

力学Ⅱ 定期試験問題

福井大学工学部物理工学科 1 年対象、担当教員 田嶋、2010 年 2 月 1 日 4 限実施

A3 判問題用紙 1 枚と B4 判解答用紙 1 枚を各人に配布する。解答用紙のおもて面の最下部に学籍番号と氏名を明記せよ。解答用紙のうら面は【4】と【5】の答えを書くのに用いる。【2】～【5】については、最終的な答のみでなく説明と計算過程を必ず記せ。

【1】下記の文の [ア]～[ト] に語群から最も適切な語句を選んで埋めよ。

太陽のまわりを楕円軌道を描いてまわる天体の持つ力学的エネルギー（運動エネルギーと重力の位置エネルギーの和。ただし自転は無視する）は、軌道の [ア] が同じなら同じである。また、力学的エネルギーが同一の場合に角運動量が最大になるのは、軌道の [イ] が [ウ] のときである。

ケプラー運動（距離の 2 乗に反比例する引力である中心力の下での運動）する質点の軌道の形状は、力学的エネルギーが正確にゼロのときには [エ] であり、力学的エネルギーが正のときには [オ] である。ただし無限遠点で静止している状態でのエネルギーをゼロとする。

ケプラーの第 3 法則とは、同じ恒星のまわりを回る全ての惑星の公転周期は楕円軌道の長軸半径の [カ] 乗に比例するという法則である。（覚えていなくても、円軌道の場合について考察すれば高校生にも分かる。）

質点系に働く外力のモーメントのベクトル和がゼロであるなら、系の [キ] は保存される。

質量 m の物体と質量 $2m$ の物体の相対運動に対する換算質量は [ク] m である。

質量の無視できる長さ a の剛体棒の両端に質量 $\frac{1}{2}m$ の質点を 1 個ずつ固定して作った（質量 m の）剛体がある。この剛体の、棒の中心を通り棒に垂直な回転軸についての慣性モーメントは [ケ] ma^2 である。

質量が m 、長さが a で、一定の線密度を持つ剛体棒の、棒に垂直な回転軸に対する慣性モーメントは、回転軸が棒の中心を通る場合は $\frac{1}{12}ma^2$ であり、棒を $\frac{1}{4}a : \frac{3}{4}a$ に内分する点を通る場合は [コ] ma^2 である。

半径と質量が同一である球（中身は一定密度）、球殻（中身は空）、円盤（面密度は一定）のうちで、回転対象軸を回転軸とするときの慣性モーメントが最大のものは [サ] である。（例えば「球の慣性モーメント I は半径を a 、質量を m として $I = \frac{2}{5}ma^2$ である」というようなことを覚えていなくても、定性的に考えれば分かる。）

電車が加速しているとき、床に置かれた空き缶は [シ] へころがり、ヘリウムが詰まって浮いている風船は [ス] へただよっていく。これらの現象を電車のシートに座った観測者が解釈すると、全ての物体に [セ] 向きの [ソ] が働いているためだということになる。

地球の自転に起因する遠心力の大きさがゼロとなる地点は [タ] と [チ] である。遠心力のため、地球の極軸半径（地球という球の中心と北極点または南極点との間の距離）は赤道半径より [ツ]。

福井市（北緯 36 度、東経 136 度）においては、水平面内を西に向かって移動する物体に働く（地球の自転に起因する）コリオリ力の水平面内の成分は [テ] である。またコリオリ力と鉛直上向き方向とのなす角度は [ト] 度である。

