力　学　Ⅱ　　定　期　試　験　問　題

福井大学工学部物理工学科１年対象、担当教員 田嶋、2008 年 2 月 4 日 4 限実施

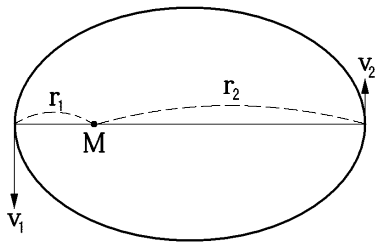
A3 判問題用紙１枚と B4 判解答用紙１枚を各人に配布する。解答用紙のおもて面の最下部に学籍番号と氏名を明記せよ。解答用紙のうら面は【5】の答を書くのに用いる。【2】～【5】については、最終的な答のみでなく説明と計算過程を必ず記せ。

【1】 下記の文の $\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{オ}}$ に語群から最も適切な語句、要を得た語句を選んで埋めよ。

地球の自転による遠心力の大きさは、赤道上では、重力の約 $\boxed{\text{ア}}$ 分の１倍である。
北半球では、西から東へと移動する物体に働くコリオリ力の水平成分は $\boxed{\text{イ}}$ 向きである。
北極点を除く北半球では、鉛直上向きに投射された物体に働くコリオリ力の働く方向は、上昇中は $\boxed{\text{ウ}}$ 向きであり、最高点を通過後の落下中は $\boxed{\text{エ}}$ 向きである。
太陽の及ぼす重力などが原因で、地軸 (地球の自転軸) の方向は、地球の公転面に垂直な方向のまわりに約 26000 年周期で回転する。これを $\boxed{\text{オ}}$ という。

【語群】
$\boxed{\text{ア}}$：3　30　300　3000　30000　300000　3000000　30000000　300000000　3000000000
$\boxed{\text{イ}}$・$\boxed{\text{ウ}}$・$\boxed{\text{エ}}$：東　南　西　北　南東　南西　北西　北東
$\boxed{\text{オ}}$：章動　秤動　摂動　地軸揺動　地軸周回　コマ運動　日周運動　年周運動　歳差運動　万年運動

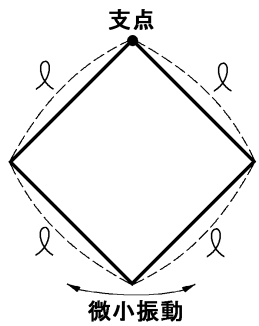
【2】 惑星のまわりを小さな衛星が楕円軌道を描いて公転している。衛星が惑星に最も近付いた地点では、両者の距離は r_1、衛星の速さは v_1 である。また、衛星が惑星から最も遠ざかった地点では、両者の距離は r_2 である。このとき以下の小問に答えよ。



(i) 惑星から最も遠ざかった地点での衛星の速さ v_2 を r_1、r_2、v_1 を用いて表せ。

(ii) 惑星の質量 M を r_1、r_2、v_1 および重力定数 G を用いて表せ。

【3】 長さ $4l$ の一様な太さの針金を使って、１辺の長さ l、質量 M の正方形を作った。正方形の一つの頂点を支点として正方形を吊り下げ、正方形を含む鉛直面内で支点のまわりに微小角度だけ回転させて振動させる場合の振動の周期 T を求めよ。



[参考]　長さ a、質量 m の細い剛体棒を、その中心を通り、棒に垂直な回転軸の周りに回転させる場合の慣性モーメントは、$\frac{1}{12}ma^2$ である。

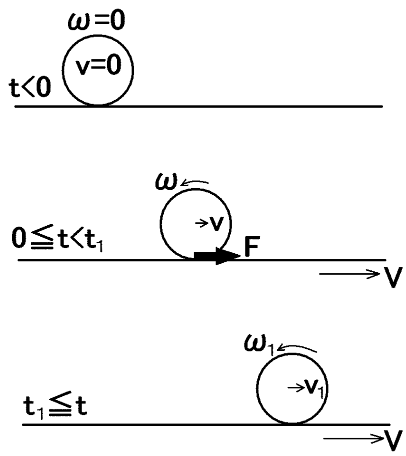
【4】 質点系の全運動エネルギーを K、質点系の重心運動のエネルギー (質点系の重心の速度の 2 乗に質点系の全質量を掛けて 2 で割ったもの) を K_{G} とする。また、質点の重心と同じ速度で運動する観測者の見た質点系の全運動エネルギーを K' とする。このとき、$K = K_{\mathrm{G}} + K'$ が成立することを示せ。

解答にあたっては、質点の個数を N、i 番目 $(1 \leq i \leq N)$ の質点の質量を m_i、位置ベクトルを $\mathbf{r}_i$ とせよ。また時間微分は 文字の上に点を付けて表せ。これらの記号を用いると、例えば K は

