福井大学工学部物理工学科１年生対象授業

力学 Ⅱ

2010 年度後期 配布資料　　(担当教員 田嶋直樹)

講義ノートの補足部分（板書写しの作業量を適量に抑えるため、一部を印刷して渡します）

$\boxed{\mathcal{D}1}$ 極座標での楕円の方程式の導出 .... p. 1

$\boxed{\mathcal{D}2}$ 極座標での楕円の方程式をデカルト座標で表すこと .... p. 1

$\boxed{\mathcal{D}3}$ ケプラー運動の角運動量 L を軌道の形状パラメータで表すこと .... p. 2

$\boxed{\mathcal{D}4}$ ケプラー運動のエネルギー E を軌道の形状パラメータで表すこと .... p. 2

$\boxed{\mathcal{D}5}$ ケプラー運動の周期 T を軌道の形状パラメータで表すこと .... p. 3

$\boxed{\mathcal{D}6}$ 方程式 $r = (1 + \epsilon \cos\theta)^{-1}$ の表す曲線（円・楕円・放物線・双曲線） .... p. 4

$\boxed{\mathcal{D}7}$ 内力の和がゼロになることの証明 .... p. 5

$\boxed{\mathcal{D}8}$ 一定速度でロープを引き上げる問題のエネルギー的考察 .... p. 5

$\boxed{\mathcal{D}9}$ 重心の運動方程式の意味すること .... p. 6

$\boxed{\mathcal{D}10}$ ボートの上を歩く問題の解法 I（運動量保存則による高校生的解法を厳密化） .... p. 6

$\boxed{\mathcal{D}11}$ ２体運動の重心運動と相対運動への分離の意味すること .... p. 6

$\boxed{\mathcal{D}12}$ 内力が系の全角運動量を変化させないことの証明 .... p. 7

$\boxed{\mathcal{D}13}$ （地球＋月）系における全角運動量の保存 .... p. 7

$\boxed{\mathcal{D}14}$ 三脚テーブルの荷重分配 .... p. 8

$\boxed{\mathcal{D}15}$ 加速度の接線成分と法線成分 .... p. 9

$\boxed{\mathcal{D}16}$ 一般の（非等速の）円運動の $a_{\rm t}$ と $a_{\rm n}$ .... p. 9

$\boxed{\mathcal{D}17}$ 定滑車と２個の錘の系に対応する並進運動のみを行う系 .... p. 10

$\boxed{\mathcal{D}18}$ 車の前輪・後輪にかかる抗力を求める問題で、重心以外の点を力のモーメントの基準点にとる場合の注意点 .... p. 10

$\boxed{\mathcal{D}19}$ 斜面を滑らずに転がる球の運動に関する追加の問題 .... p. 11

$\boxed{\mathcal{D}20}$ 歳差運動についてのコメント .... p. 12

$\boxed{\mathcal{D}21}$ $\frac{dA}{dt} = \omega \times A$ の導出 .... p. 12

$\boxed{\mathcal{D}22}$ $\frac{dA}{dt} = \left(\frac{d}{dt}^* + \omega\times\right) A$ の導出 .... p. 12

$\boxed{\mathcal{D}23}$ 一定角速度で回転する系で見た運動方程式の導出 .... p. 13

$\boxed{\mathcal{D}24}$ 地球の自転によるコリオリ力が水平面内の運動に及ぼす影響 .... p. 13

$\boxed{\mathcal{D}25}$ コリオリ力と遠心力の相補性 .... p. 14

発展的テーマ（授業で書き写したノートと併読しなくても意味の通る内容の、長目の説明です）

- Kepler motion （ケプラー運動） .... p. 15〜18
- 質点系の力学についての補足説明 .... p. 19〜20
- 体積積分による慣性モーメントの計算の具体例 .... p. 21〜22

力学II　講義ノートの補足〈1〉

D1　極座標での楕円の方程式の導出：

$$r + r' = 2r_0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$r'^2 = r^2 + (2d)^2 - 2\cdot r\cdot 2d\cdot \underbrace{\cos(\pi-\theta)}_{= -\cos\theta} \quad \cdots\cdots ② \quad (\because \text{余弦定理})$$

①より、

$$r' = 2r_0 - r$$

$$r'^2 = (2r_0 - r)^2 \quad \cdots\cdots ③$$

②と③の右辺同士は等しいので

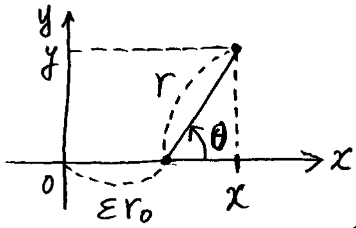
$$r^2 + 4d^2 + 4rd\cos\theta = 4r_0^2 - 4r_0 r + r^2$$

$$r(r_0 + d\cos\theta) = r_0^2 - d^2$$

$$\therefore\ r = \frac{r_0^2 - d^2}{r_0 + d\cos\theta}$$

, $d = \varepsilon r_0$ を代入して $r = \dfrac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos\theta}\, r_0$

D2　極座標での楕円の方程式をデカルト座標で表せ：



$$\begin{cases} x = \varepsilon r_0 + r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(x-\varepsilon r_0)^2 + y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x - \varepsilon r_0}{r} \end{cases}$$

上記の変数変換により、r, θ で表された楕円の方程式を x, y で表す。

$$r = \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos\theta}\, r_0$$

$$r + r\varepsilon\cos\theta = (1-\varepsilon^2) r_0$$

$$r = (1-\varepsilon^2) r_0 - \varepsilon r\cos\theta$$

$$\sqrt{(x-\varepsilon r_0)^2 + y^2} = (1-\varepsilon^2) r_0 - \varepsilon(x - \varepsilon r_0)$$

$$(x-\varepsilon r_0)^2 + y^2 = (1-\varepsilon^2)^2 r_0^2 - 2(1-\varepsilon^2) r_0 \varepsilon (x - \varepsilon r_0) + \varepsilon^2 (x - \varepsilon r_0)^2$$

$$(1-\varepsilon^2)(x-\varepsilon r_0)^2 + y^2 = (1-\varepsilon^2)^2 r_0^2 - 2(1-\varepsilon^2) r_0 \varepsilon (x - \varepsilon r_0)$$

$$(x-\varepsilon r_0)^2 + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} = (1-\varepsilon^2) r_0^2 - 2 r_0 \varepsilon (x - \varepsilon r_0)$$

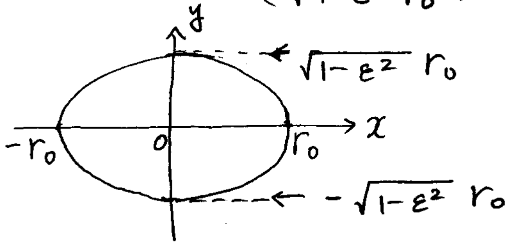
$$x^2 - 2x\varepsilon r_0 + \varepsilon^2 r_0^2 + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} = r_0^2 - \varepsilon^2 r_0^2 - 2r_0\varepsilon x + 2\varepsilon^2 r_0^2$$

（続く）

力学II　講義ノートの補足〈2〉

D2 (続き)

$$x^2+\frac{y^2}{1-\varepsilon^2}=r_0^2 \qquad \therefore \left(\frac{x}{r_0}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,r_0}\right)^2=1$$



D3 角運動量Lを軌道の形状パラメータで表すこと:

$$r=\frac{\dfrac{L^2}{GMm^2}}{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)}=\frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos\theta}\,r_0$$

(運動方程式の解)　　(楕円の方程式)

$$\therefore\ \theta_0=0,\quad \frac{L^2}{GMm^2}=(1-\varepsilon^2)\,r_0$$

$$\therefore\ L=\sqrt{GMm^2r_0(1-\varepsilon^2)}$$

D4 エネルギーを軌道の形状パラメータで表すこと:

太陽からの距離が最小になる点を近日点という。

近日点では $\theta=\theta_0$, $r=r_<\equiv r_0(1-\varepsilon)$ である。

近日点での速さ $v_<$ は、$mr^2\dot{\theta}=L$ および近日点で $\dot{r}=0$ より、

$$v_<=r_<\dot{\theta}_<=\frac{L}{mr_<}=\frac{\sqrt{GMm^2r_0(1-\varepsilon^2)}}{mr_0(1-\varepsilon)}=\sqrt{\frac{GM(1+\varepsilon)}{r_0(1-\varepsilon)}}.$$

