed{ア}$ 倍であることがわかる。

質点 P の質量を m, 位置ベクトルを $\mathbf{r}$, 速度を $\mathbf{v}$ とし、質点 P に働く外力を $\mathbf{F}$ とするとき、質点 P の（位置ベクトルの座標原点を基準点として定義された）角運動量は $\mathbf{L} = \boxed{イ}$ と表される。また角運動量の時間変化率は $\dot{\mathbf{L}} = \boxed{ウ}$ で与えられる。$\boxed{ウ}$ は質点 P の受ける $\boxed{エ}$ である。

ケプラー運動（距離の２乗に反比例する引力である中心力の下での運動）する質点の軌道の形状は、力学的エネルギーが負のときには $\boxed{オ}$ であり、正確にゼロのときには $\boxed{カ}$ であり、 正のときには $\boxed{キ}$ である。ただし無限遠点で静止している状態でのエネルギーをゼロとする。

剛体の回転の運動エネルギーは回転の角速度の２乗に $\boxed{ク}$ の $\frac{1}{2}$ 倍を掛けると得られる。長さ a、質量 m の一様な細い剛体棒を、その中心を通り棒に垂直な軸の回りに回転させた場合の $\boxed{ク}$ は $\dfrac{1}{12}ma^2$ である。また、この棒の片方の端点を通り棒に垂直な軸の回りに回転させた場合の $\boxed{ク}$ は $\boxed{ケ}\,ma^2$ である。

質点系に $\boxed{コ}$ が働かなければ質点系の全 $\boxed{サ}$ は保存されることは、作用・反作用の法則を使って導ける。質点系の $\boxed{シ}$ の加速度は質点系に働く $\boxed{コ}$ のベクトル和を質点系の全 $\boxed{ス}$ で割ったものに等しい。

太陽の及ぼす重力などが原因で、地軸 (地球の自転軸) の方向は、地球の公転面の法線方向のまわりに約 26000 年周期で回転する。これを $\boxed{セ}$ という。

南極点を除く**南半球**では、西から東へと移動する物体に働くコリオリ力の水平成分は $\boxed{ソ}$ 向きであり、南から北へと移動する物体に働くコリオリ力の水平成分は $\boxed{タ}$ 向きである。また、鉛直上向きに投射された物体に働くコリオリ力の働く方向は、上昇中は $\boxed{チ}$ 向きである。

地球上でコリオリ力が鉛直上方を向き得るのは $\boxed{ツ}$ だけである。そこでは物体が $\boxed{テ}$（語群に挙げた方角のうち当てはまるものを全て記せ）向きに運動するときコリオリ力は鉛直上向きに働く。

燃焼ガスを秒速 4km で噴出するロケットが加速度 $10g$ ($g = 9.8\mathrm{ms}^{-2}$) を出すには、１秒あたりロケットの全質量の約 $\boxed{ト}$ 分の１の質量の燃料をガスとして噴出する必要がある。ただし重力を無視せよ。

【語群】

$\boxed{ア}$: 0.09　0.19　0.29　0.39　0.49　0.59　0.69　0.79　0.89　0.99　2.6　4.8　23　44

$\boxed{イ}$・$\boxed{ウ}$: (数式で答よ。)

$\boxed{エ}$: 運動エネルギー　運動量　力　力のモーメント　力のバランス　作用　反作用　圧力　熱

$\boxed{オ}$・$\boxed{カ}$・$\boxed{キ}$: 直線　半円　卵形線　楕円　放物線　双曲線　螺旋

$\boxed{ク}$: 回転モーメント　慣性モーメント　剛体モーメント　回転トルク　慣性トルク　剛体トルク

$\boxed{ケ}$: (有理数で答えよ。)

