応 用 力 学　定 期 試 験 問 題

福井大学工学部応用物理学科 1 年対象、担当教員 田嶋、2017 年 2 月 6 日 4 限実施

A3 判問題用紙 1 枚（表裏印刷）と B4 判解答用紙 1 枚を各人に配布する。解答用紙のおもて面の最下部に学籍番号と氏名を記入せよ。解答用紙 1 枚だけを提出せよ。【2】〜【5】については、最終的な答のみでなく説明と計算過程を必ず記せ。

【1】

下記の文の ア 〜 ホ に語群から最も適切な語句を選んで埋めよ。

地球と比較すると、中性子星は質量が 5 桁大きく、赤道半径は 3 桁小さい。このことより中性子星の表面での重力加速度は地球の表面での重力加速度より約 ア. 11 桁大きい。

ア: 正の整数で答えよ。

ケプラーの第 3 法則とは、同じ恒星のまわりを回る全ての惑星の公転周期は楕円軌道の長軸半径の イ. $\frac{3}{2}$ 乗に比例するという法則である。（覚えていなくても、円軌道の場合について考察すれば高校生にも分かる。） この法則と、金星の軌道の長軸半径が地球の軌道の長軸半径の 0.72 倍であることから、金星の公転周期は、約 ウ. 0.61 年であることが分かる。

イ: 整数か既約分数で答えよ。

ウ: 0.21　0.26　0.31　0.36　0.41　0.46　0.51　0.56　0.61　0.66　0.71　0.76　0.81

質点 P の質量を m, 時刻 t における位置ベクトルを $\vec{r}(t)$、速度を $\vec{v}(t)$、運動量を $\vec{p}(t)$、運動エネルギーを $E_{\mathrm{K}}(t)$、質点 P に働く力を $\vec{F}(t)$ とする。このとき、任意の 2 つの時刻 $t_1 < t_2$ に対して下記の等式が成立する。

$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boxed{\text{エ. } \vec{F}(t)}\, dt,\qquad E_{\mathrm{K}}(t_2) - E_{\mathrm{K}}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boxed{\text{オ. } \vec{F}(t)\cdot\vec{v}(t)}\, dt.$ もし、力が位置だけで決まり、$\vec{F}(t)$ が $\vec{F}\big(\vec{r}(t)\big)$ と表せる場合には、t_1 から t_2 の間の質点 P の軌跡を C として、

$E_{\mathrm{K}}(t_2) - E_{\mathrm{K}}(t_1) = \int_{\mathrm{C}} \boxed{\text{カ. } \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}}$ とも表せる.

エ・オ・カ: 数式で答えよ.

燃焼ガスを秒速 4km で噴出するロケットが加速度 $10g$ $(g = 9.8\mathrm{ms}^{-2})$ を出すには、1 秒あたりロケットの全質量の約 キ. 40 分の 1 の質量の燃料をガスとして噴出する必要がある。ただし重力を無視せよ。

キ: 10　20　30　40　50　60　70　80　90　100　200　300　400　500　600　700

質量 $2m$ の物体と質量 $3m$ の物体の相対運動に関する換算質量は ク. $\frac{6}{5}$ m である。

ク: 既約分数で答えよ。

長さが 6m の丸太の左端を持ち上げるには 30kgf, 右端を持ち上げるには 60kgf の力が必要である。このとき、この丸太の質量は ケ. 90 kg であり、重心は左端から コ. 4 m の位置にある。

ケ・コ: 整数か既約分数で答えよ。

剛体に働く力の$\boxed{\text{サ. 作用点}}$を$\boxed{\text{シ. 作用線}}$に沿って移動しても剛体の運動は変わらない。
サ: 重心　内心　外心　垂心　傍心　中心点　基準点　作用点　焦点　原点
シ: 内接円　外接円　大円　軌道　基準線　作用線　中心線　包絡線　座標軸

