力 学 Ⅱ　　定 期 試 験 問 題

福井大学工学部物理工学科１年対象、担当教員 田嶋、2011 年 2 月 7 日 4 限実施

A3 判問題用紙１枚と B4 判解答用紙１枚を各人に配布する。解答用紙のおもて面の最下部に学籍番号と氏名を明記せよ。解答用紙のうら面は【4】と【5】の答を書くのに用いる。【2】〜【5】については、最終的な答のみでなく説明と計算過程を必ず記せ。

【1】 下記の文の$\boxed{\text{ア}}$〜$\boxed{\text{ト}}$に語群から最も適切な語句を選んで埋めよ。

地球の半径 $R = 6.4 \times 10^6$m, $\boxed{\text{ア}}$定数 $G = 6.7 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}, および $g = 9.8$ ms^{-2} から求めた地球の質量は、約 $6.0 \times 10^{\boxed{\text{イ}}}$ kg である。

地球の公転の周期 $3.2 \times 10^{\boxed{\text{ウ}}}$ 秒、公転軌道の半径 1.5×10^{11} m、および、$\boxed{\text{ア}}$定数 G を使って求めた太陽の質量は、約 $2.0 \times 10^{\boxed{\text{エ}}}$ kg である。

ケプラー運動（距離の２乗に反比例する引力である中心力の下での運動）する質点の軌道の形状は、力学的エネルギーが負のときには$\boxed{\text{オ}}$であり、正確にゼロのときには $\boxed{\text{カ}}$であり、 正のときには$\boxed{\text{キ}}$である。ただし無限遠点で静止している状態でのエネルギーをゼロとする。

ケプラーの第３法則とは、同じ恒星のまわりを回る全ての惑星の公転周期は楕円軌道の長軸半径の$\boxed{\text{ク}}$乗に比例するという法則である。 （覚えていなくても、円軌道の場合について考察すれば高校生にも分かる。）

質点系に働く外力のベクトル和がゼロであるなら、系の$\boxed{\text{ケ}}$は保存される。

質量の無視できる長さ a の剛体棒の両端に質量 m の質点を 1 個ずつ固定して作った（質量 $2m$ の）剛体がある。この剛体棒を 1:2 に内分する点を通り棒に垂直な回転軸についてのこの剛体の慣性モーメントは$\boxed{\text{コ}}$$ma^2$ である。

質量が m、 半径が a の円盤の、対称軸を回転軸にした場合の慣性モーメントは $\frac{1}{2}ma^2$ である。この円盤に質量が無視できる剛体棒をつけて、円盤の中心から $2a$ の距離にある円盤に垂直な回転軸のまわりに回転させる場合の慣性モーメントは$\boxed{\text{サ}}$$ma^2$ である。

太陽の及ぼす重力などが原因で、地軸 (地球の自転軸) の方向は、地球の公転面に垂直な方向のまわりに約 26000 年周期で回転する。これを$\boxed{\text{シ}}$という。

地球の自転による遠心力の大きさは、赤道上では、重力の約$\boxed{\text{ス}}$分の１倍である。

北極点を除く北半球では、西から東へと移動する物体に働くコリオリ力の水平成分は$\boxed{\text{セ}}$向きであり、南から北へと移動する物体に働くコリオリ力の水平成分は$\boxed{\text{ソ}}$向きである。また、鉛直上向きに投射された物体に働くコリオリ力の働く方向は、上昇中は$\boxed{\text{タ}}$向きであり、最高点を通過後の落下中は$\boxed{\text{チ}}$向きである。

北極点において水平方向に速さ 10m s^{-1} で移動する物体に働くコリオリ力は、速度の$\boxed{\text{ツ}}$90 度の方向を向き、コリオリ力の大きさは$\boxed{\text{テ}}$ $\times 10^{\boxed{\text{ト}}}$ m s^{-2} に物体の質量を乗じたものである。