エネルギーEは、

$$E=\frac{1}{2}mv_<^2-\frac{GMm}{r_<}$$

$$=\frac{1}{2}m\frac{GM(1+\varepsilon)}{r_0(1-\varepsilon)}-\frac{GMm}{r_0(1-\varepsilon)}=\frac{GMm}{2r_0}\,\frac{1+\varepsilon-2}{1-\varepsilon}$$

$$=-\frac{GMm}{2r_0}$$

(注) エネルギーは保存するので、近日点以外でもこの値をとる。
理解を深めるため遠日点($\theta=\theta_0+\pi$, $r=r_>=r_0(1+\varepsilon)$)でのEを計算して、同じ値になることを確かめてみよ。

D5 ケプラー運動の周期

解法その1 ： 目標を目指して一直線に進む方法（不定積分を求めるのが難しい）

$$t = t_0 + \frac{L^3}{G^2M^2m^3}\int_0^{\theta-\theta_0}\frac{d\Theta}{(1+\varepsilon\cos\Theta)^2}$$ （P.16の㉔式）

より、軌道を一周するのに要する時間，即ち周期 T は

$$T = \frac{L^3}{G^2M^2m^3}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2}$$ （定石通り，$t=\tan\frac{\theta}{2}$ とおいて置換積分すると下記の式になる。）

$$= \frac{L^3}{G^2M^2m^3}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon^2}\left[\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{\theta}{2}\right)-\frac{\varepsilon\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$$

$$= \frac{L^3}{G^2M^2m^3}\frac{1}{1-\varepsilon^2}\left(\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\pi - 0\right)$$

$\tan\frac{\theta}{2}$ は $\theta=\pi$ で不連続なので 2区間 $[0,\pi)$，$(\pi,2\pi]$ にわけて評価する。

$$\left[\arctan\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}+\left[\ 〃\ \right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \arctan(+\infty)-\arctan 0+\arctan(+\infty)-\arctan 0 = \frac{\pi}{2}-0+\frac{\pi}{2}-0=\pi$$

$$= \frac{2\pi L^3}{G^2M^2m^3(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$$

$L=\sqrt{GMm^2r_0(1-\varepsilon^2)}$ を代入すると

$$T = \frac{2\pi r_0^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$ を得る。

解法その2 ： 軌道の囲む面積を，面積速度で割ることで求める利口な方法

軌道の囲む楕円の面積を S とすると，楕円の面積の公式により，

$$S = \pi\cdot(長半径)\cdot(短半径) = \pi\cdot r_0\cdot\sqrt{1-\varepsilon^2}\,r_0 = \pi\sqrt{1-\varepsilon^2}\,r_0^2.$$

一方，微分積分IIで学ぶ極座標表示曲線 $r=r(\theta)$ の囲む図形の面積の一般式によると，

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\theta.$$

積分変数を時刻 t に変更すると $S = \frac{1}{2}\int_0^T r^2\dot\theta\,dt.$

$L=mr^2\dot\theta$ を使うと， $S = \frac{1}{2}\int_0^T\frac{L}{m}\,dt = \frac{L}{2m}T$ （∵ L は定数）

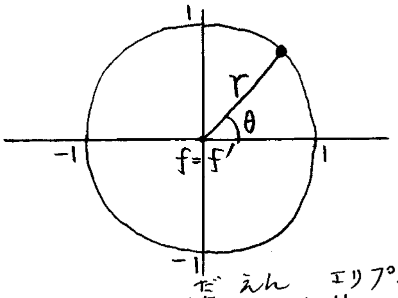
$$\therefore\ \frac{L}{2m}T = \pi\sqrt{1-\varepsilon^2}\,r_0^2.$$

$$\therefore\ T = \frac{2\pi m\sqrt{1-\varepsilon^2}\,r_0^2}{L} = \frac{2\pi m\sqrt{1-\varepsilon^2}\,r_0^2}{\sqrt{GMm^2r_0(1-\varepsilon^2)}} = \frac{2\pi r_0^{3/2}}{\sqrt{GM}}.$$

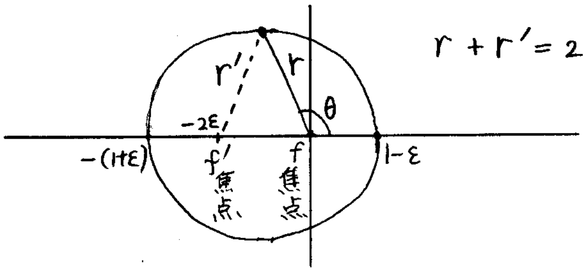
力学Ⅱ 講義ノートの補足 <4>

D6 方程式 $r = \dfrac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}$ の表す曲線

1. $\varepsilon = 0$: 円(えん) (circle(サークル))

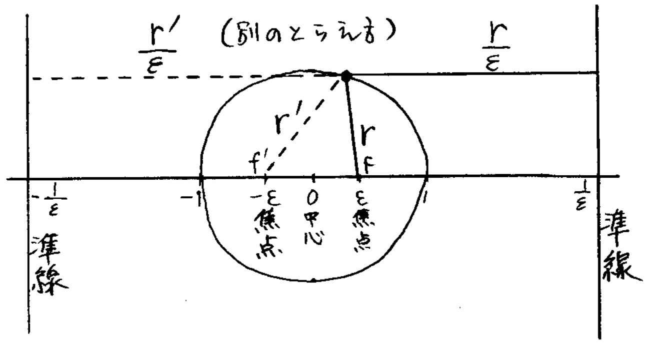


2. $0<\varepsilon<1$: 楕円(だえん) (ellipse(エリプス))



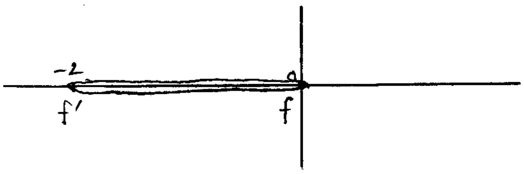
$r + r' = 2$

$1-\varepsilon^2$ (>0) 倍に拡大して図示すると
$\left(r = \dfrac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos\theta}\right)$



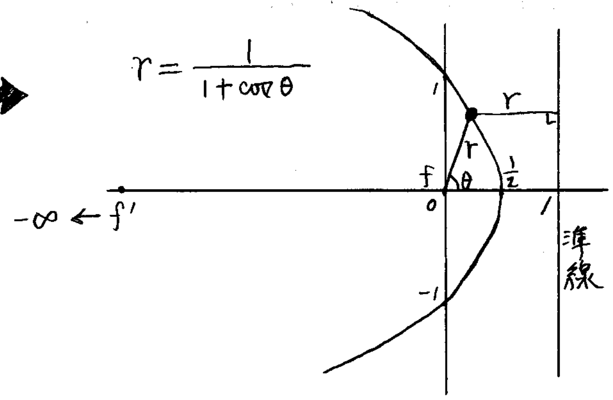
3. $\varepsilon = 1$: 放物線(ほうぶつせん) (parabola(パラボラ))

$$r = \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos\theta} = \begin{cases} 0 & (\theta \neq \pi) \\ 1+\varepsilon = 2 & (\theta = \pi) \end{cases}$$



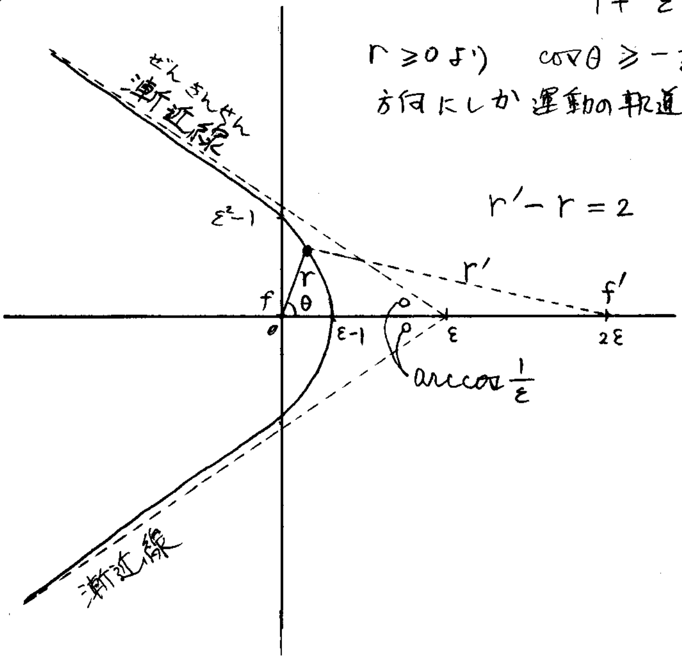
$1-\varepsilon^2$ 倍しないで描くと:

$r = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$



4. $\varepsilon > 1$: 双曲線(そうきょくせん) (hyperbola(ハイパーボラ))