$\boxed{コ}$: 内力　外力　接触力　遠隔力　電磁気力　重力

$\boxed{サ}$: 運動エネルギー　運動量　角運動量　熱量　エントロピー

$\boxed{シ}$: 中心　内心　外心　重心　傍心　中点　焦点　重点

$\boxed{ス}$: エネルギー　質量　電荷　磁荷　粒子数

$\boxed{セ}$: 章動　秤動　地軸揺動　地軸周回　コマ運動　日周運動　年周運動　歳差運動　胡麻擂り運動

$\boxed{ソ}$・$\boxed{タ}$・$\boxed{チ}$・$\boxed{テ}$: 東　南　西　北　南東　南西　北西　北東

$\boxed{\text{ツ}}$: 北極点　北緯 45 度線上　北回帰線上　赤道上　南回帰線上　南緯 45 度線上　南極点

$\boxed{\text{ト}}$: 10　20　30　40　50　60　70　80　90　100　200　300　400　500　600　700

【2】 質量 M の恒星のまわりを質量 m の惑星が円軌道を描いて回っている。恒星と惑星の間の距離を r, 惑星の公転運動の角速度を ω とする。重力定数を G とする。

(1) この恒星と惑星の間に働く重力（万有引力）の大きさ F を M, m, r, G のうち必要なものを用いて表せ。

(2) 惑星からの重力のため、恒星も完全に静止していることはできない。恒星と惑星からなる系の重心から見たとき、恒星の重心はどのような運動をしているか。（答え方：例えばそれが円軌道なら、その半径と角速度を答えよ。）

(3) M を m, r, ω, G のうち必要なものを用いて表せ。

【3】 単振子（紐の先に錘をぶらさげ、錘を紐に垂直な方向に振動させる装置）およびバネ振子（バネの先に錘をぶらさげ、錘をバネに平行な方向に振動させる装置）がバスの車内に設置されている。バスが静止しているときと比較して、バスが一定加速度で運動しているときには、これらの振子の振動周期はどう変化するかを論じよ。

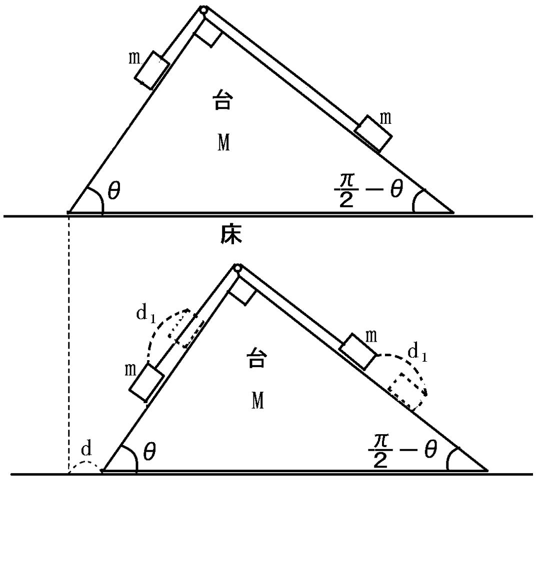
注意：議論で用いる数式に現れる全ての変数について、その定義を明記せよ。

【4】 下図のように滑らかな床の上に質量 M の直角三角形の形をした台が斜辺を底面にして置かれている。台の左斜面が床面となす角は θ (但し、$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$) であり、右斜面が床面となす角は $\frac{\pi}{2} - \theta$ である。台の左右の斜面上には質量 m の小物体が１個ずつ乗っている。これらの小物体は伸び縮みしない質量の無視できる糸で、滑らかに回る定滑車を介してつながっている。糸は斜面に平行に張られている。時刻 $t = 0$ で全ての物体は静止していた。時刻 $t > 0$ で左側の小物体は左斜面を滑り降り、右側の小物体は右斜面を滑り上がり、台はその反動で水平方向右向きに移動した。なお、小物体が斜面から浮き上がることはなかった。台と小物体との間、および、台と床との間の摩擦力は無視できるとする。重力加速度を g として、以下の小問 (1)〜(3) に答えよ。

(1) 左側の小物体が斜面に沿って距離 d_1 だけ進んだ時点で、台は水平方向右向きへ距離 d だけ移動していた。このとき、比 d/d_1 を M, m, θ を用いて表せ。

(2) 台の加速度の水平方向の成分（右向きを正とする）を a とする。台とともに運動する観測者 S から見ての２個の小物体それぞれの斜面方向の運動方程式を書け。だだし、小物体の加速度は、観測者 S から見て、斜面に沿う方向に大きさ a_1 とする。糸の張力は T ($T > 0$) とせよ。

(3) 比 a/a_1 は、小問 (1) で求めた比 d/d_1 に等しい。このことと小問 (2) の答を組み合わせることで、a を M,m,θ,g を用いて表せ。