【語群】

$\boxed{\text{ア}}$:　地球　太陽　宇宙　自転　公転　質量　重力　磁力　電気　遠心　コリオリ　ニュートン

$\boxed{\text{イ}}$・$\boxed{\text{ウ}}$・$\boxed{\text{エ}}$・$\boxed{\text{ト}}$:　１０のベキ乗の部分に当てはまる整数を書け。

$\boxed{\text{オ}}$・$\boxed{\text{カ}}$・$\boxed{\text{キ}}$：　直線　半直線　半円　楕円　包絡線　放物線　双曲線　卵形線　惑星曲線

$\boxed{\text{ク}}$・$\boxed{\text{コ}}$・$\boxed{\text{サ}}$：　(ゼロまたは正の整数か分数（有理数）を書け）

$\boxed{\text{ケ}}$：　全エネルギー　全エントロピー　全運動量　全角運動量　全熱量　温度　重心の位置　圧力

$\boxed{\text{シ}}$：章動　秤動　摂動　地軸揺動　地軸周回　コマ運動　日周運動　年周運動　歳差運動　万年運動

$\boxed{ス}$：3　30　300　3000　30000　300000　3000000　30000000　300000000　3000000000

$\boxed{セ}$・$\boxed{ソ}$・$\boxed{タ}$・$\boxed{チ}$：東　南　西　北　南東　南西　北西　北東

$\boxed{ツ}$：右　左

$\boxed{テ}$：1.5　3.4　7.3

【2】 2 質点系の運動エネルギー K は、第 1 の質点の質量を m_1、位置ベクトルを $\mathbf{r}_1$ とし、第 2 の質点の質量を m_2、位置ベクトルを $\mathbf{r}_2$ とすると、

$$K = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2$$

と表される。この K を、2 質点の質量の和 M、換算質量 μ、2 質点の重心の位置ベクトル $\mathbf{R}$ の時間微分 $\dot{\mathbf{R}}$、2 質点の相対ベクトル $\mathbf{r}$ $(= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ の時間微分 $\dot{\mathbf{r}}$ を使って表す式を導け。

なお、解答には必ず、$M, \mu, \mathbf{R}$ の定義式を含めよ。

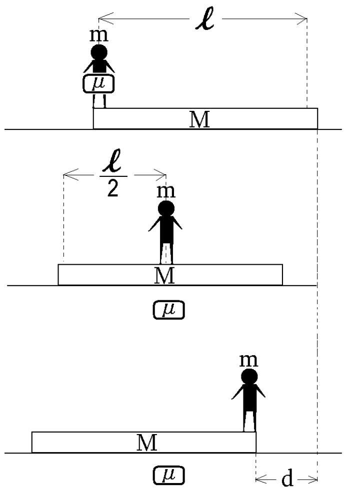
【3】 水平な直線上を一定の加速度 a (> 0) で加速中の台車の上に静止している人が、ボールを投げ上げた後、台車上を移動することなく静止したままでそのボールを捕球できるには、（台車とともに動く座標系で見て）鉛直方向上向きから前方へどれだけの角度 θ だけ傾けた方向へボールを投げ上げればよいか？ただし重力加速度を g とし、空気抵抗は無視せよ。

(注意：本問題の定義では、$\theta = 0$ が鉛直上向き、$\theta = \frac{\pi}{2}$ が水平方向前向きに対応する。)

（A.P フレンチ著、橘高知義監訳「MIT 物理 力学」(培風館 1983 年、原著 1971 年) の p.246 の問題 6-2 を基に作成。）

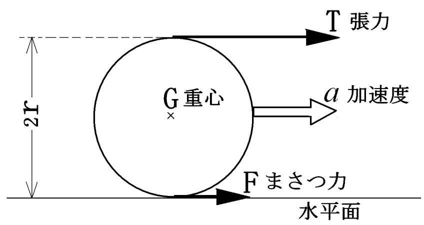
【4】 水面上に静止した質量 M、長さ l の舟の左端に質量 m の人が質量 μ の荷物を持って立っている。人が荷物を持って舟の中央まで歩き、そこで真下の水中へ荷物を沈め、その後手ぶらで舟の右端まで歩くと、反動で舟は距離 d だけ左方向へ移動する。この d を求めよ。ただし、水面から舟に水平方向の力は働かず、空気抵抗も無視できるとする。重力加速度は g とせよ。