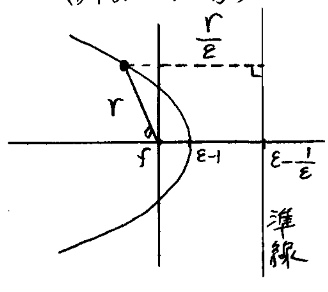
ε^2-1 (>0) 倍して描く: $r = \dfrac{\varepsilon^2-1}{1+\varepsilon\cos\theta}$



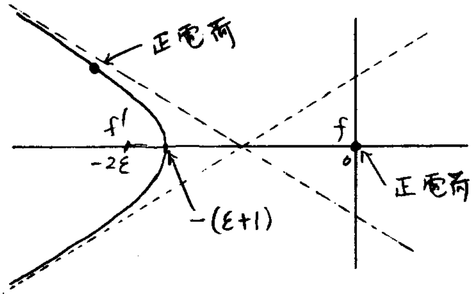
$r \geq 0$ より $\cos\theta \geq -\frac{1}{\varepsilon}$ をみたす方向にしか運動の軌道は存在しない。

$r' - r = 2$

(別のとらえ方)



(補足) $r = -\dfrac{(\varepsilon^2-1)}{1+\varepsilon\cos\theta}$ は 斥力による散乱の軌道を表す。



力学II 講義ノートの補足 <5>

D7 内力の和がゼロになることの説明：

$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\(j\neq N)}}^{N} \mathbb{F}_{ji}$ （$=\sum_{i\neq j}^{N} \mathbb{F}_{ji}$ 等と略記されることが多い）は

右の表に現れる $\mathbb{F}_{ji}$ を全て加え合わせたものである。

$j \backslash i$	1	2	3	…	N
1	$\times$	$\mathbb{F}_{12}$	$\mathbb{F}_{13}$	…	$\mathbb{F}_{1N}$
2	$\mathbb{F}_{21}$	$\times$	$\mathbb{F}_{23}$	…	$\mathbb{F}_{2N}$
3	$\mathbb{F}_{31}$	$\mathbb{F}_{32}$	$\times$	…	$\mathbb{F}_{3N}$
⋮	⋮	⋮	⋮	$\times$	⋮
N	$\mathbb{F}_{N1}$	$\mathbb{F}_{N2}$	$\mathbb{F}_{N3}$	…	$\times$

作用・反作用の法則により

$$\mathbb{F}_{ij} + \mathbb{F}_{ji} = \mathbb{0} \quad (i \neq j)$$

が成り立っているので

$$\sum_{i\neq j}^{N} \mathbb{F}_{ji} = (\mathbb{F}_{12}+\mathbb{F}_{21}) + (\mathbb{F}_{31}+\mathbb{F}_{13}) + (\mathbb{F}_{32}+\mathbb{F}_{23}) + \cdots = \mathbb{0}+\mathbb{0}+\mathbb{0}+\cdots = \mathbb{0}$$

となる。

D8 一定速度でロープを引き上げる問題の、エネルギー的考察：

問1：ロープを引き上げる手のなす仕事率 W を求めよ。

（仕事率 ＝ 単位時間あたりの仕事）

問2、ロープの力学的エネルギー E の増加率 $\frac{dE}{dt}$ を求めよ。

問3、現実の世界ではエネルギーは保存する。実際にロープを引き上げるとき、問1，問2の答の差はどこへ行くか？

答1、 $W = Fv = \rho x g v + \rho v^3$

答2、
$$E = \rho x \cdot \frac{1}{2} x \cdot g + \frac{1}{2}\rho x \cdot v^2 = \frac{1}{2}\rho g x^2 + \frac{1}{2}\rho v^2 x$$

$$\frac{dE}{dt} = \rho g x v + \frac{1}{2}\rho v^3$$

（注：ρ, g, v は一定，$\frac{dx}{dt} = v$）

答3. $W - \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\rho v^3$ は、ロープの立ち上がる部分でのロープの構成部分間の非弾性衝突で熱エネルギーになると考えられる。

力学Ⅱ 講義ノートの補足 ＜6＞

D9 重心の運動方程式の意味すること：

① 重心は、全質量がその点に集まり、全外力がその点に働くとした場合と同じ運動をする。

② 内力は重心運動に影響を与えない。

③ 外力が働かなければ重心は等速直線運動をする。ある時刻に静止していれば、外力が働かない限り重心は常に静止したままである。

D10 ボート上を歩く問題の解法Ⅰ：

運動量保存則を利用する。（高校生の解き方を厳密化したもの）

右向きを正の方向として

$$m\,v(t) + M\,V(t) = m\underbrace{v(t_0)}_{=0} + M\underbrace{V(t_0)}_{=0} = 0$$

$$\therefore\quad v(t) = -\frac{M}{m}V(t)$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\{\underbrace{v(t)-V(t)}_{\text{相対速度}}\}\,dt = l$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{-\frac{M}{m}V(t)-V(t)\right\}dt = l$$

$$-\left(\frac{M}{m}+1\right)\int_{t_0}^{t_1}V(t)\,dt = l$$

$$d = \int_{t_0}^{t_1}V(t)\,dt = -\frac{1}{1+\frac{M}{m}}\,l = -\frac{m}{M+m}\,l \quad (\text{答})$$

D11 2体運動の重心運動と相対運動への分離について：

力学変数が $\mathbf{r}_1$ と $\mathbf{r}_2$ のときは、運動方程式①と②には $\mathbf{r}_1$ と $\mathbf{r}_2$ が混在していた。力学変数を $\mathbf{r}_G$ と $\mathbf{r}$ に変換すると、運動方程式は $\mathbf{r}_G$ だけを含むもの③と $\mathbf{r}$ だけを含むもの④に分離した。③は容易に解が求まる。残るは④を解くだけである。④は一体の運動方程式と同じ形をしている。①+②の2体問題が、④の一体問題に還元されたのである。

力学II 講義ノートの補足 <7>

D12 内力が全角運動量を変化させないこと：

$\mathbf{r}_i$ ： 質点 i の位置ベクトル.

$\mathbf{F}_{ji}$ ： 質点 j が質点 i に及す力.

・自分自身に力を及すことはできないので、$\mathbf{F}_{ii} = \mathbf{0}$.

・作用・反作用の法則により　$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$.

$$\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \left(\sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ji} \right)$$ としたとき、$\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ を示せばよい。

$$\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_i \times (-\mathbf{F}_{ij})$$

$$= -\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji}$$ （i を j，j を i に置きかえた。）

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{2}(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} - \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji}$$

質点間に働く力が中心力であるとすれば、即ち、$\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \parallel \mathbf{F}_{ji}$ なら

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji} = \mathbf{0}$$

$$\therefore \ \mathbf{Z} = \mathbf{0}$$

D13 （地球＋月）系における全角運動量の保存.

（全角運動量）＝（地球の自転の角運動量）＋（月の公転の角運動量）＋（月の自転の…）

（相対運動の）

小さい

$$L = I\,\Omega + m\,r^2\,\omega \quad \cdots ①$$

Ω：地球の自転の角速度

ω：月の公転の角速度

r：月の軌道半径

m：月の質量（換算質量）

I：比例定数（慣性モーメントと言う）

公転は円運動として　$m r \omega^2 = \dfrac{k}{r^2} \cdots ②$　$(k = G\,M\,m)$

m：月の質量

M：地球の質量

G：重力定数

（つづく）

力学Ⅱ 講義ノートの補足 <8>

D13 (つづき)

②式より $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\, r^{-3/2} \cdots ③$ $\quad \therefore \frac{d\omega}{dr} < 0.$

③式を①式に代入すると. $\Omega = \frac{L}{I} - \frac{\sqrt{km}}{I} r^{1/2} \cdots ④$ $\quad \therefore \frac{d\Omega}{dr} < 0.$

観測によると $\frac{d\Omega}{dt} < 0$ (地球の自転は減速している).

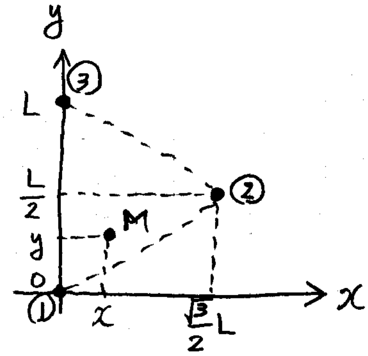
$\therefore \frac{dr}{dt} = \underbrace{\frac{dr}{d\Omega}}_{負} \cdot \underbrace{\frac{d\Omega}{dt}}_{負} > 0.$ 即ち、月は遠ざかりつつある.