力 学 II 定 期 試 験 答 案 用 紙

福井大学 工学部 物理工学科 1 年生対象、 担当教員 田嶋、 2012 年 2 月 6 日 4 限実施

【1】
40 点

ア	イ	ウ	エ	オ
カ	キ	ク	ケ	コ
サ	シ	ス	セ	ソ
タ	チ	ツ	テ	ト

【2】
15 点

【3】
15 点

【4】は裏面に解答せよ.(30 点)

学科	物理工学	学籍番号		氏名		得点	[1]	[2]	[3]	[4]	合計

解答・解説

[1] ・惑星の質量をM、半径をrとすると $g = \frac{GM}{r^2}$（∵質量mの物体に働く重力は mg とも、$\frac{GMm}{r^2}$ とも表せる。）
Gは普遍的な物理定数であり、惑星によって変わることはない。

$\therefore \frac{g_{火星}}{g_{地球}} = \frac{M_{火星}/M_{地球}}{(r_{火星}/r_{地球})^2} \fallingdotseq \frac{0.11}{0.53^2} \fallingdotseq 0.39$　　ア 0.39

・$\mathbb{L} = m\,\mathbb{r} \times \mathbb{v}$　　イ $m\,\mathbb{r} \times \mathbb{v}$

$\dot{\mathbb{L}} = m\,\dot{\mathbb{r}} \times \mathbb{v} + m\,\mathbb{r} \times \dot{\mathbb{v}} = m\,\mathbb{v} \times \mathbb{v} + m\,\mathbb{r} \times \frac{\mathbb{F}}{m}$　　ウ $\mathbb{r} \times \mathbb{F}$

$= \mathbb{r} \times \mathbb{F}$　（∵運動方程式 $m\dot{\mathbb{v}} = \mathbb{F}$）　　エ 力のモーメント

・オ 楕円　　カ 放物線　　キ 双曲線

・$E_K = \frac{1}{2} \boxed{I} \omega^2$　　ク 慣性モーメント
（I = ク）

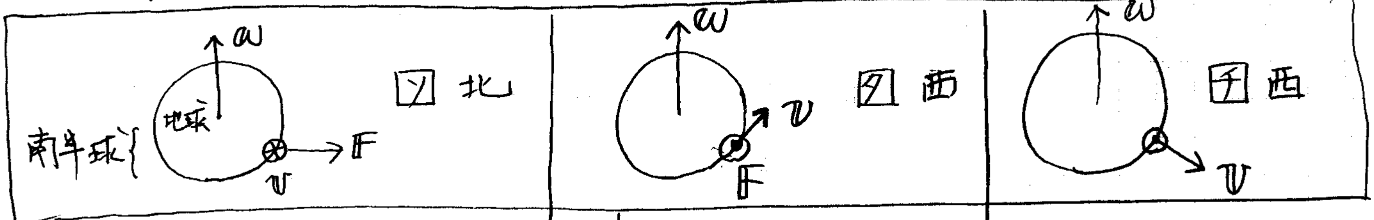
平行軸の定理により $I' = I + m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ma^2 + \frac{1}{4}ma^2 = \frac{1}{3}ma^2$　　ケ $\frac{1}{3}$

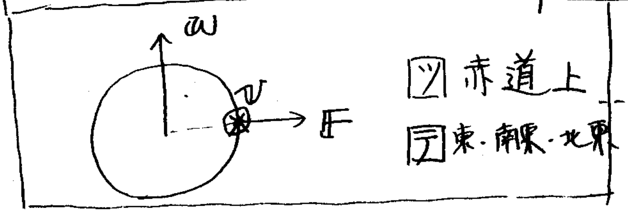
・コ 外力　　サ 運動量　　注意：内力が作用・反作用の法則に従うだけでは、内力により角運動量は変化しうる。例 $\mathbb{F}_{12}$ $\mathbb{F}_{21}$
したがってサに角運動量と答えるのは厳密には正しくない。

・$\mathbb{r}_G = \frac{\Sigma \mathbb{F}_{外力}}{\Sigma m_i}$　　シ 重心　　ス 質量

・セ 歳差運動　　注意：地軸振動，地軸周回という学術用語は存在せず、出題者の造語である。「みそすり運動」と呼ぶ和書はあるが、胡麻すり運動と書いた本は私は見たことがない。

