力 学 Ⅱ　　定 期 試 験 問 題

福井大学工学部物理工学科１年対象、担当教員 田嶋、2009 年 2 月 2 日 4 限実施

A3 判問題用紙１枚と B4 判解答用紙１枚を各人に配布する。解答用紙のおもて面の最下部に学籍番号と氏名を明記せよ。解答用紙のうら面は【4】と【5】の答を書くのに用いる。【2】〜【5】については、最終的な答のみでなく説明と計算過程を必ず記せ。

【1】 下記の文の ア 〜 コ に語群から最も適切な語句を選んで埋めよ。

惑星の軌道の形は ア であり、太陽はその イ にある。惑星の速度は面積速度一定の法則に従って変化するが、これは「 ウ 保存則に従って」と言い替えることもできる。

「ガリレオの エ 性原理」とは「すべての オ 系は同等であり、どれが真の カ 系かを言うことはできない」という主張である。

福井（北緯３６ °）において、北に向かって水平に移動する物体に働く（地球の自転に起因する）コリオリ力の水平面内の成分は キ である。また鉛直方向の成分は ク である。

福井において、西に向かって水平に移動する物体に働くコリオリ力の水平面内の成分は ケ である。また鉛直方向の成分は コ である。

【語群】

ア ： 直線　半直線　円　半円　放物線　双曲線　楕円　三次曲線　惑星曲線　ニュートン曲線

イ ： 中心　内心　外心　重心　小点　正点　焦点　集点　不動点　漸近点　太陽点　近日点　春分点

ウ ： エネルギー　エントロピー　エンタルピー　質量　運動量　角運動量　面運動量　天体運動量

エ ： 完全　不完全　絶対　相対　確定　不確定　不変　流動　干渉　不干渉　超越　無常　平等

オ ・ カ ： 保存　可逆　可積分　静止　運動　加速度　慣性　回転　振動　波動　太陽　惑星　銀河

キ ・ ケ ： 東向き　南向き　西向き　北向き　南東向き　南西向き　北西向き　北東向き　ゼロ

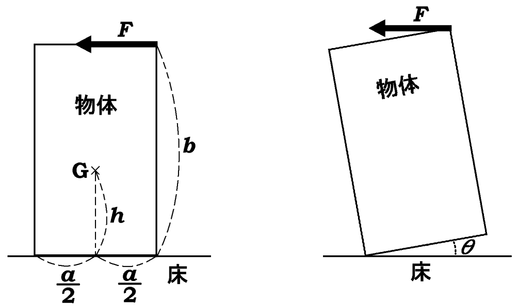
ク ・ コ ： 上向き　下向き　ゼロ

【2】 (1) 下図の左側に示したように、水平な床の上に物体が置かれている。この物体は、全体が一個の剛体であり、質量は m であり、直方体の形状をしており、高さは b、厚さ（前面・後面間の距離）は a である。物体の重心 G は、物体の前面・後面から等距離にあり、高さは h である。この物体の最上部を後面に垂直に（したがって水平方向に）大きさ F の力で押すとき、物体が傾くための条件は $F > F_{\mathrm{min}}$ である。F_{min} を求めよ。ただし、床面との静止摩擦係数が大きいため、物体が床面を滑ることはないとせよ。また、重力加速度は g とせよ。

(2) 下図の右側に示したように、前小問の物体を角度 θ だけ傾けた状態で静止させるためには、物体の後面の最上部を水平方向に大きさ F の力で押す必要があった。このときの F を求めよ。

[アドバイス] 計算ミスを防ぐため、下記の２点をチェックすることを勧める

- 得られた結果に $\theta = 0$ を代入すると前小問の結果に一致する。
- $h = \frac{b}{2}$ なら、得られた結果に $\theta = \frac{\pi}{2}$ を代入すると前小問の結果の表式で a と b を入れ替えたものの -1 倍に一致する。



【3】 地面の上に静止した観測者から見て、質量 m の質点が、水平面内にある半径 r の円周上を一定の角速度 ω （>0）で等速円運動している。だたし角速度が正の場合は、上から見下ろして左回り（反時計回り)、負の場合は右回り（時計回り）の回転であるとする。また、この円の中心を点 O と呼ぶ。なお、この問題では地球の自転は考慮しなくてよい。

(1) この質点に働く力は、質点から点 O に向かう方向を持ち、大きさは T である。T を m、r、ω を用いて表せ。

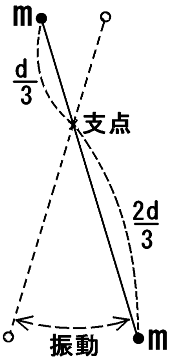
(2) 点 O にいて角速度 ω で回転している観測者の立場で考えて、この質点に働く遠心力およびコリオリ力の方向を図示せよ。ただし、力の大きさがゼロである場合は方向を図示しなくてよい。また、遠心力の大きさ F_{cen} およびコリオリ力の大きさ F_{cor} を m、r、ω を用いて表せ。

