力学Ⅱ　定期試験問題

福井大学工学部物理工学科１年対象、担当教員 田嶋、2007 年 2 月 5 日 4 限実施

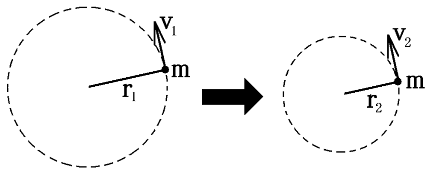
B4 判問題用紙１枚と B4 判解答用紙１枚を各人に配布する。解答用紙のおもて面の最下部に学籍番号と氏名を明記せよ。解答用紙のうら面は【6】の答を書くのに用いる。

【1】 下記の文の$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{オ}}$に問題末の語群から語句を選んで埋めよ。

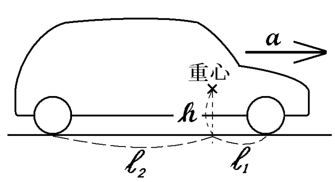
一様回転する座標系ではコリオリ力と遠心力の２種類の見掛けの力が働くように見える。
地球の自転の角速度を ω とすると、地球上の観測者にとっては、コリオリ力の大きさは ω の $\boxed{\text{ア}}$ 乗に比例し、遠心力の大きさは ω の $\boxed{\text{イ}}$ 乗に比例する。
地球上の観測者の立場で言えば、静止衛星が静止しているのは、静止衛星に働く重力と $\boxed{\text{ウ}}$ がつりあっているからである。また、静止衛星に $\boxed{\text{エ}}$ が働かないのは、静止衛星の $\boxed{\text{オ}}$ がゼロであるからである。

【語群】
$\boxed{\text{ア}}$・$\boxed{\text{イ}}$： $-4 \quad -3 \quad -2 \quad -\frac{3}{2} \quad -1 \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{3} \quad -\frac{1}{4} \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \quad 2 \quad 3 \quad 4$
$\boxed{\text{ウ}}$・$\boxed{\text{エ}}$： コリオリ力　遠心力
$\boxed{\text{オ}}$：質量　慣性モーメント　電荷　体積　エネルギー　位置ベクトル　速度　加速度　向心力　浮力

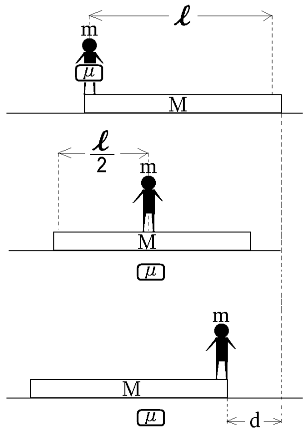
【2】 質量の無視できる伸び縮みしない糸の一端を質量 m の質点に接着し、糸の他端を滑らかな水平面に開いた微小な孔に固定して、質点に水平面上で孔を中心とする円運動をさせた。時刻 $t = t_1$ には円運動の半径は r_1、質点の速度は v_1 であった。その後、時刻 t が $t_1 < t < t_2$ の間に、外力により糸がゆっくりと孔のなかに引き込まれたため、円運動の半径は減少し、時刻 t_2 には円運動の半径は r_2 となった。時刻 $t_1 < t < t_2$ の間に、糸が質点にした仕事 W を求めよ。ただし、糸は十分にゆっくりと引き込まれたため、糸がたるむことはなかったとせよ。したがって、時刻 t_1 および t_2 には質点は正確に等速円運動を行っていた。



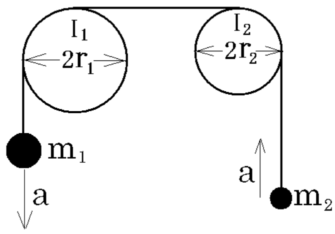
【3】 質量 m の自動車が前方へ加速度 a で加速しているとき路面が２個の前輪に及ぼす垂直抗力の和 N_1、２個の後輪に及ぼす垂直抗力の和 N_2 を求めよ。ただし、座標軸を、x 軸は自動車の前方方向を向き自動車の重心で $x = 0$ となるように、z 軸は鉛直方向上向きで路面で z=0 となるようにとると、自動車の重心の座標は $(x,z)=(0,h)$、前輪の接地点の座標は $(x,z)=(l_1,0)$ 後輪の接地点の座標は $(x,z)=(-l_2,0)$ である。速度は十分に小さく、したがって、空気抵抗は無視できるとせよ。重力加速度は g とせよ。



