福井大学工学部物理工学科 2010年度前期 微分積分演習Iレポート課題

2010 年 7 月 27 日出題　　担当教員：田嶋

下記の課題【1】ないし【2】のどちらか一方を選択し、その課題に対する解答を作成し、提出せよ。

提出場所： 工学部 4 号館 2 階 S212 号室前の廊下に設置したレポート提出ボックスに投函せよ。

提出期限： 2010 年８月９日 (月曜日) 午後６時３０分

レポート用紙のサイズは、A4 に限る。縦長に置いて使用し、上辺から 2cm 以内には何も書かないようにせよ (この部分を綴じしろとするためである)。１枚目には、配布した用紙を使用せよ。2 枚目以降は各自で A4 用紙を手配して使用せよ。左上をステープラー (ホッチキス) で留めよ。上記の規格に合致しないレポートは受け付けない (JABEE 審査の資料として保管しなければならないからである)。

課題【１】

n を自然数として、変数 x の $2n+1$ 次多項式 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = x\prod_{k=1}^{n}\left(1-\tfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = x\left(1-\tfrac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\tfrac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\tfrac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\tfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

と定義する。($\prod$ は総乗記号と呼ばれ、$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n$ で定義される。) また、

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

と定義する。

さて、一般に, 関数 $g(x)$ の零点とは, $g(x)=0$ を満たす x のことである。$f_n(x)$ の零点は、$x=\pm k\pi\ (0\le k\le n)$ であるから、$f(x)$ の零点の集合は、$\{0,\pm\pi,\pm 2\pi,\pm 3\pi,\cdots\}$ であり、$\sin x$ の零点の集合と同一である。勿論、零点が等しいことだけからは関数が等しいことは結論できないが、下掲の $f_{10}(x)$, $f_{100}(x)$, $f_{1000}(x)$ のグラフを見ると、$f(x)=\sin x$ が成り立つように思われる。（実は、x の値によらずに成立することが証明できる。興味のある人は複素関数論の書物を参照せよ。）

そこで、$f(x)=\sin x$ が成り立つと仮定してみよう。そうすると、この仮定から, 任意の自然数 k について、

$$S_{2k} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{2k}}$$

の値を求めることができるというのがこの課題の主題である。そこで、「S_2, S_4, S_6 の値を上述の説明を踏まえて求めること」を課題として与える。具体的手順は、例えば下記の (1)〜(4) のステップを踏めばよい。あるいは、独自に考えついた他の手順によって求めてもよい。

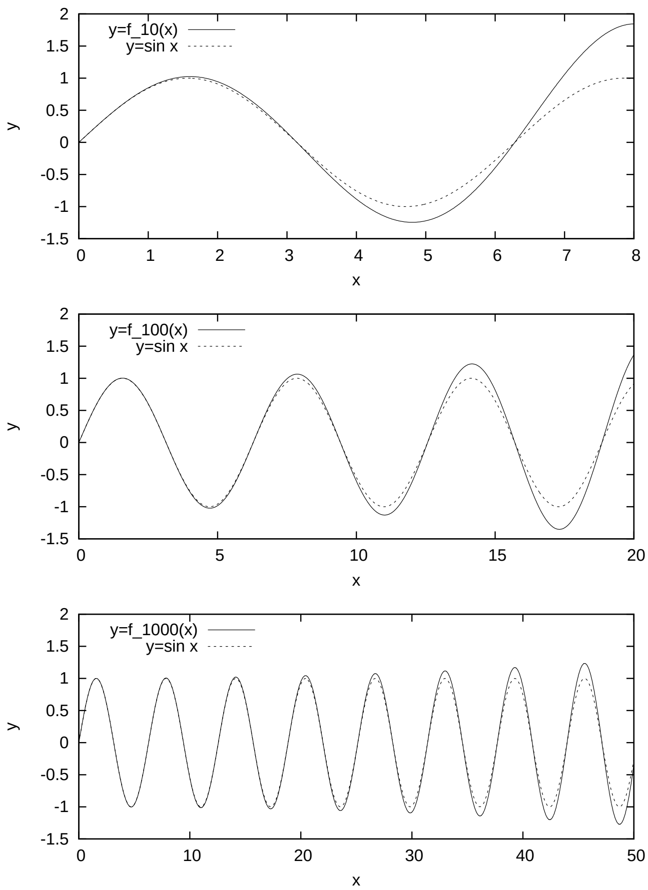
(1) $f_n(x)$ の定義式を $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} C_{n,2k+1}x^{2k+1}$ の形に展開したときの x^3 の係数 $C_{n,3}$ を求めよ。(なお、$C_{n,1}=1$ であることは自明である。)

(2) $C_{2k+1} = \displaystyle\lim_{n\to\infty} C_{n,2k+1}$ とするとき、C_3 の表式は、S_2 に定数因子を乗じた形になる。C_3 が、$\sin x$ の $x=0$

近傍でのテーラー展開 $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$ の x^3 の係数 $-\frac{1}{3!}$ に等しいと仮定して、S_2 の値を求めよ。

(3) さらに $C_5 = \frac{1}{5!}$ が成り立つと仮定して、S_4 の値を求めよ。

(4) さらに $C_7 = -\frac{1}{7!}$ が成り立つと仮定して、S_6 の値を求めよ。



課題【２】関数 $f(x)$ が下記の (1)〜(4) 式

(1) $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$,　(2) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$,　(3) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$,　(4) $f(x) = (\cos x)^{\cos x}$

で定義される４通りの場合のそれぞれについて $f(0)$, $f(\frac{1}{2}\pi)$, $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2}\pi)$ の値を求めよ。但し、$f(0) = \lim_{x\to+0} f(x)$, $f'(0) = \lim_{x\to+0} f'(x)$, $f(\frac{1}{2}\pi) = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi-0} f(x)$, $f'(\frac{1}{2}\pi) = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi-0} f'(x)$ とする。また、 区間 $0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$ において $f'(x) = 0$ を満たす x の値を全て求め、さらに、それらの点における $f(x)$ の値を求めよ。最後に、これら求めた値を利用して、$y = f(x)$ $(0 \le x \le \frac{1}{2}\pi)$ のグラフを描け。

（ヒント： ４種の関数には、変数の１次変換で互いに移り変われる関数の対が含まれているので、対の片方について課題に答えれば、残る一方についてはほとんど計算をせずに答えることができる。）

福井大学工学部物理工学科 2010 年度前期 微分積分演習 I レポート

学籍番号：	
氏　　名：	
提出日付：	2010年　　　月　　　日
選択課題番号：	【 1 】・【 2 】 (どちらかを○で囲め)
提出枚数：この用紙を含めて合計	枚