応 用 力 学　　定 期 試 験 問 題

福井大学工学部応用物理学科 1 年対象、担当教員 田嶋、2019 年 2 月 4 日 4 限実施

A3 判問題用紙 1 枚（表裏印刷）と B4 判解答用紙 1 枚を各人に配布する。解答用紙のおもて面の最下部に学籍番号と氏名を記入せよ。解答用紙 1 枚だけを提出せよ。【2】〜【4】については、最終的な答のみでなく説明と計算過程を必ず記せ。

【1】

下記の文の ア ～ ホ に語群から最も適切な語句を選んで埋めよ。

地球の半径 $R = 6.4 \times 10^6$m, ア. 重力 定数 $G = 6.7 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}, および $g = 9.8$ ms^{-2} から求めた地球の質量は、約 $6.0 \times 10^{\text{イ. } 24}$ kg である。

ア: 地球　太陽　宇宙　自転　公転　質量　重力　磁力　電気　遠心　コリオリ　ニュートン

イ: １０のベキ乗の部分に当てはまる整数を書け。

ケプラーの第３法則とは、同じ恒星のまわりを回る全ての惑星の公転周期は楕円軌道の長軸半径の ウ. $\frac{3}{2}$ 乗に比例するという法則である。（覚えていなくても、円軌道の場合について考察すれば高校生にも分かる。）このことから、周期が 366 年の池谷・張彗星の軌道の長軸半径は、地球の軌道の長軸半径の約 エ. 50 倍である。

ウ: 整数か既約分数で答えよ。

エ: 4　7　20　50　80　110　140　366　1200　2600　7000　130000

地球のまわりの円軌道を回る人工衛星の運動エネルギーを K、(地球の及ぼす) 重力の位置エネルギーを U (無限遠点での値を 0 とする）とするとき、$\frac{-U}{K}$ の値は オ. 2 となる。この関係から、人工衛星の円軌道の半径が大きいほど衛星の速度は カ. 小さい ことが結論できる。

オ: $\frac{1}{5}$　$\frac{2}{9}$　$\frac{1}{4}$　$\frac{2}{7}$　$\frac{1}{3}$　$\frac{2}{5}$　$\frac{1}{2}$　$\frac{2}{3}$　1　$\frac{3}{2}$　2　$\frac{5}{2}$　3　$\frac{7}{2}$　4　$\frac{9}{2}$　5

カ: 大きい　小さい　大きいとか小さいとかはそれだけの情報では決められない

[解説] 教科書 p.149 演習問題 B.1

質点 P の質量を m, 時刻 t における位置ベクトルを $\vec{r}(t)$、速度を $\vec{v}(t)$、運動量を $\vec{p}(t)$、（位置ベクトルの座標原点を基準点として定義された）角運動量を $\vec{L}(t)$、運動エネルギーを $E_{\mathrm{K}}(t)$、質点 P に働く力を $\vec{F}(t)$ とする。このとき、任意の２つの時刻 $t_1 < t_2$ に対して下記の等式が成立する。

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boxed{\text{キ. } \vec{F}(t)}\, dt, \quad \vec{L}(t_2) - \vec{L}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boxed{\text{ク. } \vec{r}(t) \times \vec{F}(t)}\, dt, \quad E_{\mathrm{K}}(t_2) - E_{\mathrm{K}}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boxed{\text{ケ. } \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)}\, dt.$$

キ・ク・ケ: 数式で答えよ.

材質の一様な半径 R の半球の重心と、半球の中心（半球２個で作れる球の中心のこと) との距離を d とする。R=80cm のときは、d= コ. 30 cm であり、R=160cm のときは、d= サ. 60 cm である。

コ: 10　20　30　40　50　60　70　80　90　100　110　120　130　140　150

[解説] 教科書 p.159 演習問題 11.B.1

フィギュアスケートのスピンの最中に、スケーターが腕を体に引き寄せるとスピンの軸のまわりの シ. 慣性モーメント が小さくなる。ス. 角運動量 は シ. 慣性モーメント と セ. 角速度 の積であるが、ス. 角運動量 が一定であるために セ. 角速度 が増加することになりスピンが速くなる。

シ: 回転速度　回転エネルギー　回転モーメント　力のモーメント　慣性モーメント　質量モーメント
ス・セ: 位置　速度　加速度　角度　角速度　角加速度　運動量　角運動量　運動エネルギー

