応 用 力 学 　　定 期 試 験 問 題

福井大学工学部応用物理学科 1 年対象、担当教員 田嶋、2018 年 2 月 5 日 4 限実施

A3 判問題用紙 1 枚（表裏印刷）と B4 判解答用紙 1 枚を各人に配布する。解答用紙のおもて面の最下部に学籍番号と氏名を記入せよ。解答用紙 1 枚だけを提出せよ。【2】〜【5】については、最終的な答のみでなく説明と計算過程を必ず記せ。

【1】

下記の文の $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{ホ}}$ に語群から最も適切な語句を選んで埋めよ。

地球と比較すると、金星は質量が 0.81 倍、赤道半径が 0.95 倍である。このことより金星の表面での重力加速度は地球の表面での重力加速度の約 $\boxed{^{\text{ア.}}\ 0.90}$ 倍であることがわかる。

ア: 0.70　0.75　0.80　0.85　0.90　0.95　1.00　1.05　1.10　1.15　1.20　1.25　1.30

ケプラー運動（距離の 2 乗に反比例する引力である中心力の下での運動）する質点の軌道の形状は、力学的エネルギーが負のときには $\boxed{^{\text{イ.}}\ \text{楕円}}$ であり、正確にゼロのときには $\boxed{^{\text{ウ.}}\ \text{放物線}}$ であり、正のときには $\boxed{^{\text{エ.}}\ \text{双曲線}}$ である。ただし無限遠点で静止している状態でのエネルギーをゼロとする。

イ・ウ・エ: 直線　半直線　円　半円　楕円　放物線　双曲線　三次曲線　惑星曲線　彗星曲線

質点系に働く外力のベクトル和がゼロであるなら、系の $\boxed{^{\text{オ.}}\ \text{全運動量}}$ は保存される。

オ: 全エネルギー　全エントロピー　全運動量　全角運動量　全熱量　温度　圧力　体積　重心の位置

質点系に働く外力のモーメントのベクトル和がゼロであるなら、系の $\boxed{^{\text{カ.}}\ \text{全角運動量}}$ は保存される。

カ:　全運動量　全角運動量　全エネルギー　全エントロピー　重心の位置　重心の速度　重心の加速度

宇宙飛行士は宇宙遊泳中にいくら手足を振り回しても意のままに空間中を並進移動することはできないが、体の向きを変えることはできる。猫やリスなども、空中で体の向きを自在に変えうることが知られている。これは並進運動と回転運動の次のような違いに起因する。まず、$\boxed{^{\text{キ.}}\ \text{並進}}$ 運動には周期性がないが、$\boxed{^{\text{ク.}}\ \text{回転}}$ 運動には周期性がある。次に、$\boxed{^{\text{ケ.}}\ \text{質量}}$ を変化させることはできないが、$\boxed{^{\text{コ.}}\ \text{慣性モーメント}}$ を変化させることはできる。なお、宇宙飛行士や猫とは関係ないが、並進と回転のもうひとつの重要な違いとして３次元空間での運動では、$\boxed{^{\text{サ.}}\ \text{並進}}$ 運動は可換だが、$\boxed{^{\text{シ.}}\ \text{回転}}$ 運動は非可換だということがある。

キ・ク・サ・シ: 並進　回転

ケ・コ: 質量　慣性モーメント

質量 m の物体と質量 $2m$ の物体の相対運動に関する換算質量は $\boxed{^{\text{ス.}}\ \frac{2}{3}}$ m である。

ス: 既約分数で答えよ。

長さが 10m の丸太の左端を持ち上げるには 40kgf, 右端を持ち上げるには 60kgf の力が必要である。このとき、この丸太の質量は $\boxed{^{\text{セ.}}\ 100}$ kg であり、重心は左端から $\boxed{^{\text{ソ.}}\ 6}$ m の位置にある。

セ・ソ: 整数か既約分数で答えよ。

質量が m、 半径が a の円盤の、対称軸を回転軸にした場合の慣性モーメントは $\frac{1}{2}ma^2$ である。この円盤に質量が無視できる剛体棒をつけて、円盤の中心から $2a$ の距離にある円盤に垂直な回転軸のまわりに回転さ