- 時間がたつと、Ω, ω は減少し, r は増加する.
- 昔は現在より, Ω, ω は大きく, r は小さかった。

D14 三脚テーブルの荷重分配.

問: 1辺の長さがLの正三角形の頂点に柱(脚)のあるテーブル上に質量Mの物体を置くとき、各柱にかかる力を求めよ. 天板の重さは無視せよ。

答: 柱①,②,③ および物体Mの座標を右図のようにとる。柱ⓘは $+z$ 方向に F_i の力を, 物体Mは $-z$ 方向に Mg の力をテーブルの天板に加える.



力のつりあいより $\quad F_1 + F_2 + F_3 - Mg = 0 \quad \cdots (1)$

x軸方向の力のモーメントのつりあいより

$$0 \cdot F_1 + \frac{L}{2} \cdot F_2 + L \cdot F_3 + y \cdot (-Mg) = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} F_2 + F_3 = \frac{y}{L} Mg \quad \cdots (2)$$

y軸方向の力のモーメントのつりあいより

$$0 \cdot F_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} L \cdot F_2 + 0 \cdot F_3 + x \cdot (-Mg) = 0$$

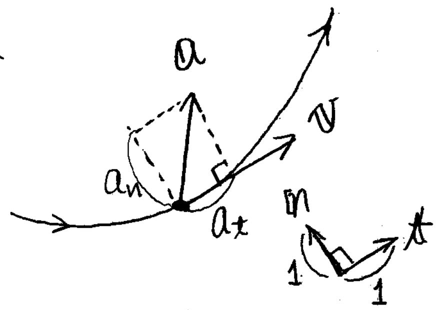
$$\therefore F_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{x}{L} Mg \quad \cdots (3)$$

(1)〜(3)より

$$\begin{cases} F_1 = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{3}L} - \frac{y}{L}\right) Mg \\ F_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{x}{L} Mg \\ F_3 = \left(\frac{y}{L} - \frac{x}{\sqrt{3}L}\right) Mg \end{cases}$$

力学II 講義ノートの補足 <9>

D15 加速度の接線成分と法線成分



位置 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ （t：時刻）

速度 $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$

加速度 $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$

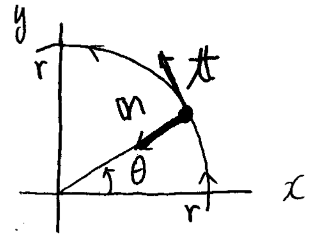
$\begin{cases} a_t：\mathbf{a} \text{の} \mathbf{v} \text{に平行な成分。加速度の接線成分という.} \\ a_n：\mathbf{a} \text{の} \mathbf{v} \text{に垂直な成分。加速度の法線成分という.} \end{cases}$

$\mathbf{t} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ （接線単位ベクトル）を使って $a_t = \mathbf{a}\cdot\mathbf{t}$ として計算できる．また $\mathbf{a}_n = \mathbf{a} - a_t\mathbf{t}$，$a_n = |\mathbf{a}_n|$ として a_n は計算できる．$\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{a}_n}{a_n}$ は主法線単位ベクトルとよばれる．

$\mathbf{a} = a_t\mathbf{t} + a_n\mathbf{n}$ と書き表せる．

D16 一般の（非等速の）円運動の a_t と a_n

$\mathbf{r} = r(\cos\theta, \sin\theta)$，$r>0$，$\dot{r}=0$，$\dot{\theta}=\omega>0$，$\dot{\omega}\neq 0$



$\mathbf{t} = (-\sin\theta, \cos\theta)$

$\mathbf{n} = (-\cos\theta, -\sin\theta)$

$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = r(-\sin\theta, \cos\theta)\dot{\theta} = r\omega\,\mathbf{t}$

$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = r\ddot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta) + r\dot{\theta}^2(-\cos\theta, -\sin\theta)$

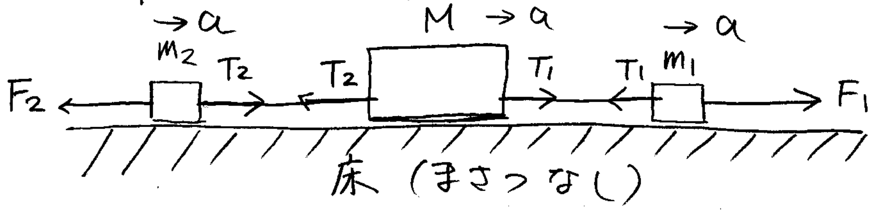
$= r\dot{\omega}\,\mathbf{t} + r\omega^2\mathbf{n}$

$\therefore \begin{cases} a_t = r\dot{\omega} & \text{㊟ } \dot{\omega}=0 \text{（}\omega\text{が一定）のとき } a_t = 0 \\ a_n = r\omega^2 & \text{㊟ } \dot{\omega} \text{に依存しないので、}\omega\text{が一定のときと同じ表式.} \end{cases}$

└ 教科書では a_r と書いている．

力学Ⅱの講義ノートの補足＜10＞

D17　定滑車と2つのおもりの系に対応する並進運動のみを行う系



運動方程式

$$
\begin{cases}
m_1 a = -T_1 + F_1 \\
M a = T_1 - T_2 \\
m_2 a = T_2 - F_2
\end{cases}
$$

$$Ma = (F_1 - m_1 a) - (m_2 a + F_2)$$

$$\therefore\ a = \frac{F_1 - F_2}{m_1 + m_2 + M}$$

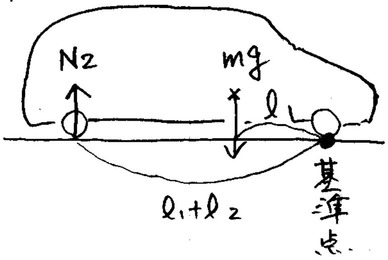
$F_1 \to m_1 g$，$F_2 \to m_2 g$，$M \to \dfrac{I}{R^2}$ とおきかえると

滑車の系の答になる。

D18　車の前輪・後輪にかかる抗力を求めるとき，重心以外の点を力のモーメントの基準点にとるときの注意点

例えば前輪の接地点を力のモーメントの基準点にとると，

力のモーメントのつりあい条件は，



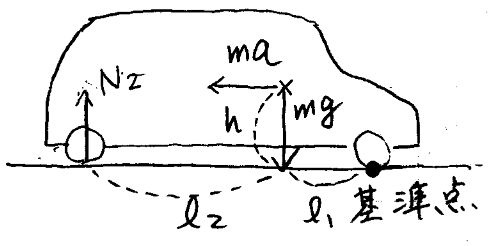
$$mg l_1 = N_2 (l_1 + l_2) \quad (\text{誤り})$$

$$\therefore\ N_2 = \frac{l_1}{l_1 + l_2} mg \quad (\text{誤り})$$

正しい答を得るには，慣性力 $-ma$ が車の重心に働くとせよ．

$$mg l_1 + mah = N_2 (l_1 + l_2) \quad (\text{正しい})$$

$$\therefore\ N_2 = \frac{mg l_1 + mah}{l_1 + l_2} \quad (\text{正答})$$



力学II の講義ノートの補足 <11>

$\boxed{D19}$ 斜面を滑らずに転がる球の運動に関する追加の問題

★問. 初期条件「$t=0$ で $x=\dot{x}=0$」を満たす運動方程式の解 $x(t)$ を書き下せ。

答. $$\ddot{x} = \frac{M}{M+\frac{I}{a^2}} g \sin\theta \quad (\text{運動方程式})$$

右辺が定数なので解は自由落下の解と同じ形である。

$$x = \frac{1}{2} \frac{M}{M+\frac{I}{a^2}} g(\sin\theta)\, t^2 \quad (\text{答})$$

計算を詳しく書けば、

$\ddot{x} = \alpha$ (定数) なら

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0) + \int_0^t \underbrace{\ddot{x}(t')}_{\alpha} dt' = \dot{x}(0) + \alpha t$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(t)dt = x(0) + \int_0^t (\dot{x}(0)+\alpha t')dt'$$

$$= x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$x(0)=\dot{x}(0)=0$ より $\quad x(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2$.

★問. 最大静止摩擦係数を μ とするとき、球が滑らずに転がるための θ の条件を求めよ.

答. $$F_\perp = Mg\cos\theta,$$

$$F = \frac{I}{a^2}\ddot{x} = \frac{I}{I+Ma^2} Mg\sin\theta$$

滑らないための条件は $\quad F \leq \mu F_\perp$

$$\therefore \frac{I}{I+Ma^2} Mg\sin\theta \leq \mu Mg\cos\theta \qquad \therefore \tan\theta \leq \mu\cdot\left(1+\frac{Ma^2}{I}\right) \ (\text{答})$$

★問. 運動エネルギー E_K および重力の位置エネルギー E_G を時刻 t の関数として表せ。E_G は $t=0$ の位置でゼロと定義せよ。また力学的エネルギー $E=E_K+E_G$ が t に依存しないことを確かめよ。(滑りがない→まさつ力は仕事をしない→Eは保存される).