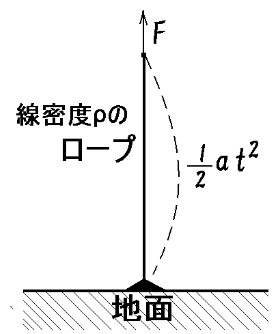
【4】 水面上に静止した質量 M、長さ l の舟の左端に質量 m の人が質量 μ の荷物を持って立っている。人が荷物を持って舟の中央まで歩き、そこで真下の水中へ荷物を沈め、その後手ぶらで舟の右端まで歩くと、反動で舟は距離 d だけ左方向へ移動する。この d を求めよ。ただし、水面から舟に水平方向の力は働かず、空気抵抗も無視できるとする。重力加速度は g とせよ。



【5】 右図のように、質量 m_1 および m_2 の錘 2 個が質量の無視できる伸び縮みしない糸で結ばれ、糸は滑らかに回転できる 2 個の定滑車にかけられている。定滑車の半径は r_1 および r_2, 慣性モーメントは I_1 および I_2 である。定滑車と糸とのあいだに滑べりはおきないものとする。$m_1 > m_2$ であるとき、m_1 の落下の加速度 a を求めよ。重力加速度は g とせよ。



【6】 地面の上に一塊にして置かれたロープの上端に鉛直上方の力 F を加えてロープの上端を一定加速度 a で上昇させたい。時刻 $t = 0$ にはロープの上端の地面からの高さおよび速さはともに 0 であるとして、時刻 t （> 0）における力 F を、t、a、ロープの単位長さあたりの質量 ρ、重力加速度 g を用いて表せ。ただし、ロープの下端が地面を離れて以降の状況は考察しなくてよい。



力 学 II　定 期 試 験　答 案 用 紙

福井大学 工学部 物理工学科 1 年生対象、　担当教員 田嶋、　2007 年 2 月 5 日 4 限実施

【1】 10 点

ア	イ	ウ	エ	オ

【2】 15 点

【3】 15 点

【4】 20 点

【5】 20 点

【6】 は裏面に解答せよ.(20 点)

学科		学籍番号									氏名	

得点

[1]	[2]	[3]	合計
[4]	[5]	[6]	

力学Ⅱ　定期試験　解答・解説

福井大学工学部物理工学科 1 年対象、担当教員 田嶋、
2007 年 2 月 5 日 4 限実施分

【1】 $\boxed{ア}$: 1 , $\boxed{イ}$: 2 , $\boxed{ウ}$: 遠心力,

$\boxed{エ}$: コリオリ力, $\boxed{オ}$: 速度

(解説)

コリオリ力は $\vec{F}_{\rm cor} = 2m\vec{v}\times\vec{\omega}$ $\therefore\ F_{\rm cor}\propto\omega^1$

遠心力は $\vec{F}_{\rm cen} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ $\therefore\ F_{\rm cen}\propto\omega^2$

静止衛星は、地上の観測者から見て、常にある一定の方向に、ある一定の距離だけ離れた点にある。言い替えると、静止衛星の位置ベクトルの地上の観測者の座標系での 3 成分はいずれも時間微分するとゼロになる。このことは上記のコリオリ力の表式で $\vec{v}=\vec{0}$ であることを意味するので、$\vec{F}_{\rm cor}=\vec{0}$ となる。

【2】 糸が質点に及ぼす力は常に孔の方向を向いている。即ち中心力であるため、質点の (孔を基準点とする) 角運動量は保存される。よって、時刻 t_2 での質点の速さを v_2 とすると、

$$mr_1v_1 = mr_2v_2$$
$$\therefore\quad v_2 = \frac{r_1}{r_2}v_1$$

時刻 t_1 から t_2 の間に質点になされた仕事は糸からなされた仕事 W だけであるから、力学的エネルギーの保存により、W は質点の運動エネルギーの増加 ΔE に等しくなる。

$$W = \Delta E = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \frac{(r_1^2-r_2^2)mv_1^2}{2r_2^2}\ (答)$$