せる場合の慣性モーメントは［タ. $\frac{9}{2}$］ma^2 である。
タ: 整数か既約分数で答えよ。

心棒のまわりに角速度 ω で高速回転しているコマの、心棒の上端が水平面内で角速度 Ω で低速の等速円運動（みそすり運動）をするとき、Ω は ω の［チ. -1］乗に比例し、心棒のまわりの慣性モーメントの［ツ. -1］乗に比例する。また、コマの心棒のまわりの高速回転が上方から見て右巻きなら、心棒のみそすり運動は［テ. 右］巻きである。
チ・ツ: 整数か既約分数で答えよ。
テ: 左　右

「ガリレオの［ト. 相対］性原理」とは「すべての［ナ. 慣性］系は同等であり、どれが真の［ニ. 静止］系かを言うことはできない」という主張である。
ト：　完全　不完全　絶対　相対　確定　不確定　不変　流動　干渉　不干渉　超越　無常　平等
ナ・ニ：　保存　可逆　可積分　静止　運動　加速度　慣性　回転　振動　波動　太陽　惑星　銀河

地球の自転による遠心力の大きさは、赤道上では、重力の約［ヌ. 300］分の 1 倍である。
ヌ:　3　10　30　100　300　1000　3000　10000

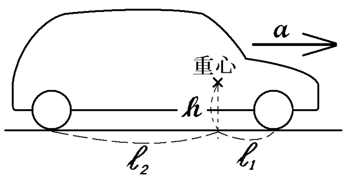
重力加速度 g の値には地球の自転による遠心力の効果が含まれている。従って［ネ. 高］緯度地方ほど重力加速度 g の値が大きくなる傾向がある。
ネ:　高　低

地球の自転に起因するコリオリ力の大きさがどんな運動をする物体についても必ずゼロとなる場所は［ノ. 存在しないの］である。
ノ：　北極点　赤道　南極点　存在しないの　（該当するものを全て書け）

一様回転する座標系ではコリオリ力と遠心力の 2 種類の見掛けの力が働くように見える。
地球の自転の角速度を ω とすると、地球上の観測者にとっては、コリオリ力の大きさは ω の［ハ. 1］乗に比例し、遠心力の大きさは ω の［ヒ. 2］乗に比例する。
地球上の観測者の立場で言えば、静止衛星が静止しているのは、静止衛星に働く重力と［フ. 遠心力］がつりあっているからである。また、静止衛星に［ヘ. コリオリ力］が働かないのは、静止衛星の［ホ. 速度］がゼロであるからである。
ハ・ヒ: 整数で答えよ。
フ・ヘ: コリオリ力　遠心力
ホ: 質量　慣性モーメント　電荷　体積　エネルギー　位置ベクトル　速度　加速度　向心力　浮力

【2】～【5】番は裏に印刷されています。

【2】 質量 m の自動車が前方へ加速度 a で加速しているとき路面が２個の前輪に及ぼす垂直抗力の和 N_1、２個の後輪に及ぼす垂直抗力の和 N_2 を求めよ。ただし、座標軸を、x 軸は自動車の前方方向を向き自動車の重心で $x = 0$ となるように、z 軸は鉛直方向上向きで路面で z=0 となるようにとると、自動車の重心の座標は $(x,z)=(0,h)$、前輪の接地点の座標は $(x,z)=(l_1,0)$ 後輪の接地点の座標は $(x,z)=(-l_2,0)$ であるとする。また、速度は十分に小さく、したがって、空気抵抗は無視できるとする。重力加速度は g とせよ。



(2006 年度力学 II 定期試験の問題 [3] を再出題しました。)

解答例

前輪に働く垂直抗力と摩擦力を夫々N_1,F_1 とし、後輪に働く垂直抗力と摩擦力を夫々N_2,F_2 とする。また、２つの摩擦力の合力を $F = F_1 + F_2$ とする。

重心の運動方程式の x 成分は、$ma = F_1 + F_2 \cdots (1)$

z 成分は、$m \cdot 0 = N_1 + N_2 - mg \cdots (2)$

重心の回りの回転の運動方程式は、$0 = hF + l_1N_1 - l_2N_2 \cdots (3)$

(1) より $F = ma$, (2) より $N_2 = mg - N_1$。これらを (3) に代入すると、

$mah + l_1N_1 - mgl_2 + N_1l_2 = 0$

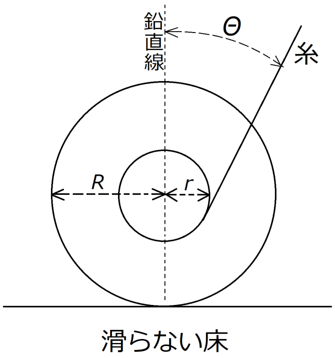
$N_1 = \frac{mgl_2 - mah}{l_1 + l_2} \quad \cdots$(答)