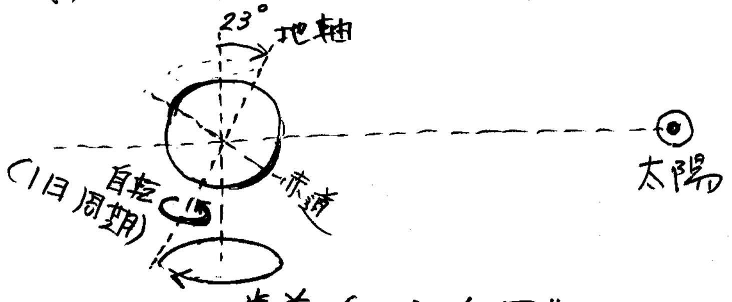
答. $$E_K = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{(Mag\sin\theta\, t)^2}{2(Ma^2+I)}$$

$$E_G = Mg(-x\sin\theta) = -(E_K\text{と同じ式}), \quad E = E_K + E_G = 0.$$

力学IIの講義ノートの補足〈12〉

D20 歳差運動についてのコメント

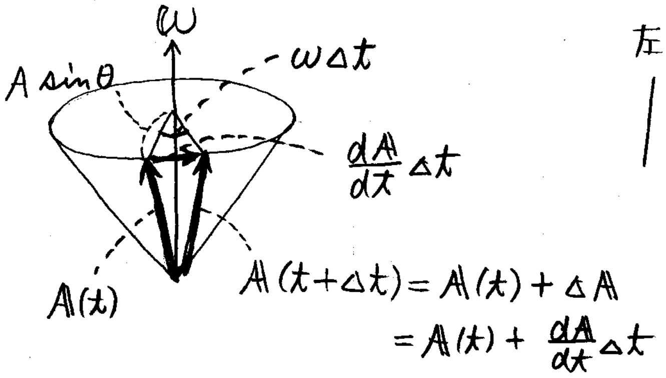
1. コマが速く回るほど（ωが大きいほど），歳差運動はゆっくりになる（Ωが小）.
2. コマの場合のように、外力が回転軸を倒そうとするときは，歳差運動とコマの回転の回る向きは同じである。
3. 地軸（地球の自転軸）の歳差運動は、太陽による潮汐力が地軸を立てようとする（公転面に垂直にしようとする）ためにおきる。
   このように、外力が回転軸を立てるように働く場合は（$N>0$のときは）歳差運動は自転とは逆の向きに回る。



歳差（25800年周期）

D21 $\dfrac{d\mathbb{A}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{A}$ の導出.

角速度$\boldsymbol{\omega}$で回転する座標系で見て時間変化しないベクトル$\mathbb{A}$の，静止座標系で見ての時間変化率$\dfrac{d\mathbb{A}}{dt}$を求めたい。



左図より

$$\left|\frac{d\mathbb{A}}{dt}\right|\Delta t = A\sin\theta\ \omega\Delta t = |\boldsymbol{\omega}\times\mathbb{A}|\,\Delta t$$

方向も考えて

$$\frac{d\mathbb{A}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbb{A}$$ となる。

D22 $\dfrac{d\mathbb{A}}{dt} = \left(\dfrac{d^*}{dt} + \boldsymbol{\omega}\times\right)\mathbb{A}$ の導出

角速度$\boldsymbol{\omega}$で回転する座標系の座標軸をξ, η, ζ軸とし，それらの軸方向の単位ベクトルを$\mathbb{e}_\xi, \mathbb{e}_\eta, \mathbb{e}_\zeta$とする。

$\mathbb{A} = A_\xi \mathbb{e}_\xi + A_\eta \mathbb{e}_\eta + A_\zeta \mathbb{e}_\zeta$ と表したとき、微分公式により，

$$\dot{\mathbb{A}} = \dot{A}_\xi \mathbb{e}_\xi + \dot{A}_\eta \mathbb{e}_\eta + \dot{A}_\zeta \mathbb{e}_\zeta + A_\xi \dot{\mathbb{e}}_\xi + A_\eta + \dot{\mathbb{e}}_\eta + A_\zeta + \dot{\mathbb{e}}_\zeta$$

（つづく）

力学IIの講義ノートの補足 <13>

D22 (つづき) 右辺の最初から3項は、ωで回転する系で見たときのAの時間変化率である。仮に、これを $\frac{d^*}{dt}A$ と書き表すことにする。

右辺第4〜6項は、座標系が回転していることによる変化である。

e_ξ は ωで回転しているので $\dot{e}_\xi = \omega \times e_\xi$ である。

同様に、$\dot{e}_\eta = \omega \times e_\eta$, $\dot{e}_\zeta = \omega \times e_\zeta$ である。

$$\therefore \dot{A} = \frac{d^*}{dt}A + A_\xi\, \omega \times e_\xi + A_\eta\, \omega \times e_\eta + A_\zeta\, \omega \times e_\zeta$$

$$= \frac{d^*}{dt}A + \omega \times (A_\xi e_\xi + A_\eta e_\eta + A_\zeta e_\zeta)$$

$$= \left(\frac{d^*}{dt} + \omega \times\right) A .$$

D23 一定角速度で回転する系で見た運動方程式の導出.

$$\dot{r} = \frac{d^*}{dt}r + \omega \times r$$

$$\ddot{r} = \frac{d^*}{dt}\left(\frac{d^*}{dt}r + \omega \times r\right) + \omega \times \left(\frac{d^*}{dt}r + \omega \times r\right)$$

$$= \frac{d^{2*}}{dt^2}r + 2\,\omega \times \frac{d^*}{dt^*}r + \omega \times (\omega \times r)$$

$\frac{d^*}{dt}\omega = 0$ とする。(一定角速度の場合)

ここで $a = \frac{d^{2*}}{dt^2}r$ と $v = \frac{d^*}{dt^*}r$ は ωで回転する系で見た物体の加速度と速度である。

したがって運動方程式 $m\ddot{r} = F$ は

$$m a + 2m\, \omega \times v + m\, \omega \times (\omega \times r) = F$$

と書き直される。

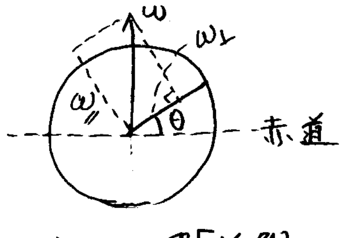
$$\therefore m a = F + \underbrace{2m\, v \times \omega}_{= -2m\, \omega \times v} - m\, \omega \times (\omega \times r)$$

D24 地球の自転によるコリオリ力が水平面内の運動に及す影響.

ωを緯度θでの水平面内の成分 $\omega_{/\!/}$ と鉛直方向の成分 $\omega_\perp$ とに分解する。

$$\omega = \omega_{/\!/} + \omega_\perp$$

$$\begin{cases} \omega_{/\!/} = \omega \cos\theta \\ \omega_\perp = \omega \sin\theta \end{cases}$$



$F_{Cor} = 2m\, v \times \omega = 2m\, v \times \omega_{/\!/} + 2m\, v \times \omega_\perp$ (つづく)

物体の速度 v は水平面内 (即ち $v \cdot \omega_\perp = 0$) とすると

力学Ⅱの講義ノートの補足<14>

D24

(つづき)

$\mathbf{F}_{cor}^{\perp} = 2m\,\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}_{\parallel}$ ： 鉛直方向

$\mathbf{F}_{cor}^{\parallel} = 2m\,\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}_{\perp}$ ： 水平面内（北(南)半球では$\mathbf{v}$の右(左)90°方向）

∴ 水平面内の運動に働くコリオリ力の水平方向の成分は

$$F_{cor}^{\parallel} = 2mv\omega_{\perp} = m\cdot 2\omega v\sin\theta$$

↑ 緯度

D25 コリオリ力と遠心力の相補性

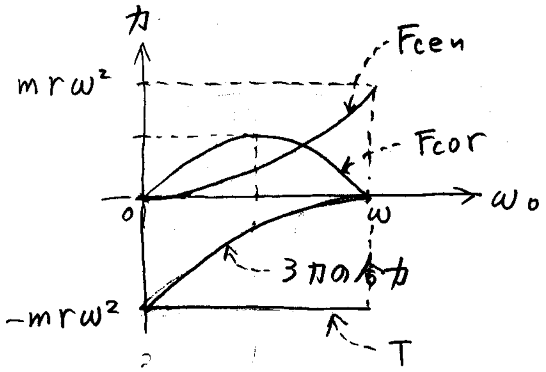
向心力 $T=mr\omega^2$を受けて半径r, 角速度ωの等速円運動をしている質量mの物体を、角速度ω_0で回転している座標系でみると、物体は角速度$\omega-\omega_0$, 速さ$v=r(\omega-\omega_0)$で円運動をしている