【3】 摩擦により路面が前輪および後輪を x 軸の正の方向に押す力を、それぞれ F_1、F_2 とする (動力のない車輪では力が負の値をとるが以下の諸式はその場合も成り立つ)。

自動車に働く鉛直方向の力のつりあいにより、

$$N_1 + N_2 - mg = 0 \quad \cdots (1)$$

自動車の水平方向の運動方程式により

$$F_1 + F_2 = ma \quad \cdots (2)$$

重心を基準点とすれば自動車に働く y 軸方向の力のモーメントは加速度のある場合もつりあうので、

$$-N_1l_1 + N_2l_2 - F_1h - F_2h = 0 \quad \cdots (3)$$

(2) を (3) に代入すると、

$$-N_1l_1 + N_2l_2 - mah = 0 \quad \cdots (4)$$

(1) と (4) を N_1 と N_2 を未知数とする連立一次方程式として解を求めると、

$$N_1 = \frac{m(gl_2-ah)}{l_1+l_2}、N_2 = \frac{m(gl_1+ah)}{l_1+l_2}\ (答)$$

【4】 水平方向右向きに x 軸をとる。(人＋荷物) 系および舟の重心の x 座標を、人が舟の左端にいるとき、それぞれ、x_1、X_1、人が舟の中央についたとき、それぞれ、x_2、X_2 とする。

(舟＋人＋荷物) 系の重心の x 座標 $X_{\rm G}$ は、系に働く x 軸方向の外力がないことから不動であるので、

$$X_{\rm G} = \frac{(m+\mu)x_1 + MX_1}{m+\mu+M} = \frac{(m+\mu)x_2 + MX_2}{m+\mu+M}$$
$$\therefore\quad (m+\mu)x_1 + MX_1 = (m+\mu)x_2 + MX_2$$

d' を $X_2 = X_1 - d'$ で定義すると、$x_2 = x_1 - d' + \frac{l}{2}$ の関係が成り立つので、

$$(m+\mu)x_1 + MX_1 = (m+\mu)\left(x_1 - d' + \tfrac{l}{2}\right) + M(X_1 - d')$$
$$\therefore\quad d' = \frac{m+\mu}{M+m+\mu}\cdot\frac{l}{2}\ (答)$$

つぎに、人が舟の右端についたときの人および舟の重心の x 座標を、それぞれ、x_3、X_3 とする。人が舟の中央にいるときの x 座標は x_2 である。

(人＋舟) 系の重心の x 座標 $X'_{\rm G}$ は、人が舟の中央で荷物を水中に沈めたあとは、系に働く x 軸方向の外力がないことから不動であるので、

$$X'_{\rm G} = \frac{MX_2 + mx_2}{M+m} = \frac{MX_3 + mx_3}{M+m}$$
$$\therefore\quad MX_2 + mx_2 = MX_3 + mx_3$$

d'' を $X_3 = X_2 - d''$ で定義すると、$x_3 = x_2 - d'' + \frac{l}{2}$ の関係があるので、

$$mx_2 + MX_3 = m\left(x_2 - d'' + \tfrac{l}{2}\right) + M(X_1 - d'')$$
$$\therefore\quad d'' = \frac{m}{M+m}\cdot\frac{l}{2}\ (答)$$

$d = d' + d''$ なので　$d = \left(\frac{m+\mu}{M+m+\mu} + \frac{m}{M+m}\right)\frac{l}{2}$ (答)

あるいは通分して、$d = \frac{2m^2+2Mm+2m\mu+\mu M}{(M+m+\mu)(M+m)} \cdot \frac{l}{2}$ (答)

【5】 質量 m_1 の錘と半径 r_1 の定滑車との間の部分での糸の張力を T_1、質量 m_2 の錘と半径 r_2 の定滑車との間の部分での糸の張力を T_2、半径 r_1 の定滑車と半径 r_2 の定滑車との間の部分での糸の張力を T_3 とする。