$N_2 = mg - N_1 = \frac{mgl_1 + mah}{l_1 + l_2} \quad \cdots$(答)

(注意事項) 重心以外の点の回りの回転の運動方程式（力のモーメントの釣り合い）を考えるときは、慣性力 (x 成分が $-ma$、z 成分が 0) が重心に働いていることを考慮する必要がある。一方、重心の回りの回転を考えるときは、重心に働く慣性力は重心の回りの回転に寄与しないので、考慮する必要がない。

【3】 右図のように、糸巻に巻かれた糸を鉛直上向き方向から角度 θ だけ傾けた方向に引くとき、糸巻が床の上を滑らずに転がるとする。糸巻が左右どちら側に転がるかを、θ の大きさと関連付けて論じよ。但し、糸の巻かれた内側の円筒の半径を r、床を転がる外側の円筒の半径を R とする。

(教科書 p.182 の演習問題 13 の B の 2 番の問題文を若干変更しました。)



解答例

糸の張力を T, 糸巻の質量と慣性モーメントを夫々 m, I とする。床との接点で糸巻に働く垂直抗力を $F_\perp$, 摩擦力（右向き正）を $F_\parallel$ とする。糸巻の重心の位置ベクトルの水平右向き成分を x、鉛直上向き成分を y, 糸巻の回転角（左巻き正）を φ とする。

重心の並進運動の方程式は

$m\ddot{x} = T\sin\theta + F_\parallel \cdots (1)$

$m\ddot{y} = T\cos\theta + F_\perp - mg \cdots (2)$

重心の回りの回転の運動方程式は

$I\ddot{\varphi} = rT + RF_\parallel \cdots (3)$

糸巻は床から浮くことはないとすると、$y = 0 \Rightarrow \ddot{y} = 0 \Rightarrow F_\perp = mg - T\cos\theta$

(この式は本問に答えるには不要)

糸巻と床の間に滑りがないので $x = -R\varphi \Rightarrow \ddot{x} = -R\ddot{\varphi} \cdots (4)$

(3) の右辺の $F_\parallel$ を (1) を使って消去し、代わりに現れた $\ddot{x}$ を (4) を使って消去すると、

$I\ddot{\varphi} = rT - mR^2\ddot{\varphi} - RT\sin\theta$

$(I + mR^2)\ddot{\varphi} = RT\left(\frac{r}{R} - \sin\theta\right)$

従って、

$\sin\theta < \frac{r}{R}$ のとき左側へと転がり、$\sin\theta > \frac{r}{R}$ のとき右側へと転がる。

[別解法]

力のモーメントおよび角運動量の基準点を糸巻と床との接点にとると、糸巻に働く力のモーメントは、糸の張力のモーメントだけであり、図を描いて考えることで、$\sin\theta < \frac{r}{R}$ のときは力のモーメントは左巻、$\sin\theta > \frac{r}{R}$ のときは力のモーメントは右巻であることが容易にわかる。糸巻が左に転がる場合は、糸巻の角運動量は（重心の並進運動による角運動量も重心のまわりの自転による角運動量もともに）左巻であり、右に転がる場合は、糸巻の角運動量は右巻である。角運動量の変化は力のモーメントの時間積分に等しいことを使うと、$\sin\theta < \frac{r}{R}$ のときは力のモーメントは左巻であるから、糸巻の得る角運動量も左巻であり、従って糸巻は左側へと転がり、$\sin\theta > \frac{r}{R}$ のときは力のモーメントは右巻であるから、糸巻の得る角運動量も右巻であり、従って糸巻は右側へと転がることが結論される。

【4】 剛体に重力が働くときと、その合力に等しい力が剛体の重心に働くときとで、剛体は同じ運動をすることを証明せよ。

(出典は講義ノートです)

解答例

$\vec{P}$ を系の全運動量、$\vec{L}$ を系の全角運動量、$\vec{F}$ を系に働く全ての外力のベクトル和、$\vec{N}$ を系に働く全ての外力のモーメントのベクトル和とすると、剛体の運動は $\dot{\vec{P}} = \vec{F}, \dot{\vec{L}} = \vec{N}$ で決定されるので、$\vec{F}$ と $\vec{N}$ が同じなら、運動も同じである。