[アドバイス] この観測者にはこの質点は静止しているように見える。したがって、この質点に働く実際の力 T と見掛けの 2 力のベクトル和はゼロベクトルとなるはずである。これを利用して得られた答をチェックすることを勧める。

(3) 点 O にいて角速度 $-\frac{1}{10}\omega$ で回転している観測者の立場で考えて、この質点に働く遠心力およびコリオリ力の方向を図示せよ。ただし、力の大きさがゼロである場合は方向を図示しなくてよい。また、遠心力の大きさ F_{cen} およびコリオリ力の大きさ F_{cor} を m、r、ω を用いて表せ。

[アドバイス] この観測者にはこの質点は角速度 $\frac{11}{10}\omega$ で等速円運動しているように見える。したがって、この質点に働く力の合力は、この円運動の向心力であるから、質点から点 O に向かう方向を持ち、大きさは $\frac{121}{100}mr\omega^2$ である。この質点に働く実際の力 T と見掛けの 2 力のベクトル和がこの向心力に一致することを利用して答をチェックすることを勧める。

【4】右図に示したように、質量 m の小球を、長さが d で質量の無視できる剛体棒の両端に各 1 個を固定して作った物体がある。この棒の一方の端から距離 $\dfrac{d}{3}$ にある点を支点として、その点のまわりにこの棒が自由に回転できるようになっている。この棒の安定位置は、支点に近（遠）いほうの小球が支点の鉛直上（下）方にある状態である。この棒が、安定位置のまわりに行う微小振動の周期 T を求めよ。ただし重力加速度を g とする。



【5】 質点系の全角運動量ベクトルを $\mathbf{L}$、質点系の重心の運動に起因する角運動量ベクトル (質点系の重心の位置ベクトルと重心の速度ベクトルの外積に質点系の全質量を乗じたもの) を $\mathbf{L}_{\mathrm{G}}$ とする。また、質点の重心と同じ速度で運動する観測者の見た質点系の全角運動量ベクトル（基準点は重心とする）を $\mathbf{L}'$ とする。このとき、 $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\mathrm{G}} + \mathbf{L}'$ が成立することを示せ。

解答にあたっては、質点の個数を N とせよ。また、i 番目 $(1 \leq i \leq N)$ の質点の質量を m_i、位置ベクトルを $\mathbf{r}_i$ とせよ。時間微分は 文字の上に点を付けて表せ。これらの記号を用いると、例えば $\mathbf{L}$ は

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i$$

と表される。重心の位置ベクトルを表す記号としては、$\mathbf{R}$ を用いよ。全質量を表す記号には、M を用いよ。また、ベクトル量は太字にするか上に矢印をのせるかして、スカラー量と区別して書け。外積を表す「×」を省略してはならない。

力　学　II　　定　期　試　験　　答　案　用　紙

福井大学 工学部 物理工学科 1 年生対象、　担当教員 田嶋、　2009 年 2 月 2 日 4 限実施

【1】
20 点

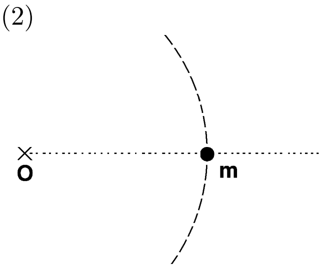
ア	イ	ウ	エ	オ
カ	キ	ク	ケ	コ

【2】(1)
20 点

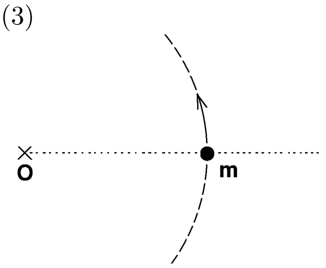
(2)

【3】(1)
20 点

(2)



(3)



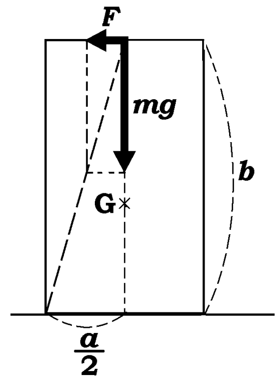
【4】・【5】 は裏面に解答せよ.(20 点+20 点)

