福井大学工学部物理工学科 2013 年度前期 微分積分演習 I レポート課題

2013 年 7 月 23 日出題　　担当教員：田嶋

下記の課題 【1】ないし【2】のどちらか一方を選択し, その課題に対する解答を作成し, 提出せよ.

提出場所： 工学部 4 号館 2 階 S212 号室前の廊下に設置したレポート提出ボックスに投函せよ.

提出期限： 2013 年 8 月 9 日 (金曜日) 午後 6 時３０分

レポート用紙のサイズは, A4 に限る. 縦長に置いて使用し, 上辺から 2cm 以内には何も書かないようにせよ (この部分を綴じしろとするためである). １枚目には, 配布した用紙を使用せよ. 2 枚目以降は各自で A4 用紙を手配して使用せよ. 左上をステープラー (ホッチキス) で留めよ. 上記の規格に合致しないレポートは受け付けない (JABEE 審査の資料として保管しなければならないからである).

課題【１】

(1) 対数微分法を高階微分に拡張したような「対数高階微分法公式」を作ってみよう。

対数微分法とは、関数 f の１階導関数 f' を、

$$f' = \big(\log|f|\big)' \cdot f$$

として計算する方法である。ここで、$g = \log|f|$ と書けば、対数微分法は、

$$f' = g'f$$

と書き表せる。これに類似した計算方法で f の２階導関数を求めるには、

$$f'' = (g'f)' = (g')'f + g'f' = g''f + g'(g'f) = \left(g'' + g'^2\right) f, \qquad \therefore f'' = \left(g'' + g'^2\right) f$$

とすればよい。また、３階導関数を求めるには、

$$\begin{aligned} f''' &= (f'')' = \left(\left(g'' + g'^2\right) f\right)' = \left(g'' + g'^2\right)' f + \left(g'' + g'^2\right) f' \\ &= \left(g''' + 2g'g''\right) f + \left(g'' + g'^2\right) g'f = \left(g''' + 3g''g' + g'^3\right) f, \qquad \therefore f''' = \left(g''' + 3g''g' + g'^3\right) f \end{aligned}$$

とすればよい。同様にして、４階導関数および５階導関数を求めるための「対数高階微分法公式」を作ってみよ。

(2) $f(x) = e^{-1/x^2}$ に対して f', f'', f''', $f^{(4)}$, $f^{(5)}$ を求めよ。但し、この問の目的は前小問で作った公式の理解を見ることなので、必ず 前小問で作った「対数高階微分法公式」を利用して求めよ。

(3) n を自然数 (1 以上の整数) とするとき、不定形の極限

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^n}$$

を求めよ。ヒント： 与式の形のままでロピタルの定理を適用するのでなく、変数 x を別の変数に変換してから適用すると求め易い。

(4) 関数 $f(x) = e^{-1/x^2}$ の $x = 0$ での n 次までのテーラー展開式を下式で定義する。

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k, \quad c_k = \frac{1}{k!} \lim_{\epsilon \to 0} f^{(k)}(\epsilon)$$

このとき、$f_n(x) = 0$（即ち $c_0 = c_1 = \cdots = c_n = 0$) であることを証明せよ。

ヒント：小問 (2) の議論を更に推し進めることで $f^{(k)}(x)$ がどのような形の項の和として表されるか論じた上で、小問 (3) の結果を使って、それらの項が全て $x \to 0$ でゼロに収束することを示せばよい。

補足説明

数学の学習課程で目にするような通常の関数 $f(x)$ は、そのテーラー級数

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \cdots$$

が収束する x では、級数の値が元の関数の値に一致する（この性質を持つ関数を解析的関数と呼ぶ)。一方、関数 e^{-1/x^2} は点 $x = 0$ で、$f_n(x)$ が n に依らずにゼロとなることが本問により示された。即ち、そのテーラー級数 は $-\infty < x < \infty$ で (値 0 に) 収束するが、値が元の関数に一致するのは 1 点 $x = 0$ だけである。これは通常の関数と較べると、非常に特殊な状況であり、テーラー級数が収束しても元の関数には一致しない場合が存在することを示すための定番の具体例としてよく取り上げられる。

なお、この場合もテーラーの定理は成り立つ。即ち、剰余項 R_{n+1} を $f(x) = f_n(x) + R_{n+1}$ で定義すると、「任意の x に対して、区間 $0 < \xi < x$ または $x < \xi < 0$ に $R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$ を満たす ξ が存在する」ことが保証される。通常の関数ではこの定理を利用して、$\lim_{n \to \infty} R_{n+1} = 0$ が成り立つ x の区間を求めることができたりする。しかし本問の場合は、$f_n(x) = 0$ であるから n に依らず $R_{n+1} = f(x)$ であり、n の増加とともに剰余項がゼロに収束したりはしない。このときテーラーの定理は「$f^{(n+1)}(\xi) = \dfrac{(n+1)! f(x)}{x^{n+1}}$ を満たす ξ が 0 と x の間に存在する」という、さしあたり使い途の思い浮かばない、この関数の持つ特殊事情を述べているに過ぎない。

課題【2】

2 変数関数

$$f(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)(x - y)$$

の停留点を全て求めよ. 更に, 各停留点を 「極大点」, 「極小点」, 「極値を取らない停留点」（鞍点を含む）の 3 種類に分類せよ. また, 各停留点における関数 f の値を求めよ.

ここで停留点とは, x 方向および y 方向の偏微分係数が共にゼロになる点である. また, 極大点とは, その点の近傍のどの点よりも f の値が大きい点であり, 極小点とは, その点の近傍のどの点よりも f の値が小さい点である.

配布資料 No.9 に記された判定方法では分類が決まらない点 (即ち $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ となる点) についても, 個々の状況に応じて臨機応変に考察することにより, 必ず分類を行え.

福井大学工学部物理工学科 2013 年度前期 微分積分演習 I レポート

学籍番号：	
氏　　名：	
提出日付：	2013年　　　月　　　日
選択課題番号：	【１】・【２】 (どちらかを○で囲め)
提出枚数：この用紙を含めて合計	枚