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2$$

と表される。重心の位置ベクトルを表す記号としては、$\mathbf{R}$ を用いよ。全質量を表す記号には、M を用いよ。また、ベクトル量は太字にするか上に矢印をのせるかして、スカラー量と区別して書け。内積を表す「・」は省略してはならない。

【5】 水平な板の上に円筒が置かれている。板と円筒の表面との間の動摩擦係数は μ である。円筒は、質量 m、半径 r で、重心が円筒の中心線上にあり、中心線のまわりに回転させる場合の慣性モーメントは I である。



時刻 $t < 0$ では、円筒が板の上に置かれた状態で、円筒・板ともに静止していた。時刻 $t = 0$ に突然、板が水平方向右向きに速さ V で運動を始め、以後、等速度 V で運動を続けた。板と円筒の表面との間に相対運動が生じたため、円筒は板から水平方向右向きの動摩擦力 F (重力加速度を g とすると、$F = \mu mg$ である) を受けるようになり、この動摩擦力により、円筒は右方向へ並進運動を始めるとともに、中心軸のまわりに左回りの回転運動を始めた。円筒の並進運動は一定の加速度 a で加速し続け、回転運動もまた一定の角加速度 $\dot{\omega}$ で加速し続けた。その結果、時刻 t_1 には、円筒の表面と板との間の相対速度がゼロになった。$t > t_1$ では、摩擦力は働かず、円筒の右方向への並進運動の速度は一定値 v_1 を、左回りの回転の角速度は一定値 ω_1 を保った。

a、$\dot{\omega}$、t_1、v_1、ω_1 を m、r、I、V、μ、g のうち必要なものを使って表せ。

[1]　ア 300　　イ 南　　ウ 西　　エ 東　　オ 歳差運動

（解説）

ア　地球の半径は $r \fallingdotseq 6400\,\mathrm{km}$。

r を覚えていなければ、メートルの元々の定義「北極から赤道までの子午線に沿っての距離が1万km」から計算するとよい。

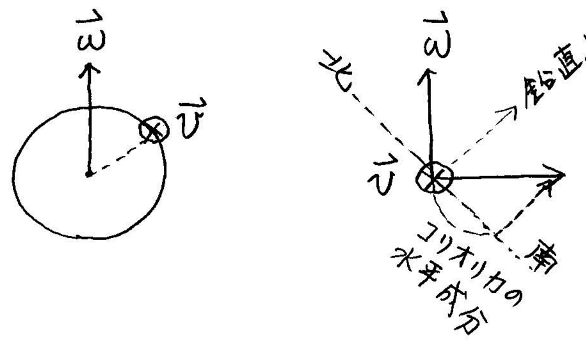
$$\frac{\pi}{2}r = 10^7\,\mathrm{m} \qquad \therefore r = \frac{2}{\pi}\times 10^7 \fallingdotseq 7\times 10^6\,\mathrm{m}$$

地球の自転の周期は 1日 = 86400秒なので、自転の角速度 ω は

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} \fallingdotseq 7\times 10^{-5}\,\mathrm{s^{-1}}$$

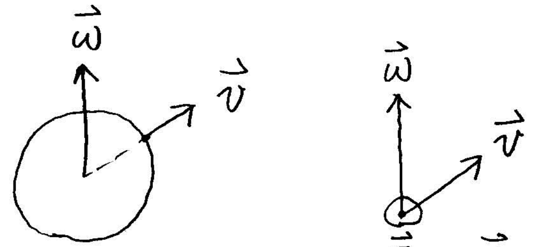
$$\therefore \frac{(\text{重力})}{(\text{遠心力})} = \frac{mg}{mr\omega^2} = \frac{g}{r\omega^2} \fallingdotseq \frac{10}{7\times 10^6 \times (7\times 10^{-5})^2} \fallingdotseq \frac{10}{4\times 10^{-3}} \fallingdotseq 3\times 10^2$$

イ



（補足）南半球でも $\vec{F}$ の向きは同じだが、鉛直方向の向きが変わるので、$\vec{F}$ の水平成分は北向きとなる。

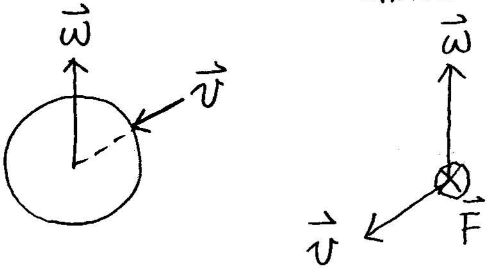
ウ



$\vec{F} = 2m\vec{v}\times\vec{\omega}$ （コリオリ力）は西向き

（補足）南半球でも西向きである。

エ



$\vec{F} = 2m\vec{v}\times\vec{\omega}$ （コリオリ力）は東向き

（補足）南半球でも東向きである。

オ　試験勉強では、まず講義ノートを始めから終りまで読み直して下さい。地軸周回という誤答が多かったですが、歳差というそのものずばりのテクニカルタームが選べるときに、説明用の造語を選んではいけません。