長さ 9m の質量の無視できる棒の左端を点 A, 左端から距離 3m の点を点 B, 距離 6m の点を点 C, 右端を点 D とする。点 B および点 C にはそれぞれ質量 m_{B}kg および m_{C}kg の錘が吊り下げられている。つりあいの状態において、点 A および点 D には鉛直上向きに、それぞれ 25kgf および 20kgf の力が加えられている。このとき、m_{B}=[ソ. 30] kg, m_{C}=[タ. 15] kg である。また、二つの錘を左端から[チ. 4] m の点に集めても両端にかかる力は変わらない。
ソ・タ・チ: 整数か既約分数で答えよ。

質量が m、 長さが a で、一定の線密度を持つ剛体棒の、棒に垂直な回転軸に対する慣性モーメントは、回転軸が棒の中心を通る場合は $\frac{1}{12}ma^2$ であり、棒を $\frac{1}{4}a$: $\frac{3}{4}a$ に内分する点を通る場合は[ツ. $\frac{7}{48}$] ma^2 である。
ツ: 整数か既約分数で答えよ。

円筒形をした飲料の缶を斜面に置いて転がすとき、中身が液体のとき、凍ったとき、空のときのうち最も速く転がり落ちるのは[テ. 液体の] ときであり、最も遅く転がり落ちるのは[ト. 空の] ときである。
テ・ト: 液体の　凍った　空の
[解説] 教科書 p.181 演習問題 13.A.3

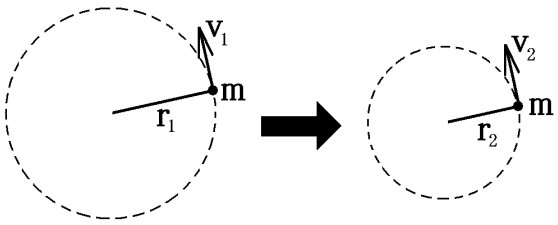
太陽は数十億年後には膨脹して赤色巨星になると考えられている。現在の太陽と較べて、赤色巨星になったときは、自転の角速度は[ナ. 小さい] であろう。また、自転による角運動量は[ニ. 変わらない] であろう。
ナ・ニ: 大きい　小さい　変わらない
[解説] 教科書 p.137 演習問題 9.A.2

地球の自転の角速度を ω とし、地軸の歳差運動の角速度を Ω とすると、Ω は ω の[ヌ. -1] 乗に比例し、地球の慣性モーメントの[ネ. -1] 乗に比例する。また、北極星から見て（より適切には黄道北極から見て)、地軸の歳差運動は[ノ. 右] 巻きである。
ヌ・ネ: 整数か既約分数で答えよ。
ノ: 左　右

北半球では、低気圧に吹き込む風は (上空から見下ろして)[ハ. 左] 巻きに回転し、高気圧から吹き出す風はその逆巻きに回転する。従って北半球では或る地域の[ヒ. 西] に高気圧、[フ. 東] に低気圧があるとき、その地域には北極方面からの寒気が流れ込んで寒くなる。
ハ: 右　左
ヒ・フ: 東　南　西　北

水の入ったバケツの持ち手を持って鉛直面内で半径 1m の円を描いて等角速度で回すとき、バケツが真上にきても水がこぼれないという条件で定まる回転の周期の上限値は[ヘ. 2.0] 秒である。また、円運動の半径が 10%増加すると、回転の周期の上限値は約[ホ. 5] %増加する。
ヘ: 0.5　1.0　1.5　2.0　2.5　3.0　3.5　4.0　4.5　5.0
ホ: 0　1　2　3　4　5　6　7　8　9　10

【2】 質量の無視できる伸び縮みしない糸の一端を質量 m の質点に接着し、糸の他端を滑らかな水平面に開いた微小な孔に固定して、質点に水平面上で孔を中心とする円運動をさせた。時刻 $t = t_1$ には円運動の半径は r_1、質点の速度は v_1 であった。その後、時刻 t が $t_1 < t < t_2$ の間に、外力により糸がゆっくりと孔のなかに引き込まれたため、円運動の半径は減少し、時刻 t_2 には円運動の半径は r_2 となった。時刻 $t_1 < t < t_2$ の間に、糸が質点にした仕事 W を m、r_1、r_2、v_1 を使って表せ。（右図に描き込まれた速度 v_2 は答の導出過程でのみ使用せよ。）ただし、糸は十分にゆっくりと引き込まれたため、糸がたるむことはなかったとせよ。また、時刻 t_1 および t_2 には質点は正確に等速円運動を行っていた。