物体に働く力は $T\ (=mr\omega^2)$ に加えて、

コリオリ力： $F_{cor}=2m\omega_0 v = 2m\omega_0(\omega-\omega_0)r$

遠心力： $F_{cen}=mr\omega_0^2$

である。方向は（$\omega>\omega_0$として）共に中心から遠ざかる方向である。



FcorとFcenは観測者によって（ω_0によって）変化する。両方の項を足しあわせてこそ、運動を正しく記述できるのである。

例えば3力の和をもれなくとってはじめて

$$-T+F_{cor}+F_{cen} = -mr\omega^2 + 2mr\omega_0(\omega-\omega_0) + mr\omega_0^2$$
$$= -mr(\omega-\omega_0)^2$$

となり、角速度$\omega-\omega_0$の円運動に必要な向心力の大きさに正しく一致するのである。

Kepler motion

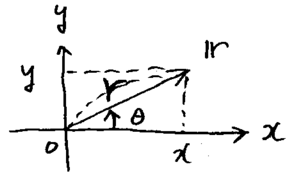
下記の運動方程式の解を求めたい（$\mathbf{r}$を時刻tの関数として表したい）。

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{-----①} \qquad (\text{但し } r = |\mathbf{r}|)$$

以下では位置を $\mathbf{r} = (x, y)$、速度を $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}, \dot{y})$、加速度を $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = (\ddot{x}, \ddot{y})$ と書く。

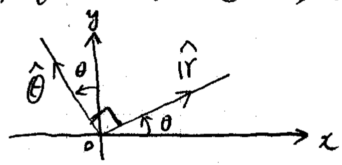
2次元極座標 r, θ を導入する。

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & \text{-----②} \\ y = r\sin\theta & \text{----③} \end{cases}$$



x軸、y軸をそれぞれ角度θだけ回転させた方向の単位ベクトルを $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ とすると

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \dfrac{\mathbf{r}}{r} = (\cos\theta, \sin\theta) & \text{---④} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = (-\sin\theta, \cos\theta) & \text{----⑤} \end{cases}$$



である。$\mathbf{v}$ を2方向 $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ の成分に分解する、即ち

$$\mathbf{v} = v_r\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad v_r = \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{r}}, \quad v_\theta = \mathbf{v}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \text{----⑥}$$

の形に表せば、後述の $\boxed{\#1}$ に示した計算により下の表式が得られる。

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta} \quad \text{-----⑦}$$

（⑦式は、さしあたりは使わない。後に解析力学による扱いのときに使う）

同様に $\mathbf{a}$ を分解する、即ち

$$\mathbf{a} = a_r\hat{\mathbf{r}} + a_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad a_r = \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{r}}, \quad a_\theta = \mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \text{----⑧}$$

の形に表せば後述の $\boxed{\#2}$ に示した計算により下の表式が得られる。

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad \text{-----⑨}, \qquad a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \quad \text{---⑩}$$

$\mathbf{F}$ は $\hat{\mathbf{r}}$ 方向の成分しか持たないので

$$\mathbf{F} = F_r\hat{\mathbf{r}} + F_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad F_r = \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{r}}, \quad F_\theta = \mathbf{F}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad \text{---⑪}$$

とおくと下の表式を直ちに得る。

$$F_r = -\frac{GMm}{r^2} \quad \text{---⑫}, \qquad F_\theta = 0 \quad \text{----⑬}$$

運動方程式 $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$（①式と同じ式）の両辺と $\hat{\mathbf{r}}$ および $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ との内積をとると

[$\hat{\mathbf{r}}$との内積]

$$m\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{r}}$$

$$\therefore\ m a_r = F_r \quad \text{----⑭}$$

⑭に⑨,⑫を代入すると

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad \text{---⑯}$$

[$\hat{\boldsymbol{\theta}}$との内積]

$$m\mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{F}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\therefore\ m a_\theta = F_\theta \quad \text{----⑮}$$

⑮に⑩,⑬を代入すると

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \quad \text{-----⑰}$$

が得られる。⑯、⑰式が①を r, θ で表した結果である。

P.16 ⑩の右辺を変形して下式を得る。

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \quad \text{-----} ⑱$$

したがって⑰式は下式に等しい。

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad \text{---} ⑲$$

したがって $r^2\dot{\theta}$ は定数（時間変化しない量）である。これに定数mを掛けたものをLと書くことにする。これは角運動量を表す。

$$m r^2 \dot{\theta} = L \quad \text{----} ⑳ \quad （但し、Lは定数（角運動量））$$

⑳より、$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$，これを⑯の左辺の$\dot{\theta}$に代入して下式を得る

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2 r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad \text{-----} ㉑$$

後述の $\boxed{\#3}$ の計算で導くように、㉑の解は下式の形に表すことができる

$$r = \frac{\lambda}{1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)} \quad \text{----} ㉒$$

㉒式でλとθ_0は定数であり、λは角運動量を用いて下記のように表せる。

$$\lambda = \frac{L^2}{GMm^2} \quad \text{----} ㉓$$

㉒式はrとθの関係式であるので、運動の軌跡を表している。（楕円等である）。

微分方程式を解くとはrとθをtの関数として表すことだが、それは⑳式の解として容易に求まる。（$t=t_0$のとき$\theta=\theta_0$とする）

$$t = t_0 + \frac{L^3}{G^2M^2m^3}\int_0^{\theta-\theta_0} \frac{d\Theta}{(1+\varepsilon\cos\Theta)^2} \quad \text{-----} ㉔$$

㉔式右辺の積分は「微分積分II」で学ぶやり方で求まり、
(http://serv.apphy.u-fukui.ac.jp/~tajima/cs/cs_calc_irftf.pdf に計算を詳しく記す)

$$t = t_0 + \frac{L^3}{G^2M^2m^3}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon^2}\left\{\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{\theta-\theta_0}{2}\right) - \varepsilon\frac{\sin(\theta-\theta_0)}{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)}\right\} \cdots ㉕$$

を得る。㉕式の逆関数が$\theta = \theta(t)$を与える。

㉒式に$\theta = \theta(t)$を代入したものが、$r = r(t)$である。

【補足】2年生で学ぶ解析力学では以下のようにして⑯、⑰を導く。

⑥、⑦式より $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ ∴ ラグランジアンは、$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r}$。

オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 & \Rightarrow ⑯式が導かれる。\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 & \Rightarrow ⑰式が導かれる。\end{cases}$$

#1

$x(t) = r(t)\cos\theta(t)$ の両辺を t で微分する.

・積の微分公式 $\frac{d}{dt}\{f(t)g(t)\} = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$

・合成関数の微分公式 $\frac{d}{dt}\cos\theta(t) = \left(\frac{d}{d\theta}\cos\theta\right)\cdot\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) = -\frac{d\theta}{dt}\sin\theta$

を用い, $\frac{d}{dt}f(t) = \dot{f}$ と書くと.

$$\underline{\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta}$$

同様に $y = r\sin\theta$ の両辺を t で微分すると.

$$\underline{\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta}$$

● $\underline{v_r} = v\cdot\hat{r} = (\dot{x}, \dot{y})\cdot(\cos\theta, \sin\theta) = \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta$

$= \dot{r}\cos^2\theta - r\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta + \dot{r}\sin^2\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta$

$= \dot{r}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \underline{\dot{r}}$

$\underline{v_\theta} = v\cdot\hat{\theta} = (\dot{x}, \dot{y})\cdot(-\sin\theta, \cos\theta) = -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta$

$= -\dot{r}\cos\theta\sin\theta + r\dot{\theta}\sin^2\theta + \dot{r}\sin\theta\cos\theta + r\dot{\theta}\cos^2\theta$

$= r\dot{\theta}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \underline{r\dot{\theta}}$

#2

● $\ddot{x} = \frac{d}{dt}\dot{x} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)$

$= \left(\frac{d}{dt}\dot{r}\right)\cos\theta + \dot{r}\left(\frac{d}{dt}\cos\theta\right) - \left(\frac{d}{dt}r\right)\dot{\theta}\sin\theta - r\left(\frac{d}{dt}\dot{\theta}\right)\sin\theta - r\dot{\theta}\left(\frac{d}{dt}\sin\theta\right)$