（2006 年度後期 力学 II 定期試験 第 4 問の再出題です。）



【5】 質量と太さの無視できる糸を巻いた円筒を水平面上に置く。円筒の半径は r, 質量は m, 対称軸を回転軸とした場合の慣性モーメントは I であり、重心は対称軸上にある。糸は、水平面から高さ $2r$ の点で円筒面から離れ、円筒の軸に垂直で、かつ、水平な方向に張力 T で引っ張られている。円筒と水平面の間の摩擦係数は十分に大きいので、これらの面の間に滑りは生じないとする。このときの、円筒の重心の加速度の大きさ a を求めよ

（即ち、a を r, m, I, T を用いて表せ。計算過程に現れる摩擦力は、右向きを正として記号 F で表せ。しかし答の式はこの F を含んではならない。）



力 学 II 定 期 試 験 答 案 用 紙

福井大学 工学部 物理工学科 1 年生対象、 担当教員 田嶋、 2011 年 2 月 7 日 4 限実施

【1】
40 点

ア	イ	ウ	エ	オ
カ	キ	ク	ケ	コ
サ	シ	ス	セ	ソ
タ	チ	ツ	テ	ト

【2】
15 点

【3】
15 点

【4】・【5】 は裏面に解答せよ.(15 点+15 点)

学科	物理工学	学籍番号		氏名		得点	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	合計

[1] ア. 重力

イ. 24

地球の質量をMとすると。地表にある質量mの物体に働く重力Fは.

$$F = mg \quad , \quad F = G\frac{mM}{R^2}$$

の2通りに表される。故に. $\cancel{m}g = G\frac{\cancel{m}M}{R^2}$, $M = \frac{gR^2}{G} = \frac{9.8 \times (6.4 \times 10^6)^2}{6.7 \times 10^{-11}}$

$\fallingdotseq \frac{10^1 \times 6^2 \times 10^{12}}{6 \times 10^{-11}} = 6 \times 10^{24}$ 単位は $\frac{m\,s^{-2}\,m^2}{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} = kg$

ウ. 7

(より正確には100年に24回うるう年があるので365.24日。しかし桁を求めるにはこれでも十分過ぎ)

地球が太陽のまわりを公転する周期は 1年 = 365日 ; (1日) = $24 \times 60 \times 60$ 秒

$= 86400$ 秒 なので (1年) $= 365 \times 86400 = 3.15 \times 10^7$ 秒

($\fallingdotseq 300 \times 10^5 = 3 \times 10^7$ 秒)

エ. 30

地球の質量をm, 太陽の質量をM, 地球の公転半径を $r = 1.5 \times 10^{11}$m,

地球の公転の角速度を $\omega = \frac{2\pi}{3.2 \times 10^7}$ s^{-1} とすると、地球と太陽の間に働く引力Fは 重力であるから. $F = G\frac{mM}{r^2}$ と表され、また. 地球の円運動を維持するための向心力であるから. $F = mr\omega^2$ と表される.

$$\therefore \quad mr\omega^2 = G\frac{mM}{r^2}, \quad M = \frac{r^3\omega^2}{G}$$

$$\fallingdotseq \frac{(1.5 \times 10^{11})^3 \times \left(\frac{2 \times 3.1}{3.2 \times 10^7}\right)^2}{6.7 \times 10^{-11}} = \frac{1.5^3 \times 2^2 \times 3.1^2}{3.2^2 \times 6.7} \times 10^{30} = 1.9 \times 10^{30}$$

$$\left(\fallingdotseq \frac{3 \times 4 \times \cancel{9}}{\cancel{9} \times 7} \times 10^{30} \fallingdotseq 1.7 \times 10^{30}\right)$$

単位は. $\frac{m^3\,s^{-2}}{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} = kg$

オ. 楕円　　カ. 放物線　　キ. 双曲線

ク. $\frac{3}{2}$

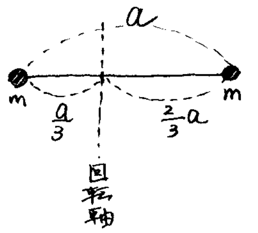
$\boxed{エ}$ の解説より $r^3\omega^2 = GM$, 右辺は 惑星に共通の量.