2013 年度後期 力学 II 定期試験 大問 [2] の再出題です。

解答例

この質点に働く水平方向の外力は糸の張力だけである。糸の張力は常に孔に向かう中心力である。従って、（孔を基準点として定義された）質点の角運動量（の鉛直方向の成分）は保存される。

$\therefore mr_1v_1 = mr_2v_2,\ v_2 = \frac{r_1}{r_2}v_1$

運動エネルギーの変化は為された仕事に等しいので,

$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{r_1}{r_2}v_1\right)^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{r_1^2}{r_2^2} - 1\right)v_1^2 \cdots$(答)

【3】 2 質点系について考える。第 1 の質点の質量を m_1, 位置ベクトルを $\vec{r}_1$ とし、第 2 の質点の質量を m_2, 位置ベクトルを $\vec{r}_2$ とする。また、2 つの質点の相対ベクトルを $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ とする。以下の小問に答えよ。

(1) 系の重心の位置ベクトル $\vec{R}$ を m_1, m_2, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ を使って表せ。(最終的な答だけを記せば良く、導出は不要である。)

(2) $K_i = \frac{1}{2} m_i \left|\dot{\vec{r}}_i\right|^2$ $(i = 1, 2)$, $K = K_1 + K_2$, $K_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left|\dot{\vec{R}}\right|^2$, $K' = K - K_{\mathrm{G}}$ とするとき、α を m_1 と m_2 だけで決まる定数として、$K' = \alpha \left|\dot{\vec{r}}\right|^2$ と表せることを示せ。
なお、解答の最後に、「$\alpha =$」に続けて m_1 と m_2 の数式を記すこと。

(3) $\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$ $(i = 1, 2)$, $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$, $\vec{L}_{\mathrm{G}} = (m_1 + m_2)\vec{R} \times \dot{\vec{R}}$, $\vec{L}' = \vec{L} - \vec{L}_{\mathrm{G}}$ とするとき、β を m_1 と m_2 だけで決まる定数として、$\vec{L}' = \beta \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ と表せることを示せ。
なお、解答の最後に、「$\beta =$」に続けて m_1 と m_2 の数式を記すこと。

<u>解答例</u>

(1)

$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ $\cdots$(答)

(2)

$$K' = K - K_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2} - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot \left\{(m_1 + m_2)\left(m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} + m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2}\right) - \left(m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2\right)^2\right\}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot \left(m_1 m_2 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} - 2 m_1 m_2 \dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_2 + m_1 m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}^{\,2} \cdots (\text{答}), \quad \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdots (\text{答})$$

(3)

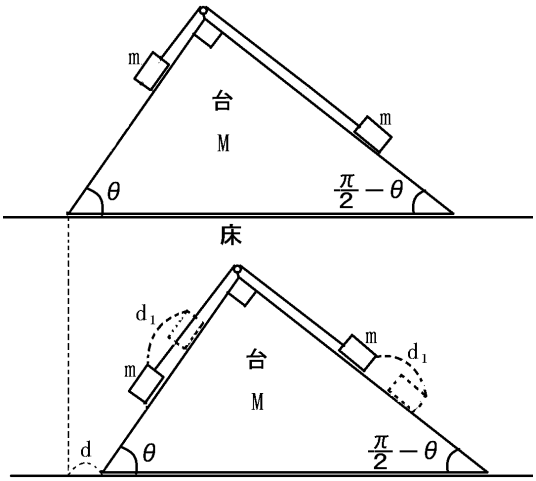
$$\vec{L}' = \vec{L} - \vec{L}_{\mathrm{G}} = m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 - (m_1 + m_2)\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \times \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2}$$
$$= \frac{1}{m_1 + m_2}\left\{(m_1 + m_2)\left(m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2\right) - (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \times \left(m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2\right)\right\}$$
$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 - \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_2 - \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2\right) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \left(\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2\right)$$
$$= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \cdots (\text{答}), \quad \beta = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdots (\text{答})$$

