
福井大学工学部物理工学科 2011 年度前期 微分積分演習 I レポート 課題

2011 年 7 月 26 日出題 担当教員：田嶋

下記の課題【1】ないし【2】のどちらか一方を選択し、その課題に対する解答を作成し、提出せよ。

提出場所： 工学部 4 号館 2 階 S212 号室前の廊下に設置したレポート提出ボックスに投函せよ。

提出期限： 2010 年 8 月 9 日 (火曜日) 午後 6 時 30 分

レポート用紙のサイズは、A4 に限る。縦長に置いて使用し、上辺から 2cm 以内には何も書かないようにせよ（この部分を綴じしろとするためである）。1 枚目には、配布した用紙を使用せよ。2 枚目以降は各自で A4 用紙を手配して使用せよ。左上をステープラー（ホッチキス）で留めよ。上記の規格に合致しないレポートは受け付けない（JABEE 審査の資料として保管しなければならないからである）。

課題【1】

正接関数

$$f(x) = \tan x \cdots (1)$$

について下記の小問 (i),(ii) に答えよ。

(i) $f(x)$ の $x = 0$ の近傍でのテーラー展開式を、以下に説明する方法で x^7 の項まで求めよ。剰余項は $O(x^8)$ 等と略記すればよい。

テーラー展開の一般式

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \cdots (2)$$

に現れる $f^{(n)}(0)$ を、恒等式 $f'(x) = (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$, 即ち,

$$f'(x) = 1 + f(x)^2 \cdots (3)$$

を利用して求める。まず、(1) 式に $x = 0$ を代入して $f(0) = 0$ を得る。次に、(3) 式に $x = 0$ を代入して、

$$f'(0) = 1 + f(0)^2 = 1 + 0^2 = 1$$

を得る。更に、

$$f''(x) = \{f'(x)\}' = \{1 + f(x)^2\}' = 2f(x)f'(x)$$

に (3) 式を代入して、

$$f''(x) = 2f(x) + 2f(x)^3$$

を得る。これに $x = 0$ を代入して、 $f''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0^3 = 0$ を得る。更に続けて、

$$f'''(x) = \{2f(x) + 2f(x)^3\}' = 2f'(x) + 6f(x)^2 f'(x) = 2\{1 + 4f(x)^2 + 3f(x)^4\}$$

を得、これに $x = 0$ を代入して、 $f'''(0) = 2(1 + 4 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0^4) = 2$ を得る。

一般の n 次導関数については、 $f^{(n-1)}$ が f のみを用いて表されていれば、 $f^{(n)} = \frac{df^{(n-1)}}{df} \cdot (1 + f^2)$ として $f^{(n)}$ も f のみで表すことができる。この式の f に $f(0) = 0$ を代入すれば、 $f^{(n)}(0)$ の値が求まる。

(ii) (1) 式の $f(x)$ は奇関数なのでそのテーラー展開式は x の奇数べきの項だけからなり、

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{2n-1} \quad (c_n \text{ は定数}) \cdots (4)$$

という形のべき級数で表せる。(4) 式を (3) 式の左右両辺に代入した結果が一致することを使って、任意の $n \geq 2$ に対し、 c_1, c_2, \dots, c_{n-1} を用いて c_n を表す漸化式を作れ。また、得られた漸化式を使って c_2, c_3, c_4 の値を求め、(i) で求めた展開式と一致することを確認せよ。

[補足説明]

数学書や公式集では、本問で定義した c_n という記号が使われることはなく、代わりに正接係数 $T_n = (2n-1)! c_n$ が使われる。 T_n は整数である。多くの書物では、 T_n を使わずに、代わりに Bernoulli(ベルヌーイ) 数

$$B_n = \frac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)} T_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(2^{2n}-1)} c_n$$

が使われる。 B_n は有理数である。例えば「数学公式集 II — 級数・フーリエ展開 —」(森口繁一他著、岩波書店) では正接関数のテーラー展開は、

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!} x^{2n-1}$$

という形で表現されている。 B_n は正接関数に限らず他の様々な関数の級数展開の一般項を表す際に頻繁に出現する。 B_n の値の最も楽な計算方法は、本問で求めた漸化式により c_n の値を計算することであると思われる。

課題【2】

2変数関数

$$f(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)(x^2 - y^2)$$

の停留点を全て求めよ。更に、各停留点を「極大点」、「極小点」、「極値を取らない停留点」(鞍点を含む)の3種類に分類せよ。また、各停留点における関数 f の値を求めよ。

ここで停留点とは、 x 方向および y 方向の偏微分係数が共にゼロになる点である。また、極大点とは、その点の近傍のどの点よりも f の値が大きい点であり、極小点とは、その点の近傍のどの点よりも f の値が小さい点である。

配布資料 No.9 に記された判定方法では分類が決まらない点(即ち $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ となる点)についても、個々の状況に応じて臨機応変に考察することにより、必ず分類を行え。

福井大学工学部物理工学科 2011年度前期 微分積分演習Iレポート

学籍番号：

氏 名：

提出日付：

選択課題番号：・ (どちらかを○で囲め)

提出枚数：この用紙を含めて合計 枚