質量 m_1 の錘の鉛直方向の運動方程式は、

$$m_1 a = -T_1 + m_1 g \quad \cdots (1)$$

質量 m_2 の錘の鉛直方向の運動方程式は、

$$m_2 a = T_2 - m_2 g \quad \cdots (2)$$

半径 r_1 の定滑車の回転の運動方程式は、回転の角加速度を $\dot{\omega}_1$ として、

$$I_1 \dot{\omega}_1 = (T_1 - T_3) r_1 \quad \cdots (3)$$

半径 r_2 の定滑車の回転の運動方程式は、回転の角加速度を $\dot{\omega}_2$ として、

$$I_2 \dot{\omega}_2 = (T_3 - T_2) r_2 \quad \cdots (4)$$

また、定滑車と糸との間に滑べりがないので、

$$r_1 \dot{\omega}_1 = a \quad \cdots (5)$$

$$r_2 \dot{\omega}_2 = a \quad \cdots (6)$$

(1)〜(6) 式を a、$\dot{\omega}_1$、$\dot{\omega}_2$、T_1、T_2、T_3 を未知数とする連立一次方程式として解を求める。(3) と (4) より T_3 を消去すると、

$$T_1 - \frac{I_1}{r_1^2} a = T_2 + \frac{I_2}{r_2^2} \quad \cdots (7)$$

(7) において T_1 を (1) を使って消去し、T_2 を (2) を使って消去し、$\dot{\omega}_1$ を (5) を使って消去し、$\dot{\omega}_2$ を (6) を使って消去すると、

$$m_1(g-a) - \frac{I_1}{r_1^2} a = m_2(g+a) + \frac{I_2}{r_2^2} a$$

$$\therefore \quad \left(m_1 + m_2 + \frac{I_1}{r_1^2} + \frac{I_2}{r_2^2} \right) a = (m_1 - m_2) g$$

$$\therefore \quad a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I_1}{r_1^2} + \frac{I_2}{r_2^2}} g \quad (答)$$

【6】 ロープの吊り上げられた部分の長さ、速さ、質量を l_1、v_1,m_1、v_1 とする。v_1 および l_1 の従う微分方程式は

$$\frac{d}{dt} v_1 = a, \quad \frac{d}{dt} l_1 = v_1,$$

である。初期条件 $v_1(t=0) = 0$、 $l_1(t=0) = 0$ に対応するこれらの微分方程式の解は、

$$v_1 = v_1(0) + \int_0^t a d\tau = at、$$

$$l_1 = l_1(0) + \int_0^t a\tau d\tau = \frac{1}{2} a t^2$$

である。また、

$$m_1 = \rho l_1 = \frac{1}{2} \rho a t^2$$

である。

ロープの地面に置かれた部分の長さ、速さ、質量を l_2、v_2、m_2 とする。(なお、ロープ全体の長さを L、質量を M とすると、$l_2 = L - l_1$, $m_2 = M - m_1$ であるが、この関係は以下の計算には不要である。) ロープ全体の運動量 P は、

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

である。$v_2 = 0$ であるから、

$$P = m_1 v_1 = \frac{1}{2} \rho a t^2 \cdot at = \frac{1}{2} \rho a^2 t^3$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt} P = \frac{1}{2} \rho a^2 \frac{d}{dt} t^3 = \frac{3}{2} \rho a^2 t^2$$

ロープ全体からなる系に働く外力は、ロープ上端を引く力 F、ロープの吊り上げられた部分に働く重力 $m_1 g$、ロープの地面に置かれた部分に働く重力 $m_2 g$、地面がロープに及ぼす垂直抗力である。垂直抗力は $m_2 g$ とちょうど相殺する。従って、外力の和は $F - m_1 g$ である。

系の全運動量の時間変化率 $\frac{d}{dt} P$ は系に働く外力の和に等しいので、

$$\frac{d}{dt} P = F - m_1 g$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad F &= m_1 g + \frac{d}{dt} P \\ &= \frac{1}{2} \rho a g t^2 + \frac{3}{2} \rho a^2 t^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho a t^2 (3a + g) \quad (答) \end{aligned}$$