学科	物理工学	学籍番号		氏名		得点	[1] [2] [3] [4] [5]	合計

力学Ⅱ　定期試験の解答・解説　（2009 年 2 月 2 日実施分）

【1】 ア：楕円　イ：焦点　ウ：角運動量　エ：相対　オ：慣性
カ：静止　キ：東向き　ク：ゼロ　ケ：北向き　コ：下向き

【2】(1) 講義でした説明のとおり、釣り合い条件は F と重力の合力の作用線が底面内を通るという幾何学的条件で表せる。F を次第に強くしたとき、物体が転倒を始める直前の状態を表した右図では $F_{\min}: mg = \frac{a}{2} : b$ となるため、$F_{\min} = \frac{amg}{2b}$ (答) を得る。



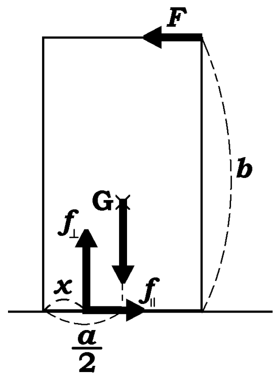
上の答え方で十分であるが、もし、答を数式だけから導きたいなら、以下のような解答になる。

床面から物体に働く力を１本の力に合成した結果の合力の

・床面に垂直な成分は上向きを正として $f_{\perp}$、

・床面に水平な成分は前面から後面に向かう向きを正として $f_{\parallel}$、

・作用点の位置は、物体の底面に沿い、物体の前面から後面方向へ向かって距離 x 進んだ地点



であるとすると、物体に働く力の釣り合う条件は、

$f_{\parallel} = F$

$f_{\perp} = mg$

$N = bF - \frac{a}{2}mg + xf_{\perp} + 0 \cdot f_{\parallel} = 0$

である。ただし N は物体の前面最下端の点のまわりの力のモーメントである（左回りを正とした）。

これらより

$x = -\frac{bF}{mg} + \frac{a}{2}$

が得られる。床面の各部分から物体に働く力は決して引力にはならないことから $0 \le x \le a$ を導くことができるので、

$0 \le -\frac{bF}{mg} + \frac{a}{2} \le a$

が成り立ち、式変形により、

$-\frac{amg}{2b} \le F \le \frac{amg}{2b}$

を得る。従って、$F \ge 0$ で釣り合いが不成立の条件は、$F > \frac{amg}{2b}$ である。

$\therefore F_{\min} = \frac{amg}{2b}$ （答）

【2】 (2) 物体に働く力が釣り合っていることから、物体の前面の最下端のまわりの力のモーメントはゼロである。即ち、

$$N = F\left(a\sin\theta + b\cos\theta\right) - mg\left(\frac{a}{2}\cos\theta - h\sin\theta\right) = 0$$

であるから $F = \dfrac{\frac{a}{2}\cos\theta - h\sin\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}mg$ （答） を得る。

【3】 (1) ニュートンの運動方程式により、質点に働く力は、質点の加速度に質量 m を乗じたものに等しい。慣性系では見かけの力は存在しないので、質点に働く力は T のみである。また、質点の加速度は、半径が r で角速度が ω の等速円運動の向心加速度 $r\omega^2$ である。$\therefore\ T = mr\omega^2$ (答)

(2) $F_{\mathrm{cen}} =$ (質点の質量) $\cdot$ (「観測者の回転軸」から質点までの距離) $\cdot$ (観測者の角速度ベクトル)^2

$= m \cdot r \cdot (-\omega)^2 = mr\omega^2$ （答）

$\vec{F}_{\mathrm{cen}}$ の方向は「観測者の回転軸」から遠ざかる方向なので、点 O から質点に向かう方向である。

$\vec{F}_{\mathrm{cor}} = 2 \cdot$ (質点の質量) (質点の速度ベクトル) $\times$ (観測者の角速度ベクトル)

において質点の速度ベクトルがゼロベクトルなので、$F_{\mathrm{cor}} = 0$ （答） を得る。

(3) $F_{\mathrm{cen}} =$ (質点の質量) $\cdot$ (「観測者の回転軸」から質点までの距離) $\cdot$ (観測者の角速度ベクトル)^2

$= m \cdot r \cdot \left(-\frac{1}{10}\omega\right)^2 = \frac{1}{100}mr\omega^2$ （答）

$\vec{F}_{\mathrm{cen}}$ の方向は「観測者の回転軸」から遠ざかる方向なので、点 O から質点に向かう方向である。

$\vec{F}_{\mathrm{cor}} = 2 \cdot$ (質点の質量) (質点の速度ベクトル) $\times$ (観測者の角速度ベクトル)