【4】 下図のように滑らかな床の上に質量 M の直角三角形の形をした台が斜辺を底面にして置かれている。台の左斜面が床面となす角は θ (但し、$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$) であり、右斜面が床面となす角は $\frac{\pi}{2} - \theta$ である。台の左右の斜面上には質量 m の小物体が 1 個ずつ乗っている。これらの小物体は伸び縮みしない質量の無視できる糸で、滑らかに回る定滑車を介してつながっている。糸は斜面に平行に張られている。時刻 $t = 0$ で全ての物体は静止していた。時刻 $t > 0$ で左側の小物体は左斜面を滑り降り、右側の小物体は右斜面を滑り上がり、台はその反動で水平方向右向きに移動した。なお、小物体が斜面から浮き上がることはなかった。台と小物体との間、および、台と床との間の摩擦力は無視できるとする。重力加速度を g として、以下の小問 (1)〜(3) に答えよ。

(1) 左側の小物体が斜面に沿って距離 d_1 だけ進んだ時点で、台は水平方向右向きへ距離 d だけ移動していた。このとき、比 d/d_1 を M, m, θ を用いて表せ。

(2) 台の加速度の水平方向の成分（右向きを正とする）を a とする。台とともに運動する観測者 S から見ての 2 個の小物体それぞれの斜面方向の運動方程式を書け。ただし、小物体の加速度は、観測者 S から見て、斜面に沿う方向に大きさ a_1 とする。糸の張力は T $(T > 0)$ とせよ。

(3) 比 a/a_1 は、小問 (1) で求めた比 d/d_1 に等しい。このことと小問 (2) の答を組み合わせることで、a を M,m,θ,g を用いて表せ。



2011 年度後期 力学 II 定期試験 大問 [4] の再出題です。

解答例

(1) 机上の観測者から見て水平方向の移動距離は台が d、左側の小物体が $d-d_1\cos\theta$、右側の小物体が $d-d_1\sin\theta$ である。系に水平方向の外力が働かないことより系の重心は不動である。従って

(系の重心の移動距離) $=\frac{1}{M+2m}\{Md+m(d-d_1\cos\theta)+m(d-d_1\sin\theta)\}=0$

が成り立つ。式変形すると、

$(M+2m)d=m(\cos\theta+\sin\theta)d_1,\quad \frac{d}{d_1}=\frac{m(\cos\theta+\sin\theta)}{M+2m}$ $\cdots$(答)

(2) 左側の小物体の左側の斜面方向の運動方程式は、下る向きを正の向きとして、

$ma_1=mg\sin\theta+ma\cos\theta-T$

右の小物体の右側の斜面方向の運動方程式は、上る向きを正の向きとして、

$ma_1=-mg\cos\theta+ma\sin\theta+T$

(3)

２式を辺々足し合わせると

$2ma_1=mg(\sin\theta-\cos\theta)+ma(\sin\theta+\cos\theta)$

これに $a_1=\frac{d_1}{d}a=\frac{M+2m}{m(\sin\theta+\cos\theta)}a$ を代入すると

$\frac{2m(M+2m)}{m(\sin\theta+\cos\theta)}a=mg(\sin\theta-\cos\theta)+ma(\sin\theta+\cos\theta)$

$\left\{\frac{2m(M+2m)}{m(\sin\theta+\cos\theta)}-m(\sin\theta+\cos\theta)\right\}a=mg(\sin\theta-\cos\theta)$

$\therefore a=\frac{mg(\sin\theta-\cos\theta)}{\frac{2(M+2m)}{\sin\theta+\cos\theta}-m(\sin\theta+\cos\theta)}$ $\cdots$(答)

$=\frac{mg(\sin^2\theta-\cos^2\theta)}{2(M+2m)-m(\sin\theta+\cos\theta)^2}$ $\cdots$(答)$=\frac{mg(\sin^2\theta-\cos^2\theta)}{2(M+2m)-2m\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$ $\cdots$(答)

$=\frac{-mg\cos\,2\theta}{2M+2m\left\{2-\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}}$ $\cdots$(答)

注: $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\cos\,2\theta<0$

メモ：$2-\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=1+\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=2-\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=1+\sin^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$