【語群】

[ア]・[イ]：楕円半径 長軸半径 短軸半径 最大半径 最小半径 扁平率 離心率 楕円率 曲率

[ウ]・[カ]・[ク]・[ケ]・[コ]・[ト]：（ゼロまたは正の整数か分数（有理数）を書け）

[エ]・[オ]：直線 半直線 円 半円 楕円 放物線 双曲線 三次曲線 惑星曲線 彗星曲線

[キ]：全運動量 全角運動量 全エネルギー 全エントロピー 重心の位置 重心の速度

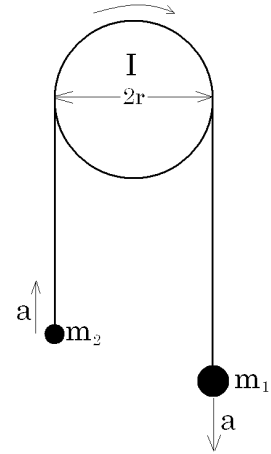
[サ]：球 球殻 円盤

[シ] [ス] [セ]：前方 後方

[ソ]：偶力 抗力 動摩擦力 静止摩擦力 保存力 慣性力 内力 外力 作用 反作用

- タ・チ： 北極点 北緯 45 度線 北回帰線 赤道 南回帰線 南緯 45 度線 南極点
 ツ： 長い 短い
 テ： 東向き 南向き 西向き 北向き 南東向き 南西向き 北西向き 北東向き ゼロ

【2】 質量 m_1 および m_2 の錘（おもり）2 個が糸で結ばれて滑らかに回転する定滑車にかけられている。糸と定滑車の間に滑りはおきかないものとする。定滑車の半径は r 、慣性モーメントは I である。また、 $m_1 > m_2$ であるとする。重力加速度は g とせよ。



(i) 質量 m_1 の錘について、加速度の大きさを a ($a > 0$)、糸から受ける力の大きさを T_1 ($T_1 > 0$) として、鉛直下方向への並進運動の運動方程式を書き下せ。

(ii) 質量 m_2 の錘について、糸から受ける力の大きさを T_2 ($T_2 > 0$) として、鉛直上方向への並進運動の運動方程式を書き下せ。加速度の大きさは (i) と同じ a ($a > 0$) である。

(iii) 定滑車の回転の運動方程式を書き下せ。運動方程式に現れる量で、問題文中に現れないものには、名称および定義を必ず書け。右回りを正の方向にとれ。

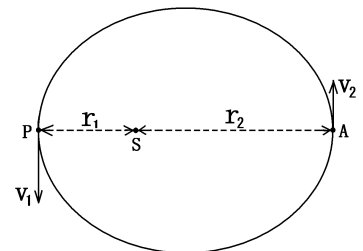
(iv) 加速度の大きさ a を、 m_1 、 m_2 、 r 、 I 、 g のうち必要なものを使って表せ。

【3】 傾斜角 $\theta = 30$ 度の山の雪面で立ち止まっていたスキーヤーが、自分に向かって転がり落ちてくる大きな球状の雪の塊に気づいた。雪の塊はスキーヤーから（斜面に沿って測って）70 m の地点まで迫っており、速度は V_0 m/s であった。スキーヤーは瞬間的に初速度 0 m/s、加速度 $g \sin \theta = \frac{1}{2}g$ で斜面を滑り降り始めた。スキーヤーが雪の塊に追いつかれないで済むには、 V_0 はある値 V_{\max} より小さくなければならない。この V_{\max} の値を有効数字 2 桁で求めよ。（2 桁目の数字が ± 2 程度違っていても正解とする。 $g = 10 \text{ m/s}^2$ として計算してよい。）

雪の塊を斜面を滑らずに転がる剛体球で、スキーヤーを摩擦のない斜面を回転せずに滑り落ちる物体で近似して考えよ。

（A.P フレンチ著、橋高知義監訳「MIT 物理 力学」（培風館 1983 年、原著 1971 年）の p.331 の問題 8-5 を基に作成。）

【4】 惑星が太陽のまわりを楕円軌道を描いて運動している。惑星が太陽に最も近づく点を近日点（perihelion）、最も遠ざかる点を遠日点（aphelion）という。近日点 P での速さを v_1 、点 S で静止している太陽からの距離 \overline{PS} を r_1 とする。また、遠日点 A での速さを v_2 、距離 \overline{AS} を r_2 とする。惑星の質量は m 、太陽の質量は M 、重力定数は G とする。以下の小問 (i) ~ (iii) に答えよ。



(i) 点 P と点 A とで、力学的エネルギーが等しい（保存されている）という関係を数式で表せ。

(ii) 点 P と点 A とで、点 S を基準点として定義された角運動量（の軌道に垂直な成分）が等しい（保存されている）という関係を数式で表せ。

(iii) 前 2 小問の答として書き下した 2 つの等式を使って、 v_1 を r_1 、 r_2 、 m 、 M 、 G のうち必要なものを用いて表せ。

【5】 地球の自転軸が歳差運動する仕組みを力学的に説明せよ。（地球に働く外力のモーメントの方向およびそれが生じる仕組みの説明、外力のモーメントにより歳差運動が起きる一般的な仕組みの定性的な説明、歳差運動の角速度を表す数式の導出、の 3 点を抜かさずに記述せよ。）

