福井大学工学部物理工学科 2014 年度前期 微分積分演習 I レポート課題

2014 年 7 月 18 日出題　　担当教員：田嶋

下記の課題 【1】ないし【2】のどちらか一方を選択し, その課題に対する解答を作成し, 提出せよ.

提出場所： 総合研究棟 I 西棟 11 階の廊下に設置したレポート提出ボックスに投函せよ.

提出期限： 2014 年 8 月 8 日 (金曜日) 午後 6 時３０分

レポート用紙のサイズは, A4 に限る. 縦長に置いて使用し, 上辺から 2cm 以内には何も書かないようにせよ (この部分を綴じしろとするためである). １枚目には, 配布した用紙を使用せよ. 2 枚目以降は各自で A4 用紙を手配して使用せよ. 左上をステープラー (ホッチキス) で留めよ. 上記の規格に合致しないレポートは受け付けない (JABEE 審査の資料として保管しなければならないからである).

課題【１】

(1) 「 $|p| \leq 1$, $|q| \leq 1$ のとき、方程式 $\arcsin x = \arcsin p + \arcsin q$ の解 x を求めよ。」

という問題の答は、

「$r = \arcsin p + \arcsin q$ とすると、

$|r| \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $x = p\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{1-p^2}$,

$|r| > \frac{\pi}{2}$ のとき、 解なし。」

である。この答を導き出せ。

(2) $|p| \leq 1$, $|q| \leq 1$ のとき、方程式 $\arccos x = \arccos p + \arccos q$ の解 x を求めよ。導出も必要。

(3) $-\infty < p < \infty$, $-\infty < q < \infty$ のとき、方程式 $\arctan x = \arctan p + \arctan q$ の解 x を求めよ。導出も必要。

(4) 計算問題「$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$ の値を求めよ」の答は「$\frac{\pi}{4}$」である。これに類似した、「逆三角関数を使わなければ表せない２つの角度の和が、逆三角関数を使わずに表せる」という意外性を持った計算問題を **３題** 作れ。答の値も付記せよ。

作るべき計算問題の満たすべき条件を正確に述べると、問は「$f(p) + f(q)$ の値を求めよ」の形をしており、f は、arcsin, arccos, arctan のいずれかとする。$f(p)$, $f(q)$ は、$\frac{\pi}{12}$ の有理数倍であってはならない。答の値は、$\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ のうちのいずれかとする。

更に、努力目標として、p, q はなるべく簡単な数であることが望ましい。また、他の人のレポートとは違う独自の計算問題を作ることが望ましい。

なお、答は必ず関数電卓を使って確認せよ。もしも答が間違っていたら大きく減点する。

課題【2】

この問題では、数式を簡潔に表すため、$\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial_x^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\partial_y = \dfrac{\partial}{\partial y}$, $\partial_y^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\partial_u = \dfrac{\partial}{\partial u}$, $\partial_u^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial u^2}$, $\partial_v = \dfrac{\partial}{\partial v}$, $\partial_v^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}$ という記法を用いる。

変数の組 $(x,\, y)$ と別の変数の組 $(u,\, v)$ とは変数変換によって結びつけられており、∂_x および ∂_y は、その右に置かれた関数を (x, y) で表してから x および y で偏微分する操作を表し、∂_u および ∂_v は、その右に置かれた関数を (u, v) で表してから u および v で偏微分する操作を表すものとする。

また、$\partial_x\partial_y = \partial_y\partial_x$, $\partial_u\partial_v = \partial_v\partial_u$ が成り立つとする。

(1) 下記の 2 式が恒等的に成り立つことを示せ。

$$\partial_x = \frac{y_v}{D}\partial_u - \frac{y_u}{D}\partial_v, \qquad \partial_y = -\frac{x_v}{D}\partial_u + \frac{x_u}{D}\partial_v$$

ただし、$x_u = \partial_u x$, $x_v = \partial_v x$, $y_u = \partial_u y$, $y_v = \partial_v y$, $D = x_u y_v - x_v y_u$ とする。

(2) f, g を u,v の関数として、微分演算子 $\hat{p}$ を

$$\hat{p} = f\partial_u + g\partial_v$$

と定義する。このとき、

$$\hat{p}^2 = f^2\partial_u^2 + g^2\partial_v^2 + 2fg\partial_u\partial_v + (ff_u + gf_v)\partial_u + (fg_u + gg_v)\partial_v$$

が恒等的に成り立つことを示せ。ただし、$f_u = \partial_u f$, $f_v = \partial_v f$, $g_u = \partial_u g$, $g_v = \partial_v g$ とする。

(3) 変数の組 $(x,\, y)$ と別の変数の組 $(u,\, v)$ とが、変数変換

$$x = (\cosh u)\cdot(\cos v), \quad y = (\sinh u)\cdot(\sin v)$$

で関係付けられているとき、$\partial_x^2 + \partial_y^2$ を u, v, ∂_u^2, ∂_v^2, $\partial_u\partial_v$, ∂_u, ∂_v のうち必要なものを使って表せ。

なお、解答中、括弧を略して $\cosh u \cos v$ と書いてあれば、その意味は、$\cosh(u \cdot \cos v)$ ではなく $(\cosh u)\cdot(\cos v)$ であると解釈するものとする。その他の類似した項についても同様に解釈するものとする。

福井大学工学部物理工学科 2014 年度前期 微分積分演習 I レポート

学籍番号：	
氏　　名：	
提出日付：	2014年　　　月　　　日

選択課題番号：【1】・【2】 (どちらかを○で囲め)

提出枚数：この用紙を含めて合計　　　枚