剛体に働く２つの力が、剛体の重心の並進運動の状態は変えずに剛体の回転運動の状態だけを変える効果を持つとき、２つの力の組を$\boxed{\text{ス. 偶力}}$という。$\boxed{\text{ス. 偶力}}$をなす２力は$\boxed{\text{セ. 平行}}$で$\boxed{\text{ソ. 反対向き}}$である。
ス: 組力　対力　奇力　偶力　反力　起転力　自転力　起渦力　造渦力
セ: 垂直　平行
ソ: 同じ向き　反対向き

剛体の回転の運動エネルギーは回転の角速度の２乗に$\boxed{\text{タ. 慣性モーメント}}$の$\frac{1}{2}$倍を掛けると得られる。長さ$a$、質量$m$の一様な細い剛体棒を、その中心を通り棒に垂直な軸の回りに回転させた場合の$\boxed{\text{タ. 慣性モーメント}}$は$\dfrac{1}{12}ma^2$である。また、この棒の片方の端点を通り棒に垂直な軸の回りに回転させた場合の$\boxed{\text{タ. 慣性モーメント}}$は$\boxed{\text{チ. }\frac{1}{3}}$ ma^2である。
タ: 回転トルク　慣性トルク　剛体トルク　回転モーメント　慣性モーメント　剛体モーメント
チ: 整数か既約分数で答えよ。

半径と質量が同一である 球（中身は一定密度）、球殻（中身は空）、円盤（面密度は一定）のうちで、回転対称軸を回転軸とするときの慣性モーメントが最大のものは$\boxed{\text{ツ. 球殻}}$である。（例えば「球の慣性モーメントIは半径をa、質量をmとして$I = \frac{2}{5}ma^2$である」というようなことを覚えていなくても、定性的に考えれば分かる。）
ツ: 球　球殻　円盤

天体の自転軸やコマの回転軸が円錐面を描いてゆっくり運動する現象は$\boxed{\text{テ. 歳差}}$運動と呼ばれる。この現象は全角運動量ベクトルが回転軸にほぼ平行であることを仮定すれば簡単に説明できる。床の上でコマが、回転軸を鉛直にして（上から見下ろして）右巻きに高速で回転しているとき、回転軸の上端に水平方向北向きに力を加えると、上端は$\boxed{\text{ト. 東}}$向きに傾く。これは力を加える前のコマの角運動量ベクトルが$\boxed{\text{ナ. 鉛直下}}$向きであったところに、その力がコマに与えた角運動量ベクトルの変化が$\boxed{\text{ニ. 西}}$向きだったからである。
テ: 揺動　章動　秤動　収差　周差　集差　細差　歳差　再差
ト: 東　南　西　北
ナ・ニ: 東　南　西　北　鉛直上　鉛直下

慣性系とは$\boxed{\text{ヌ. ニュートン}}$の運動方程式が成り立つ座標系のことである。２つの慣性系の間の相対運動は$\boxed{\text{ネ. 等速直線運動}}$である。任意に選ばれた一つの慣性系が真に静止した絶対静止系であるかどうかを、力学現象を観測することにより判定することは$\boxed{\text{ノ. は不可能である}}$。
ヌ: ケプラー　ガリレイ　ニュートン　アインシュタイン　キャベンディシュ
ネ: 単振動　減衰振動　等加速度直線運動　等加速度円運動　静止状態　等速直線運動　等速円運動
ノ: 可能である　不可能である　可能な場合と不可能な場合がある

問題の続きが裏面に印刷されています。

仮に地球の自転周期が現在の 24 時間ではなく、12 時間に変わったとすると、地球の自転による遠心力の大きさは、約 $\boxed{\text{ハ}\ 4}$ 倍になる。
ハ: 1/128　1/64　1/32　1/16　1/8　1/4　1/2　1　2　4　8　16　32　64　128