力学 II 定期試験 答案用紙

福井大学 工学部 物理工学科 1 年生対象、 担当教員 田嶋、 2010 年 2 月 1 日 4 限実施

【1】

40 点

ア	イ	ウ	エ	オ
カ	キ	ク	ケ	コ
サ	シ	ス	セ	ソ
タ	チ	ツ	テ	ト

【2】

15 点

【3】

15 点

【4】・【5】 は裏面に解答せよ。(15 点+15 点)

学科 **物理工学**

学籍番号

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

氏名

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]					合計

力学 II 定期試験 答案用紙

福井大学 工学部 物理工学科 1 年生対象、 担当教員 田嶋、 2010 年 2 月 1 日 4 限実施

[1]

40 点

ア 長軸半径	イ 離心率	ウ 0	エ 放物線	オ 双曲線
カ $\frac{3}{2}$	キ 全角運動量	ク $\frac{2}{3}$	ケ $\frac{1}{4}$	コ $\frac{7}{48}$
サ 球殻	シ 後方	ス 前方	セ 後方	ソ 慣性力
タ 北極点	チ 南極点	ツ 短い	テ 北向き	ト 144

[2]

15 点

(i) $m_1 a = m_1 g - T_1$

(ii) $m_2 a = -m_2 g + T_2$

(iii) $I \alpha = r T_1 - r T_2$
 但し、 α は定滑車の角加速度である。
 $r \alpha = a$ が成り立つ

(iv) $T_1 = m_1 g - m_1 a$
 $T_2 = m_2 a + m_2 g$
 $I \frac{a}{r} = r(m_1 g - m_1 a) - r(m_2 a + m_2 g)$
 $(m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}) a = (m_1 - m_2) g$
 $\therefore a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{r^2}} g$ (答)

[4] (i) $\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$

(ii) $m r_1 v_1 = m r_2 v_2$

(iii) (ii) の結果を使って (i) から v_2 を消去すると、
 $\frac{1}{2} v_1^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{r_1}{r_2} v_1 \right)^2 = GM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$

$\frac{1}{2} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2} v_1^2 = GM \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$
 $v_1^2 = 2GM \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \frac{r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2)}$

$= 2GM \frac{r_2}{r_1} \frac{1}{(r_1 + r_2)}$

$v_1 = \sqrt{\frac{2GM r_2}{r_1 (r_1 + r_2)}}}$ (答)

[3]

15 点

スキーヤーが滑り降り始めた時刻を $t = 0$ [sec] とし、
 そのときのスキーヤーの位置を $x = 0$ [m] とすると、
 $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} g t^2$
 雪の塊の位置 X [m] は
 $X = -70 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ (質量 m)
 雪の塊の加速度 a は、慣性系 S 内で、半径 r とし
 $a = \frac{m}{m + \frac{I}{r^2}} \cdot g \sin \theta$
 $I = \frac{2}{5} m r^2$ とし、
 $a = \frac{1}{1 + \frac{2}{5}} g \cdot \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{5}} g = \frac{5}{14} g$
 $x - X = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} g - a \right) t^2 - V_0 t + 70$
 $= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{14} \right) g t^2 - V_0 t + 70$
 $= \frac{g}{14} t^2 - V_0 t + 70$
 $= \frac{g}{14} \left(t - \frac{7V_0}{g} \right)^2 + 70 - \frac{g}{14} \left(\frac{7V_0}{g} \right)^2$
 $= \frac{g}{14} \left(t - \frac{7V_0}{g} \right)^2 + 70 - \frac{7}{2g} V_0^2$
 追いつかぬ条件は $\forall t, x - X \geq 0$ のとき
 $70 - \frac{7}{2g} V_0^2 \geq 0$
 $\therefore V_0^2 \geq 70 \cdot \frac{2g}{7} = \frac{70 \cdot 2 \cdot 10}{7} = 200$
 $\therefore V_0 \geq 10\sqrt{2} \doteq 14 \text{ m/s}$ (答)
 V_{\max}