・$\mathbb{F}_{cor} = 2m\,\mathbb{v} \times \omega$，$\omega$ は地球の中心から北極に向かう方向を向く。





注意：コリオリ力は地軸に垂直な面内にある。鉛直上向きが地軸に垂直なのは赤道上だけである。

・mをロケットの質量，Δmを1秒間に噴出されるガスの質量、
現在のロケットの速度をゼロとする慣性系でみて1秒後のロケットの速さは
$v = 10g \cdot 1秒 = 98\ m/s$，　ガスの速さは $v_{ガス} = 4\ km/s$．
運動量保存則により　$mv - \Delta m \cdot v_{ガス} = 0$．$\therefore \frac{\Delta m}{m} = \frac{v}{v_{ガス}} = \frac{98}{4000} \fallingdotseq \frac{1}{40}$

ト 40

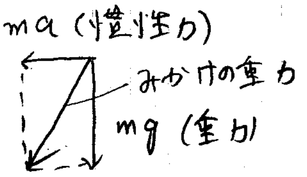
[2] (1) $F = \frac{GMm}{r^2}$

(2) 2つの星の重心は恒星から $r\cdot\frac{m}{M+m}$ のきょりにあり、その点のまわりを2星は円運動するので、恒星は半径 $\frac{mr}{M+m}$，角速度 ω で円運動する。

(3) $$\cancel{M}\frac{mr}{M+m}\omega^2 = \frac{G\cancel{M}\cancel{m}}{r^2}$$

$$M+m = \frac{r^3\omega^2}{G} \qquad \therefore\ M = \frac{r^3\omega^2}{G} - m \quad (答)$$

[3] 単振り子の糸の長さを l，錘の質量を m，振動周期を T_1，重力加速度を g とすると $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ である。バスが加速度 a で運動しているときは g を $\sqrt{g^2+a^2}$ でおきかえればよい（図参照）。



∴ T_1 は $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}$ にかわる（短くなる）。

ばね定数を k，錘の質量を m，振動周期を T_2 とすると $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ である。T_2 は g に依存しないので，バスが加速しても変化しない。

[4] (1) 床上の観測者（慣性系）から見て、水平方向（右向き正）の移動きょりは

台 … d，左側の小物体 … $d-d_1\cos\theta$，右側の小物体 … $d-d_1\sin\theta$

これらによる「台＋2小物体」系の重心の水平成分の変化量は

$$\frac{1}{M+2m}\{Md + m(d-d_1\cos\theta) + m(d-d_1\sin\theta)\} = 0$$ である

$$\therefore\ (M+2m)d = m(\cos\theta+\sin\theta)d_1$$

$$\therefore\ \frac{d}{d_1} = \frac{m(\cos\theta+\sin\theta)}{M+2m} \quad (答)$$

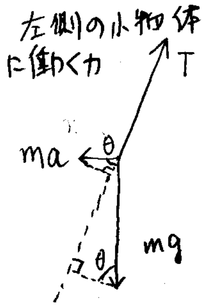
(2) 左側の小物体の左側の斜面方向（下りが正の方向）の運動方程式は

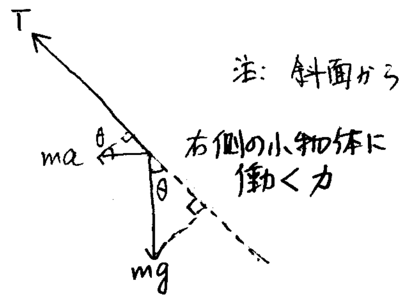
$$ma_1 = mg\sin\theta + ma\cos\theta - T$$