において、質点の速度ベクトルの大きさは $\frac{11}{10}r\omega$、方向は円周方向（左まわり）である。

また、観測者の角速度ベクトルの大きさは $\frac{1}{10}\omega$、向きは（右回りなので）鉛直下向きである。

従って、$\vec{F}_{\mathrm{cor}}$ の方向は、質点から点 O に向かう方向であり、

$F_{\mathrm{cor}} = 2 \cdot m \cdot \frac{11}{10}r\omega^2 \cdot \frac{1}{10}\omega = \frac{22}{100}mr\omega^2$ （答）である。

【4】 この物体の、支点を通り棒に垂直な直線のまわりの回転に関する慣性モーメントは、支点と 2 個の質点の間の距離が、それぞれ $\frac{1}{3}d$ および $d-\frac{1}{3}d=\frac{2}{3}d$ であることから、

$$I=m\left(\frac{1}{3}d\right)^2+m\left(\frac{2}{3}d\right)^2=md^2\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right)=\frac{5}{9}md^2$$

である。

一般に、剛体に働く重力は、その重心に集中して作用するとしても、剛体の運動方程式の解は同じである。この物体の重心は棒の支点に近い方の端から $\frac{1}{2}d$ の距離にあるので、支点と重心との間の距離は、$\left|\frac{1}{2}d-\frac{1}{3}d\right|=\frac{1}{6}d$ である。また、この物体に働く重力の大きさは $2mg$、方向は鉛直下方である。従って、棒の鉛直方向からの角度のずれを φ で表すと、重力がこの物体に及ぼす力のモーメントは、支点を基準点とし、φ を増加させる向きを正として、

$$N=-(2mg)\left(\frac{1}{6}d\sin\varphi\right)=-\frac{mgd}{3}\sin\varphi\approx-\frac{mgd}{3}\varphi$$

である。なお、最後の近似は微小振動のため $|\varphi|\ll 1$ なので成立する。

一般に剛体の回転の運動方程式は $I\ddot{\varphi}=N$ であるから、この物体については、

$$\ddot{\varphi}=\frac{N}{I}=-\frac{3g}{5d}\sin\varphi\approx-\frac{3g}{5d}\varphi$$

が成り立つ。微分方程式 $\ddot{\varphi}=-\omega^2\varphi$ の解は角振動数 ω での単振動であるから、この物体の微小振動解の角振動数は $\omega=\sqrt{\frac{3g}{5d}}$ である。従って、$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{5d}{3g}}$ $\cdots$ (答)。

【5】 全質量は $M=\sum_{i=1}^{N}m_i$, 重心の位置ベクトルは $\mathbf{R}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{r}_i$ で与えられる。また、問題文中の定義を数式で表すと、$\mathbf{L}_{\mathrm{G}}=M\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}$ である。さらに、重心から見た i 番目の質点の位置ベクトルを $\mathbf{r}'_i=\mathbf{r}_i-\mathbf{R}$ と書くことにすると、問題文中の $\mathbf{L}'$ の定義を数式で表したものは、$\mathbf{L}'=\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{r}'_i\times\dot{\mathbf{r}}'_i$ である。$\mathbf{L}$ の表式に $\mathbf{r}_i=\mathbf{r}'_i+\mathbf{R}$、$\dot{\mathbf{r}}_i=\dot{\mathbf{r}}'_i+\dot{\mathbf{R}}$ を代入すると、

$$\begin{aligned}\mathbf{L}&=\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{r}_i\times\dot{\mathbf{r}}_i\\&=\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\mathbf{r}'_i+\mathbf{R}\right)\times\left(\dot{\mathbf{r}}_i+\dot{\mathbf{R}}\right)\\&=\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{r}'_i\times\dot{\mathbf{r}}'_i+\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{r}'_i\times\dot{\mathbf{R}}+\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{r}}'_i+\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}\\&=\mathbf{L}'+\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{r}'_i\right)\times\dot{\mathbf{R}}+\mathbf{R}\times\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\mathbf{r}}'_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\right)\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}\end{aligned}$$

ここで、$\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{r}'_i=\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\mathbf{r}_i-\mathbf{R}\right)=\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{r}_i-\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\right)\mathbf{R}=M\mathbf{R}-M\mathbf{R}=\mathbf{0}$、

また、$\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\mathbf{r}}'_i=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{r}'_i\right)=\frac{d}{dt}\mathbf{0}=\mathbf{0}$

であることを使うと、

$\mathbf{L}=\mathbf{L}'+\mathbf{0}\times\dot{\mathbf{R}}+\mathbf{R}\times\mathbf{0}+M\mathbf{R}\times\dot{\mathbf{R}}=\mathbf{L}'+\mathbf{L}_{\mathrm{G}}$ を得る。$\cdots$ (証明終り)