[4]・[5] は裏面に解答せよ。(15 点+15 点)

学科 物理工学

学籍番号

氏名

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	合計

【問】

地球の自転軸が歳差運動する仕組みを力学的に説明せよ。(地球に働く外力のモーメントの方向およびそれが生じる仕組みの説明、外力のモーメントにより歳差運動が起きる一般的な仕組みの定性的な説明、歳差運動の角速度を表す数式の導出、の 3 点を抜かさずに記述せよ。)

【解説】

地球の形状は赤道が膨らんだ回転楕円体である。また、地軸(地球の自転の回転軸)は黄道面(地球の公転面)の垂線に対して 23.5 度傾いている。重力の力のモーメントは球対称な質量分布に対してはゼロとなる。地球の質量分布の球対称からずれた部分は赤道部分であり、ここに働く重力は力のモーメントを持ちうる。赤道付近に働く太陽からの重力は、太陽に近い側のほうが遠い側より強いので、冬至の位置(図 1)および夏至の位置(図 2)では地軸を黄道面に(90 度以内の回転で)垂直にする向きの力のモーメントを持つ。春分や秋分の位置では力のモーメントはゼロとなる。一年を平均すると、地軸を黄道面に垂直にする向きの力のモーメントが働いていることになる。

なお、太陽や月の及ぼす重力に、地球上の地点によって差があることが潮汐の原因であるため、重力の場所による違いを潮汐力と呼ぶ。従って、上述の力のモーメントは潮汐力のモーメントである。しかし、地軸の歳差運動において潮汐による海水の運動が本質的な役割を果たしている訳ではない。そのような言葉に引きずられて生じた誤解に基づいた答案がいくつか見られたが、潮汐力の影響は必ずしも潮汐現象を通じて及ぼされるとは限らないことを理解されたい。

同様な力のモーメントは月からも働く。実は月からの影響の方が大きい。(潮汐力は質量に比例し距離の 3 乗に反比例する。太陽と月の質量および地球までの距離の値を調べて計算すると、月は太陽の 2.3 倍の潮汐力を地球に及ぼしていることがわかる。)月からの力のモーメントは地軸を白道面(月の公転面)に垂直にする向きに働く。白道面は黄道面と 5.9 度の角度をなしている。しかし、白道面は黄道面の垂線を軸として 18.6 年の周期で歳差運動するので、月からの力のモーメントの効果を通じた平均すると、地軸を黄道面に垂直にする向きの力のモーメントの効果と同じになる。白道面の歳差のメカニズムはこの文章では論じない。

地軸を黄道面に垂直にする向きの力のモーメント N が地球に働いているとする。地球の自転の角運動量を L とすると、回転の運動方程式 $\dot{L} = N$ が成立する。また、歳差の角速度を Ω とし $\theta = 23.5^\circ$ とすれば、 $|\dot{L}| = \Omega L \sin \theta$ が成立する(図 3 参照)。歳差運動の回転の向きは、自転の角速度の黄道面に垂直な成分とは逆向きである(これも図 3 参照)。地球の慣性モーメントを I 、自転の角速度を ω とすると $L = I\omega$ が成り立つ。従って、 $\Omega = \frac{N}{I\omega \sin \theta}$ を得る。

ただしこの式の右辺は分母の $\sin \theta$ だけでなく N を通じて θ に依存するので、 N を $N(\theta)$ と書いておくほうが誤解が少ないであろう。コマの場合は $N(\theta) \propto \sin \theta$ であったが、太陽の潮汐力のモーメントの場合は $N(\theta) \propto \sin 2\theta$ に近いことが示せる。そこで $N = N_0 \sin 2\theta$ とおいて代入すると、 $\Omega = \frac{2N_0 \cos \theta}{I\omega}$ を得る。即ち地軸の歳差運動の角速度は、 $\cos \theta$ に比例し ω に反比例することがわかる。

この結果をコマと比較すると、コマの歳差運動の角速度は θ には依存しない(相違点)が ω には反比例する(共通点)、また、力のモーメントの符号が逆であるために歳差運動の回転の向きは自転と同じ向きである(相違点)。

図 1、図 2、図 3 は省略する。各自で描いてみよ。