$= \ddot{r}\cos\theta \underbrace{- \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - \dot{r}\dot{\theta}\sin\theta}_{-2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta} - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta$

$\ddot{y} = \frac{d}{dt}\dot{y} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)$

$= \ddot{r}\sin\theta + \underbrace{\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{r}\dot{\theta}\cos\theta}_{2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta} + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta$

$\underline{a_r} = a\cdot\hat{r} = (\ddot{x}, \ddot{y})\cdot(\cos\theta, \sin\theta) = \ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta$

$= \ddot{r}\cos^2\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta\cos\theta - r\dot{\theta}^2\cos^2\theta$

$+ \ddot{r}\sin^2\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta\sin\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta\sin\theta - r\dot{\theta}^2\sin^2\theta$

$= \underline{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2}$

P.18

$$a_\theta = \boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\ddot{x},\ddot{y})\cdot(-\sin\theta,\cos\theta) = -\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta$$

$$= -\ddot{r}\cos\theta\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\sin^2\theta + r\ddot{\theta}\sin^2\theta + r\dot{\theta}^2\cos\theta\sin\theta$$

$$+\ddot{r}\sin\theta\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos^2\theta + r\ddot{\theta}\cos^2\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

$\boxed{\#3}$

$r=\frac{1}{u}$ とおくと、⑳式を使って、

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{m}u^2 \qquad \therefore \frac{\dot{\theta}}{u^2} = \frac{L}{m} \quad \cdots\cdots (\mathrm{i})$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{u} = \left(\frac{d}{du}\frac{1}{u}\right)\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\dot{u}$$

$$= -\frac{1}{u^2}\dot{\theta}\frac{\dot{u}}{\dot{\theta}} = -\frac{\dot{\theta}}{u^2}\frac{\dot{u}}{\dot{\theta}} \underset{(\mathrm{i})}{=} -\frac{L}{m}\frac{\dot{u}}{\dot{\theta}} = -\frac{L}{m}\frac{\frac{du}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta} \quad \cdots (\mathrm{ii})$$

$$\ddot{r} = \frac{d}{dt}\dot{r} \underset{(\mathrm{ii})}{=} \frac{d}{dt}\left(-\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}\right) = \left\{\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta}\right)\right\}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{L}{m}\frac{d^2u}{d\theta^2}\dot{\theta} \underset{(\mathrm{i})}{=} -\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \quad (\mathrm{iii})$$

(i), (ii), (iii) を ㉑式に代入すると、

$$-\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{L^2}{m^2}u^3 + GMu^2 = 0$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{GMm^2}{L^2} = 0 \quad \cdots\cdots (\mathrm{iv})$$

(iv)の解は A, θ_0 を任意の定数として

$$u = A\cos(\theta-\theta_0) + \frac{GMm^2}{L^2} \quad \cdots (\mathrm{v})$$

である。Aのかわりに $\varepsilon = \frac{AL^2}{GMm^2}$ を定数として用いれば (v)は

$$r = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)} \quad \cdots (\mathrm{vi})$$

となる。

また ㉔式は、以下のようにして求まる

$$\dot{\theta} \underset{⑳}{=} \frac{L}{m}r^{-2} \underset{(\mathrm{vi})}{=} \frac{L}{m}\frac{\{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)\}^2}{\frac{L^4}{G^2M^2m^4}} = \frac{G^2M^2m^3}{L^3}\{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)\}^2$$

$$\frac{L^3}{G^2M^2m^3}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\{1+\varepsilon\cos(\theta-\theta_0)\}^2} = \int_{t_0}^{t}dt = t-t_0$$

但し、$t=t_0$ のとき $\theta=\theta_0$ とした。

質点系の力学についての補足説明

I. 運動エネルギーの、重心運動と重心のまわりの運動への分解

N個の質点の系を考える。i番目の質点の質量をm_i，位置を$\mathbb{r}_i$とする。

全質量は $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$　，重心は $\mathbb{r}_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbb{r}_i}{M}$ である。

重心を基準点にとるときの i番目の質点の位置ベクトルを

$$\mathbb{r}_i' = \mathbb{r}_i - \mathbb{r}_G$$

と書くと、

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbb{r}_i' = 0 \quad \text{----①}$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbb{r}}_i' = 0 \quad \text{---②} \qquad \left(\dot{\mathbb{r}}_i' = \frac{d}{dt} \mathbb{r}_i' \right)$$

が成り立つ。

$$\because \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbb{r}_i' = \sum_{i=1}^{N} m_i (\mathbb{r}_i - \mathbb{r}_G) = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbb{r}_i - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbb{r}_i}{M}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbb{r}_i - M \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbb{r}_i}{M} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbb{r}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbb{r}_i = 0$$

よって①が証明された。次に①の左辺を時間で微分すると

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbb{r}_i' = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt} (m_i \mathbb{r}_i') = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbb{r}}_i'$$

となるが右辺の微分は0なので②を得る。

質点系の全運動エネルギー（kinetic energy）は

$$E_K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbb{r}}_i^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\dot{\mathbb{r}}_G + \dot{\mathbb{r}}_i')^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbb{r}}_G^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i 2 \dot{\mathbb{r}}_G \cdot \dot{\mathbb{r}}_i'}_{\text{(交差項とよぶ)}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbb{r}}_i'^2$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)}_{= M} \dot{\mathbb{r}}_G^2 + \dot{\mathbb{r}}_G \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbb{r}}_i'\right)}_{= 0 \ (\because ②式)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbb{r}}_i'^2$$

$$\therefore E_K = \frac{1}{2} M \dot{\mathbb{r}}_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbb{r}}_i'^2$$

右辺第1項：　重心の運動エネルギー，$\dot{\mathbb{r}}_G$にのみ依存する。
右辺第2項：　重心に相対的な運動のエネルギー，$\dot{\mathbb{r}}_G$の影響を受けない。

$\dot{\mathbb{r}}_G$と$\dot{\mathbb{r}}_i'$の両方に依存する項（交差項（クロスターム）という）の $\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbb{r}}_G \cdot \dot{\mathbb{r}}_i'$ が、重心のもつ特殊性（②式が成立すること）のおかげで消えてくれたので、重心の寄与と、それ以外の自由度の寄与にきれいに2分できたのである。第2項の表すものは、例えば回転、例えば分子の熱運動のエネルギーである。

[問題] 2質点系 $(N=2)$ の場合、運動エネルギー $E_K = \frac{1}{2}m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2^2$ は、

$$E_K = E_{KG} + E_K' , \quad E_{KG} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\boldsymbol{r}}_G^2 , \quad E_K' = \frac{1}{2}m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2'^2$$

と分解される。このとき、相対座標 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$、換算質量 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ を用いて E_K' を表せ。

(答) $$\boldsymbol{r}_1' = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_G = \boldsymbol{r}_1 - \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{r},$$

$$\boldsymbol{r}_2' = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_G = \boldsymbol{r}_2 - \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_1) = \frac{m_1}{m_1+m_2}\boldsymbol{r},$$

$$\therefore E_K' = \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2'^2 = \frac{1}{2}m_1\left(-\frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{r}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m^2 + m_2 m_1^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \underline{\frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2}$$

(したがって $E_K = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{r}}_G^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2$ と表される。)

II. 角運動量の、重心運動と重心のまわりの運動への分解

i 番目の質点の角運動量は、$\boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$ (但し $\boldsymbol{p}_i = m\dot{\boldsymbol{r}}_i$ は運動量)、

N 個の質点系の全運動量は、$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{l}_i$ である。I. と同様に、

$\boldsymbol{r}_G$ と $\boldsymbol{r}_i'$ を用いて $\boldsymbol{L}$ を表すと、

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{r}_G + \boldsymbol{r}_i') \times m_i(\dot{\boldsymbol{r}}_G + \dot{\boldsymbol{r}}_i')$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_G \times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_G + \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_G \times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i' + \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i' \times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_G + \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i' \times m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i'$$

$$= \boldsymbol{r}_G \times \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\right)\dot{\boldsymbol{r}}_G}_{\boldsymbol{P}\ (\text{全運動量})} + \boldsymbol{r}_G \times \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i'\right)}_{0} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}_i'\right)}_{0} \times \dot{\boldsymbol{r}}_G + \sum_{i=1}^{N}\underbrace{\boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{p}_i'}_{\boldsymbol{l}_i'}$$

$$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_G + \boldsymbol{L}' \\ \boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{r}_G \times \boldsymbol{P} \quad \left(\boldsymbol{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N}m_i},\ \boldsymbol{P} = M\dot{\boldsymbol{r}}_G,\ M = \sum_{i=1}^{N}m_i\right) \\ \boldsymbol{L}' = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{l}_i' \quad \left(\boldsymbol{l}_i' = \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{p}_i',\ \boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G,\ \boldsymbol{p}_i' = m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i'\right) \end{cases}$$