[2] (i) 衛星は小さいとして、惑星を不動と考えれば、衛星に働く力は惑星を中心とする中心力である惑星の重力だけであるから、惑星を基準点として定義される角運動量は保存される。

衛星の質量を m とすると　角運動量が2地点で一致することから

$$m r_1 v_1 = m r_2 v_2 \qquad \therefore \quad v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1 \quad (答)$$

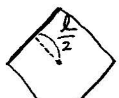
(ii) 2地点で力学的エネルギー（運動エネルギーと重力のポテンシャルエネルギーの和）が等しいことから

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{GMm}{r_2}$$

$$\therefore \quad M = \frac{(v_1^2 - v_2^2) r_1 r_2}{2G(r_2 - r_1)}$$

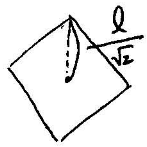
(i)の答を代入すると　$M = \dfrac{v_1^2 r_1 (r_1 + r_2)}{2G r_2}$　(答)

[3] 正方形の各辺を、各辺の中点のまわりに回すときの慣性モーメントは $\frac{1}{12}\frac{M}{4}l^2 = \frac{1}{48}Ml^2$ である。慣性モーメントに関する平行軸の定理を利用すると、正方形の重心についての各辺の慣性モーメントは $\frac{1}{48}Ml^2 + \frac{M}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}Ml^2$ である



4辺の寄与を合わせると、正方形の重心についての慣性モーメントは $4 \times \frac{1}{12}Ml^2 = \frac{1}{3}Ml^2$ である。再び平行軸の定理を利用して、正方形の、ピボットについての慣性モーメントは

$$I = \frac{1}{3}Ml^2 + M\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{5}{6}Ml^2 \text{ である。}$$



振動に伴う回転の角度を θ とすると、運動方程式は

$$I\ddot{\theta} = -\frac{l}{\sqrt{2}}Mg\sin\theta \fallingdotseq -\frac{l}{\sqrt{2}}Mg\theta.$$

解は A, δ を定数として $\theta = A\sin(\omega t + \delta)$, $\omega = \sqrt{\dfrac{lMg}{\sqrt{2}I}}$

振動の周期 T は　$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{5\sqrt{2}l}{6g}}$　(答)

[4]

$$\mathbb{R} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \mathbb{r}_i ,\quad \Big) \text{5点.}$$

$$\dot{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \dot{\mathbb{r}}_i = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbb{r}}_i ,\quad \Big) \text{2点.}$$

$$K' = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i (\dot{\mathbb{r}}_i - \dot{\mathbb{R}})^2 \quad \Big) \text{5点.}$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbb{r}}_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbb{r}}_i\right)\cdot\dot{\mathbb{R}} + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\dot{\mathbb{R}}^2 \\ &= K - M\dot{\mathbb{R}}\cdot\dot{\mathbb{R}} + \frac{1}{2}M\dot{\mathbb{R}}^2 \\ &= K - M\dot{\mathbb{R}}^2 + \frac{1}{2}M\dot{\mathbb{R}}^2 \\ &= K - \frac{1}{2}M\dot{\mathbb{R}}^2 \end{aligned}\right) \text{6点.}$$

$$\therefore K = K' + \frac{1}{2}M\dot{\mathbb{R}}^2 = K' + K_G \quad \Big) \text{2点.}$$

[5]

$$ma = F \qquad \therefore a = \frac{F}{m} = \frac{\mu m g}{m} = \mu g \qquad \therefore a = \mu g \ \text{(答)} \ \text{6点}$$

$$I\dot{\omega} = Fr \qquad \therefore \dot{\omega} = \frac{Fr}{I} = \frac{\mu m g r}{I} \qquad \therefore \dot{\omega} = \frac{\mu m g r}{I} \ \text{(答)} \ \text{6点.}$$

時刻 t に、

$$v = at ,\quad \omega = \dot{\omega} t .$$

接地点の速度を v_t とすると

$$v_t = v + \omega r = (a + \dot{\omega} r)t = \mu g\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)t$$

$t = t_1$ で $v_t = V$ となるので

$$\mu g\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)t_1 = V ,\qquad \therefore t_1 = \frac{V}{\mu g\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)} \ \text{(答)} \ \text{6点.}$$

$$v_1 = a t_1 = \frac{V}{1 + \frac{mr^2}{I}} \ \text{(答)} \ \text{1点.}$$

$$\omega_1 = \dot{\omega} t_1 = \frac{\mu m g r}{I}\cdot\frac{V}{\mu g\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)} = \frac{mrV}{I + mr^2} \ \text{(答)} \ \text{1点.}$$

(補足)「剛体の運動方程式」を復習して下さい。