右側の小物体の右側の斜面方向（上りが正の方向）の運動方程式は

$$ma_1 = -mg\cos\theta + ma\sin\theta + T$$

注：斜面からの垂直抗力は描き入れていない。





(3)　(2)の答の2式を辺々足し合わせると

$$2ma_1 = mg(\sin\theta - \cos\theta) + ma(\sin\theta + \cos\theta)$$

これに

$$a_1 = \frac{d_1}{d}a = \frac{M+2m}{m(\sin\theta+\cos\theta)}a$$

を代入すると

$$\left\{\frac{2\cancel{m}(M+2m)}{\cancel{m}(\sin\theta+\cos\theta)} - m(\sin\theta+\cos\theta)\right\}a = (\sin\theta-\cos\theta)mg$$

$$a = \frac{(\sin\theta-\cos\theta)m}{\dfrac{2(M+2m)}{\sin\theta+\cos\theta} - (\sin\theta+\cos\theta)m}g$$

$$a = \frac{(\sin^2\theta-\cos^2\theta)m}{2(M+2m) - (\sin\theta+\cos\theta)^2 m}g \qquad (答)$$

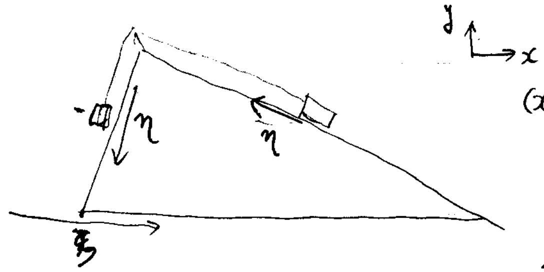
cf

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\theta - \cos^2\theta &= -\cos 2\theta \\ \sin\theta + \cos\theta &= \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}\right\} とも表せる.$$

$$a = \frac{-m\cos 2\theta}{2\left(M+2m - m\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)}g \qquad (答)$$

[4]の別解

【一般化座標（解析力学）による解法】



左側の小物体の座標は

$(x,y) = (\xi - \eta\cos\theta,\ -\eta\sin\theta) +$（定ベクトル）

右側の小物体の座標は

$(x,y) = (\xi - \eta\sin\theta,\ \eta\cos\theta) +$（定ベクトル）

台の重心の座標は $(x,y) = (\xi, 0) +$（定ベクトル）

$$\therefore\quad T = \frac{1}{2}M\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}m\left\{\dot{\eta}^2\sin^2\theta + (\dot{\xi} - \dot{\eta}\cos\theta)^2\right\} + \frac{1}{2}m\left\{\dot{\eta}^2\cos^2\theta + (\dot{\xi} - \dot{\eta}\sin\theta)^2\right\}$$

$$V = mg\eta(\sin\theta - \cos\theta)$$

$$L = T - V$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = M\dot{\xi} + m(\dot{\xi} - \dot{\eta}\cos\theta) + m(\dot{\xi} - \dot{\eta}\sin\theta)$$
$$= (M+2m)\dot{\xi} - m(\cos\theta + \sin\theta)\dot{\eta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0 \qquad \therefore \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = (\text{定数}) = 0 \quad (t=0\text{で静止})$$

$$(M+2m)\dot{\xi} - m(\cos\theta + \sin\theta)\dot{\eta} = 0$$

$$\therefore\quad \frac{\dot{\xi}}{\dot{\eta}} = \frac{m(\cos\theta + \sin\theta)}{M+2m} \qquad \therefore \ddot{\eta} = \frac{M+2m}{m(\cos\theta + \sin\theta)}\ddot{\xi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = m\dot{\eta}\sin^2\theta + m(\dot{\xi} - \dot{\eta}\cos\theta)(-\cos\theta) + m\dot{\eta}\cos^2\theta + m(\dot{\xi} - \dot{\eta}\sin\theta)(-\sin\theta)$$
$$= -m(\cos\theta + \sin\theta)\dot{\xi} + 2m\dot{\eta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} = mg(\sin\theta - \cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} - \frac{\partial L}{\partial \eta} = 0$$

$$-\cancel{m}(\cos\theta + \sin\theta)\ddot{\xi} + 2\cancel{m}\ddot{\eta} = \cancel{m}g(\sin\theta - \cos\theta)$$

$$\left\{\frac{2(M+2m)}{m(\cos\theta + \sin\theta)} - (\cos\theta + \sin\theta)\right\}\ddot{\xi} = (\sin\theta - \cos\theta)g$$

$$\ddot{\xi} = \frac{mg(\sin^2\theta - \cos^2\theta)}{2(M+2m) - m(\cos\theta + \sin\theta)^2} \quad (\text{答})$$