剛体が N 個の質点から成るとする。i 番目の質点の質量を m_i, 位置ベクトルを $\vec{r}_i$ とする。重力加速度ベクトルを $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ とすると、i 番目の質点に働く重力は $\vec{F}_i = m_i\vec{g}$ である。剛体の全質量を $M = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i$ と書けば、剛体の重心は、$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i$ で与えられる。また、$\vec{F} = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{g} = M\vec{g}$ が成り立つ。

これらの記号を用いて、$\vec{N} = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ と $\vec{N}' = \vec{R} \times \vec{F}$ が等しいことを示せば、問題に答えたことになる。

$\vec{N}' = \frac{1}{M}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i \times M\vec{g}$

$= \sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i \times \vec{g}$

$= \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i\vec{g}$

$= \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

$= \vec{N}$ (証明終)

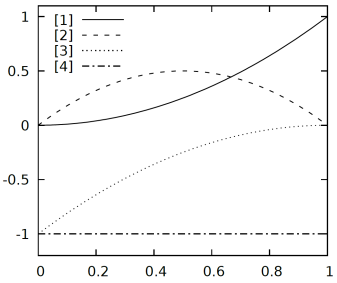
【5】 x 軸、y 軸、z 軸は静止した直交座標系の座標軸である。一方、x' 軸、y' 軸、z 軸は一様に回転する直交座標系の座標軸であり、x' 軸と y' 軸は z 軸を回転軸として一定の角速度 Ω で回転している。

質量 m の質点 P は、静止座標系 xyz では、xy 平面上で、原点を中心とし半径が r の円上を一定の角速度 ω で等速円運動している。

ただし、$0 < \Omega < \omega$ とする。また、以下では、座標原点から質点 P に向かうベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{r}$ と記すことにし、$r = |\vec{r}|$ とする。

このとき、回転座標系 $x'y'z$ で観測した、質点の加速度、質点 P に働く真の力、質点 P に働くコリオリ力、質点 P に働く遠心力 という 4 つのベクトル量の $\vec{r}$ 方向の成分値、a、T、F_{cor}、F_{cen} を m, r, ω, Ω を用いて表せ。（補足説明：これらの 4 つのベクトル量の方向は $\vec{r}$ と同一か、正反対方向である。同一方向の場合は成分値の符号は正、正反対方向の場合は成分値の符号は負とせよ。）

また、右のグラフの曲線 [1]~[4] は、ma、T、F_{cor}、F_{cen} のいずれかを表している。各番号の曲線はどの量を表しているかを答えよ。



横軸は ω を単位として測った Ω, 縦軸の単位は $mr\omega^2$ である。

解答例

角速度 Ω で回転する座標系では、質点 P は半径 r, 角速度 $\omega - \Omega$ で等速円運動しているので、その向心加速度は $-$（半径）×（角速度)^2 として計算できて、

$a = -r(\omega - \Omega)^2 \cdots$ 曲線 [3]

真の力は観測者の回転速度に依らないので、$\Omega = 0$ の場合について求めればよい。静止座標系で観測すると、質点 P は半径 r, 角速度 ω で等速円運動しているので、その運動に必要な向心力は $-$(質量) × (角速度)^2 として計算できて、

$T = -mr\omega^2 \cdots$ 曲線 [4]

遠心力は、（質量）×（座標系の回転軸からの距離）×（座標系の回転角速度)^2 として計算できて、

$F_{\mathrm{cen}} = mr\Omega^2 \cdots$ 曲線 [1]

角速度 Ω で回転する座標系では、質点 P は半径 r, 角速度 $\omega - \Omega$ で等速円運動しているので、その速さは $v = r(\omega - \Omega)$ である。コリオリ力の大きさは、2 × (質量) × (回転座標系で見た質点 P の速さ) × (座標系の回転の角速度) × sin(質点の速度ベクトルと座標系の回転角速度ベクトルの交角=90°) として計算できて、

$F_{\mathrm{cor}} = 2mr(\omega - \Omega)\Omega \cdots$ 曲線 [2]

[補足説明] 別の求め方として、運動方程式の $\vec{r}$ 方向の成分

$ma = T + F_{\mathrm{cen}} + F_{\mathrm{cor}}$

を使えば、他の 3 つの量が求まっていれば、それらを使えば 4 つ目の量が求まる。例えば、コリオリ力は、

$F_{\mathrm{cor}} = ma - T - F_{\mathrm{cen}} = -mr(\omega - \Omega)^2 + mr\omega^2 - mr\Omega^2 = 2mr\omega\Omega - 2mr\Omega^2 = 2mr(\omega - \Omega)\Omega$