$\therefore$ $\omega = \sqrt{GM}\,r^{-3/2}$, $T = 2\pi\omega^{-1} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}\,r^{3/2}$

ケ. 全運動量　　注意①: したがって重心の速度は保存される。しかし重心の位置は保存されない。

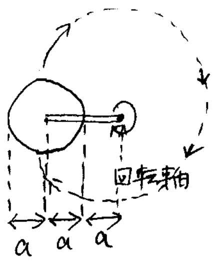
注意② 全角運動量は保存されない。(∵例えば 偶力は 2力のベクトル和はゼロだが 力のモーメントはゼロではない。)

コ、$\frac{5}{9}$



$$I = m\left(\frac{a}{3}\right)^2 + m\left(\frac{2a}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right)ma^2 = \frac{5}{9}ma^2.$$

サ. $\frac{9}{2}$



慣性モーメントに関する平行軸の定理により

$$I = \frac{1}{2}ma^2 + m(2a)^2 = \left(\frac{1}{2}+4\right)ma^2 = \frac{9}{2}ma^2.$$

シ. 歳差運動

ス. 300

地球の半径を $R = 6.4\times10^6\,\mathrm{m}$, 自転の角速度を $\omega = \frac{2\pi}{86400}\,\mathrm{s^{-1}}$ とすると、

赤道上にある質量 m の物体に働く遠心力 F は

$$F = mR\omega^2 = m\cdot 6.4\times10^6\times\left(\frac{2\times3.1}{8.6\times10^4}\right)^2 = 3.3\times10^{-2}.$$

$$\therefore \frac{mg}{F} = \frac{9.8}{3.3\times10^{-2}} \fallingdotseq 3.0\times10^2$$

セ、南　，ソ. 東　タ. 西　チ. 東

ツ. 右

テ. 1.5　ト、−3

$v = 10\,\mathrm{ms^{-1}}$, 地球の自転の角速度を $\omega = \frac{2\pi}{86400}\,\mathrm{s^{-1}}$ とすると質量mの物体に働くコリオリ力 F は、

$$F = 2mv\omega = m\cdot2\times10\times\frac{2\times3.1}{8.6\times10^4} \fallingdotseq m\cdot1.5\times10^{-3}\ \mathrm{ms^{-2}}$$

[2]
$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

を $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ について解くと

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{r}$$

を得る。上の2式を時間で微分すると

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1 = \dot{\boldsymbol{R}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\dot{\boldsymbol{r}}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_2 = \dot{\boldsymbol{R}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\dot{\boldsymbol{r}}$$

を得る。従って

$$K = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\boldsymbol{R}} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{r}}\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\boldsymbol{R}} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{r}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{R}}^2 - \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\boldsymbol{r}}^2$$

$$+ \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{2}\frac{m_1^2 m_2}{(m_1+m_2)^2}\dot{\boldsymbol{r}}^2$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2 \cancel{(m_1+m_2)}}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}\dot{\boldsymbol{r}}^2$$

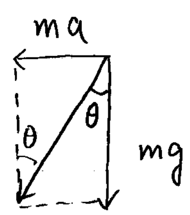
系の全質量 $M = m_1 + m_2$ および2体の換算質量 $\mu = (m_1^{-1} + m_2^{-1})^{-1} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

を用いて表せば

$$K = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2$$

を得る。

[3] 台車に固定された座標系では ボールの質量を m として ボールには鉛直下向きに 重力 mg が、台車の加速度と正反対の方向（水平方向後ろ向き）には慣性力 ma が働く。これは 大きさ $\sqrt{g^2+a^2}$ の重力加速度による重力が図示した方向に働く場合と同じ状況なので、この場合の「真上」即ち $\theta = \arctan\frac{a}{g}$ 方向に投げれば ボールは「真下」にいる投げた人の手もとに落ちてくる



[4]　初期状態における水平方向の位置座標を

人と荷物の重心は x，　舟の重心は X とする.