$\boldsymbol{L}_G$: 重心運動の角運動量、 $\boldsymbol{r}_G$ と $\dot{\boldsymbol{r}}_G$ にのみ依存する。

$\boldsymbol{L}'$: 重心のまわりの運動による角運動量、$\boldsymbol{r}_G$ と $\dot{\boldsymbol{r}}_G$ に影響されない。

- 例えば、惑星の持つ全角運動量 ($\boldsymbol{L}$、太陽を基準点とする) は、公転の角運動量 ($\boldsymbol{L}_G$) と自転の角運動量 ($\boldsymbol{L}'$) の和である。
- 角運動量を定義するための基準点を変えると $\boldsymbol{L}_G$ は変わるが、$\boldsymbol{L}'$ は変わらない。これは $\boldsymbol{r}_i'$ や $\dot{\boldsymbol{r}}_i'$ が基準点に依存しないからである。

体積積分による慣性モーメントの計算の具体例

N個の質点で構成された剛体をZ軸のまわりに回転させる場合の慣性モーメント

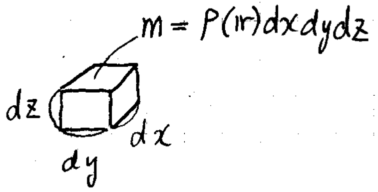
Iは、i番目（$1 \leq i \leq N$）の質点の質量をm_i，位置を$\mathbf{r}_i=(x_i, y_i, z_i)$として、

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \, (x_i^2 + y_i^2)$$

で与えられる。剛体が連続体であるとき（質量が空間的に連続して分布するとき）

は、密度分布を$\overset{\text{ロー}}{\rho}(x, y, z)$として下の式で与えられる

$$I = \underbrace{\iiint}_{\substack{\uparrow \\ \sum_{i=1}^{N}}} \underbrace{(x^2+y^2)}_{\substack{\uparrow \\ (x_i^2+y_i^2)}} \cdot \underbrace{\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}_{\substack{\uparrow \\ m_i}}$$



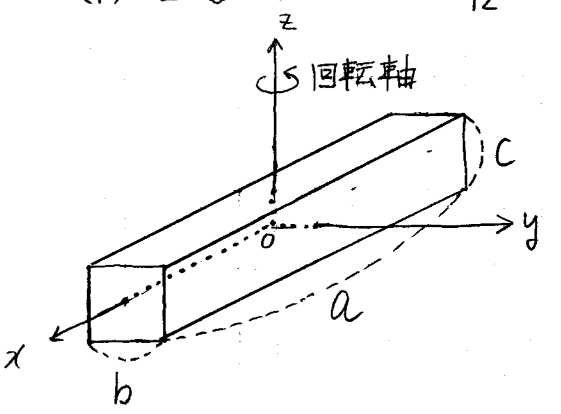
以下では、体積積分を

(i) デカルト座標（Cartesian座標） ---- (x, y, z)
(ii) 円柱座標（円筒座標） ---- (r, φ, z)
(iii) 球座標（三次元極座標） ---- (r, θ, φ)

の三通りで行う例を説明する。体積積分（三重積分）の復習にも好適な内容

なので補足として印刷して配布する。

(i) 直方体　$I = \dfrac{1}{12} M (a^2+b^2)$



$$\begin{cases} \text{質量 } M \\ \text{体積 } V = abc \\ \text{密度 } \rho = \dfrac{M}{V} = \dfrac{M}{abc} \end{cases} \quad \text{（一定とする）}$$

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} \left(\int_{-b/2}^{b/2} \left(\int_{-c/2}^{c/2} (x^2+y^2) \cdot \rho \, dz \right) dy \right) dx$$

上のような書き方では積分区間と変数の対応が読み取りにくいので以下のように書き表すことが多い。

デカルト座標 (x, y, z)

変数の範囲

$$\begin{cases} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

体積要素

$dx\,dy\,dz$

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz \; (x^2+y^2) \cdot \rho$$

$$= \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \; (x^2+y^2) \underbrace{\Big[z \Big]_{z=-c/2}^{c/2}}_{= c}$$

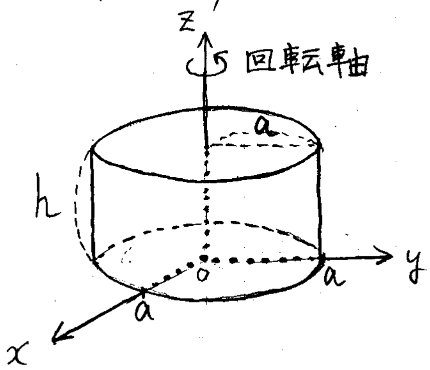
$$= \rho c \int_{-a/2}^{a/2} dx \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=-b/2}^{y=b/2}$$

$$= \rho c \int_{-a/2}^{a/2} dx \left(b x^2 + \frac{b^3}{12} \right)$$

$$= \rho c \left[\frac{1}{3} b x^3 + \frac{b^3}{12} x \right]_{x=-a/2}^{x=a/2}$$

$$= \rho c \, \frac{1}{12} ab (a^2+b^2) = \frac{1}{12} M (a^2+b^2)$$

(ii) 円柱, 円盤



$$I = \frac{1}{2} M a^2$$

$$\begin{cases} \text{質量} & M \\ \text{体積} & V = \pi a^2 h \\ \text{密度} & \rho = \dfrac{M}{V} = \dfrac{M}{\pi a^2 h} \quad (\text{一定とする}) \end{cases}$$

円柱座標 (r, φ, z)

変数の範囲
$$\begin{cases} 0 \leqq r < \infty \\ 0 \leqq \varphi < 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

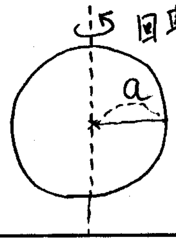
デカルト座標との関係
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

体積要素
$$dx\,dy\,dz = \boxed{r}\,dr\,d\varphi\,dz$$
ヤコビアン

$$I = \int (x^2+y^2)\cdot\rho(\mathbf{r})\,dx\,dy\,dz$$
$$= \rho\int_0^a r\,dr\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^h dz\cdot r^2 \quad (\because x^2+y^2=r^2)$$
$$= \rho\left\{\int_0^a r^3 dr\right\}\left\{\int_0^{2\pi} d\varphi\right\}\left\{\int_0^h dz\right\}$$
$$= \rho\left[\frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{r=a}\cdot\left[\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\cdot\left[z\right]_{z=0}^{z=h}$$
$$= \frac{M}{\pi a^2 h}\cdot\frac{1}{4}a^4\cdot 2\pi\cdot h$$
$$= \frac{1}{2}Ma^2$$

(注) 厚さ h に依存しないので円盤 $(h\to 0)$ でも同じである。

(iii) 球

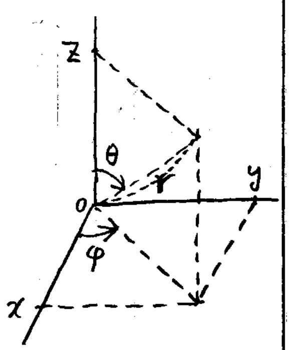


$$I = \frac{2}{5} M a^2$$

$$\begin{cases} \text{質量} & M \\ \text{体積} & V = \dfrac{4}{3}\pi a^3 \\ \text{密度} & \rho = \dfrac{M}{V} = \dfrac{3M}{4\pi a^3} \quad (\text{一定とする}) \end{cases}$$

三次元極座標 (r, θ, φ)
(球座標)

変数の範囲
$$\begin{cases} 0 \leqq r < \infty \\ 0 \leqq \theta \leqq \pi \\ 0 \leqq \varphi < 2\pi \end{cases}$$



デカルト座標との関係
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

体積要素
ヤコビアン
$$dx\,dy\,dz = \boxed{r^2\sin\theta}\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$I = \int (x^2+y^2)\,\rho(\mathbf{r})\,dx\,dy\,dz$$
$$= \rho\int_0^a r^2 dr\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\; r^2\sin^2\theta$$
$$= \rho\left\{\int_0^a r^4 dr\right\}\left\{\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\right\}\left\{\int_0^{2\pi} d\varphi\right\}$$
$$= \frac{3M}{4\pi a^3}\cdot\frac{1}{5}a^5\cdot\frac{4}{3}\cdot 2\pi$$
$$= \frac{2}{5}Ma^2$$