福井において、西に向かって水平に移動する物体に働くコリオリ力の水平面内の成分は $\boxed{\text{ヒ}\ \text{北向き}}$ である。また鉛直方向の成分は $\boxed{\text{フ}\ \text{下向き}}$ である。
ヒ: 東向き　南向き　西向き　北向き　南東向き　南西向き　北西向き　北東向き　ゼロ
フ: 上向き　下向き　ゼロ

南極点を除く**南半球**では、鉛直上向きに投射された物体に働くコリオリ力の働く方向は、上昇中は $\boxed{\text{ヘ}\ \text{西向き}}$ であり、最高点を通過後の落下中は $\boxed{\text{ホ}\ \text{東向き}}$ である。
ヘ・ホ: 東向き　南向き　西向き　北向き　鉛直上向き　鉛直下向き　ゼロ

【2】 宇宙飛行士 (宇宙服+体重=100kg) が 30m の綱で 900kg の宇宙船と結ばれている。最初、綱はピンと張り、両者は 30m 離れていた。飛行士が綱をたぐり寄せて宇宙船の中に戻った。宇宙船はこの間にどれだけ動くか (無重量状態とする)。但し、問題 [2]〜[5] は記述式問題であるから、答の値さえ求めればよいのではなく、答を求めるのに用いた等式の根拠を記すなど、答に至る過程を論証することが不可欠である。

(教科書 p.159 の演習問題 11 の A の 5 番の問題文を若干変更しました。)

解答例

初期状態で、宇宙船と飛行士からなる系の重心は、宇宙船から飛行士に向かって $30 \times \frac{100}{900+100} = 3$ m の位置に静止している。系に外力は働かないので、系の重心は不動である。飛行士が宇宙船に戻ったとき、両者はその重心にある。したがって、宇宙船は 3 m 移動する。 答 $\cdots$3 m

[補足説明] もっと明確な答案とするためには、数式を使って説明するのがよい。

初期状態で宇宙船の重心と飛行士の重心を結ぶ直線を座標軸にとる。初期状態での宇宙船の重心の座標を X_0, 飛行士の重心の座標を x_0, 最終状態での宇宙船の重心の座標を X_1, 飛行士の重心の座標を x_1 とすると、

$x_0 = X_0 + 30,\ x_1 = X_1$

が成立する。系に外力が働かないので宇宙船と飛行士からなる系の重心は静止したまま動かず、

$\frac{100x_0+900X_0}{100+900} = \frac{100x_1+900X_1}{100+900}$

が成立する。代入により x_0, x_1 を消去すると、

$1000X_0 + 3000 = 1000X_1$　　ゆえに、$X_1 - X_0 = 3$ m $\cdots$(答)

【3】 傾斜が 20 度の氷の斜面を直滑降するスキーヤーが手に振り子を持っている。この振り子の糸の向きが一定になったときの糸の向きと鉛直のなす角度を求めよ。ただし、斜面とスキーとの間の摩擦および空気抵抗は無視できると仮定せよ。

(教科書 p.197 の演習問題 15 の A の 3 番の問題文を若干変更しました。)

解答例

振り子の質量を $m, \theta = 20^\circ$ として、スキーヤーの加速度は、斜面に平行で下る向きに $g\sin\theta$, 斜面に垂直下向きに $g\cos\theta$ である。スキーヤーから見ると振り子は静止しており、振り子の加速度はゼロであるから、振り子に働く力の合力は、慣性力も考慮すれば、ゼロとなる。振り子には、斜面に平行で登る向きに $mg\sin\theta$ の慣性力が働いているが、これは振り子に働く重力の斜面に平行な成分と相殺する。したがって、糸の張力の斜面に平行な成分はゼロである。これは糸が斜面に垂直であることを意味している。したがって振り子は鉛直線と 20° の角度をなして安定する。 $\therefore\ 20^\circ \cdots$(答)