中間状態（人が舟の中央に居る状態）での舟の後退距離を d' (>0) とする.

一般に系に水平方向の外力が働かず、初期状態が静止状態だったなら、系全体の重心の位置は不動である。

従って「舟＋人＋荷物」の系の重心が初期と中間状態で不動なので、

$$\frac{(m+\mu)x + Mx}{m+\mu+M} = \frac{(m+\mu)\left(x+\frac{l}{2}-d'\right) + M(X-d')}{m+\mu+M}$$

$$\therefore\ (m+\mu)\left(\frac{l}{2}-d'\right) - Md' = 0$$

$$\therefore\ (M+m+\mu)d' = (m+\mu)\frac{l}{2}$$

$$\therefore\ d' = \frac{m+\mu}{M+m+\mu}\cdot\frac{l}{2}$$

次に「舟＋人」の系の重心が中間状態と最終状態で不動なので、

$$\frac{m\left(x+\frac{l}{2}-d'\right)+M(X-d')}{m+M} = \frac{m(x+l-d)+M(X-d)}{m+M}$$

$$-(m+M)d' = m\cdot\frac{l}{2} - (m+M)d$$

$$d = d' + \frac{m}{m+M}\frac{l}{2}$$

$$\therefore\ d = \underbrace{\left(\frac{m+\mu}{M+m+\mu} + \frac{m}{M+m}\right)\frac{l}{2}}$$

(※)

別解：(※)のかわりに「舟＋人＋荷物」の系の重心が初期状態と最終状態とで動いていないという条件を使っても求まる。

$$\frac{(m+\mu)x + MX}{M+m+\mu} = \frac{m(x+l-d) + \mu\left(x+\frac{l}{2}-d'\right) + M(X-d)}{M+m+\mu}$$

$$0 = ml - md + \frac{\mu}{2}l - \mu d' - Md$$

$$(M+m)d = \left(m+\frac{\mu}{2}\right)l - \mu d'$$

$$d = \frac{2m+\mu}{M+m}\cdot\frac{l}{2} - \frac{\mu}{M+m}d'$$

$$= ----$$

＝（同じ答を得る）

[5] 円筒の重心の水平方向の座標を x, 円筒の回転角を φ とすると、

すべりがないことより　$x = r\varphi$ ---① が成り立つ。

円筒の並進の運動方程式は まさつ力が右向きに F (左向きなら $F<0$) として

$$m\ddot{x} = T + F \quad \text{---②}$$

円筒の回転の運動方程式は

$$I\ddot{\varphi} = r(T - F) \quad \text{---③}$$

① の両辺を時間で2階微分して $\ddot{x} = r\ddot{\varphi}$ を得る。

$\ddot{x} = a$ なので　$\ddot{\varphi} = \dfrac{a}{r}$ である。

②, ③ を F について解くと

$$F = -T + ma = -\frac{I}{r}\frac{a}{r} + T$$

$$\therefore \left(m + \frac{I}{r^2}\right)a = 2T$$

$$\therefore a = \frac{2T}{m + \dfrac{I}{r^2}}$$

ちなみに、F は

$$F = -T + \frac{2mT}{m + \dfrac{I}{r^2}} = \frac{-\dfrac{I}{r^2} + m}{m + \dfrac{I}{r^2}}T = \frac{mr^2 - I}{mr^2 + I}T$$ と表され

慣性能率の定義を考えると　$I \leqq mr^2$ なので、$F \geqq 0$ である

即ち、摩擦力は右向きに働く。

次年度以降の定期試験でこの問題を再出題するなら、「糸を引く力のなす仕事率」と「円筒の力学的エネルギーの増加率」が等しいことを確かめさせる形で問いたいと思う。