【4】 1 個の質点の持つ角運動量の時間変化率が、その質点に働く力のモーメントに等しいことを、質点の運動方程式から出発して導け。

注意 1: 導出過程で使用する全ての記号には定義を書け。(例 :「m を質点の質量とする」)

注意 2: ベクトルとスカラーを区別して書き分けよ。(例: 速度ベクトルを表す記号は、v とせず、$\vec{v}$ または $\mathbf{v}$ とせよ。)

解答例

m を質点の質量、$\vec{r}$ を質点の位置ベクトル、$\vec{F}$ を質点に働く力とする。位置ベクトルの基準点は、力のモーメントと角運動量の基準点にとる。質点に働く力のモーメントは $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$、質点の角運動量ベクトルは $\vec{L} = m\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$ である。ゆえに、$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = m\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r} \times m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r} \times m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

ここで運動方程式 $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ を使うと

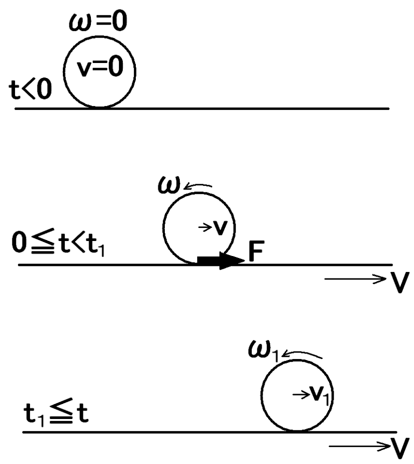
$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}$

が示される。

【5】 水平な板の上に円筒が置かれている。板と円筒の表面との間の動摩擦係数は μ である。円筒は、質量 m、半径 r で、重心が円筒の中心線上にあり、中心線のまわりに回転させる場合の慣性モーメントは I である。時刻 $t < 0$ では、円筒が板の上に置かれた状態で、円筒・板ともに静止していた。時刻 $t = 0$ に突然、板が水平方向右向きに速さ V で運動を始め、以後、等速度 V で運動を続けた。板と円筒の表面との間に相対運動が生じたため、円筒は板から水平方向右向きの動摩擦力 F (重力加速度を g とすると、$F = \mu mg$ である) を受けるようになり、この動摩擦力により、円筒は右方向へ並進運動を始めるとともに、中心軸のまわりに左回りの回転運動を始めた。円筒の並進運動は一定の加速度 a で加速し続け、回転運動もまた一定の角加速度 $\dot{\omega}$ で加速し続けた。その結果、時刻 t_1 には、円筒の表面と板との間の相対速度がゼロになった。$t > t_1$ では、摩擦力は働かず、円筒の右方向への並進運動の速度は一定値 v_1 を、左回りの回転の角速度は一定値 ω_1 を保った。

a、$\dot{\omega}$、t_1、v_1、ω_1 を m、r、I、V、μ、g のうち必要なものを使って表せ。

(2007 年度後期力学 II 定期試験の問題 [5] の再出題です。)



解答例

$ma = F = \mu mg \therefore\ a = \mu g \quad \cdots$(答)

$I\dot{\omega} = Fr = \mu mgr \therefore\ \dot{\omega} = \dfrac{\mu mgr}{I} \quad \cdots$(答)

時刻 t で $v = at, \omega = \dot{\omega}t,$ 接地点の速度は $v_{\mathrm{t}} = v + \omega r = a + \dot{\omega}rt = \mu g\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)t$

$t = t_1$ のとき $v_{\mathrm{t}} = V$ であるから

$\mu g\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)t_1 = V, \therefore\ t_1 = \dfrac{V}{\mu g\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)} \quad \cdots$(答)

$v_1 = at_1 = \dfrac{V}{1 + \frac{mr^2}{I}} \quad \cdots$(答)

$\omega_1 = \dot{\omega}t_1 = \dfrac{mrV}{I + mr^2} \quad \cdots$(答)